# CHRISTOPHORI CLAVII BAMBERGENSIS E SOCIETATE IESV

# ALGEBRA.






*MOGVNTIÆ,*

Sumptibus ANTONII HIERAT, excudebat IOANNES VOLMARI.

*Cum Gratia & Priuilegio Sacræ Cæsar. Maiest.*

---

ANNO M. DC. XII.

PROOEMIVM

# DE ALGEBRÆ PRÆSTANTIA.

ET dignitate summa, & amplissimarum laudum præconijs nulli postrema ea ars est, quam recepto vocabulo Algebram nostrates appellarunt: siue enim eius veluti natiuam originem inquiras, inde vsque ab Arabum felicibus ingenijs repetenda est: siue honestatem, inter Mathematicarum ordinis primas versatur: siue amplitudinem, nullis numerorum statis finibus, nulla magnitudinum mole, nullis gentium priuatis, publicis, priscis, recentibus, cultis, barbaris institutis, non vllo terrarum, vasto licet, ambitu continetur. Propositum siue scopus eius est, ut certam aliquam à sensuum cognitione, ac sensu secretam quantitatem exploret, & tandem inter duos aliquos numeros æqualitate, siue æquatione comperta, deprehendat, atque demonstret.

Scopus Algebræ.

Venaticæ canis instar, quæ si quando diuturna venatione fatigata, & fame exagitata delitescentem feram subodorata fuerit, tamdiu oculis, tamdiu odora narium sagacitate scrutatur singula, donec comprehensam, dentibusque hærentem prædam domino sistat. Et sane multo etiam opificium ipsum opus admiratione antecellit, & arduum sua sponte facinus, atque præclarum exornat ipsa conficiendi ratio, redditque præstantius. Persimile est, quod dissimili in re andabatarum more ludentibus euenire solet. Quamdiu enim obuelatis oculis vrgentur ipsi, vrgentque vrgentes se, comprehensuros se aliquem nunquam desperant, è multis tamen, quis tandem sit intercipiendus, ignotum habent, & frustra sæpe his atque illis tentatis tenebris, vbi aliquem tenuerunt, tum demum detracta vitta, lucem oculi recipiunt, & ludus absoluitur. Obscuros enim numeros Algebra nunc addendo, nunc diuidendo, nunc multiplicando, suspenso velut vestigio, pertentat, certa, se in aliqua Geometrica progressione ab vnitate profecta deprehensuram, quod quærit, in qua tamen progressione inuentura sit, incerta: ac tamdiu cæco labore ludit, tamdiu latitantis numeri tenebras omnes explorat, vestigat, ac perfert, donec eo progrediatur, & ad eum numerum deueniatur, qui fuerat quæstioni subiectus, qui tum demum in lucem emergit, cum ipsa absoluitur operatio. Et primo quidem is numerus existit, qui in toto illo numerorum labore vnitatem progressionis ab vnitate incipientis proxime consequitur, tum etiam y omnes numeri deprehenduntur, qui ad quæstionem explicandam indagandumque propositum additi & diuisi fuere, vt suis deinde locis planum faciemus. Quam igitur scopus iste late vagatur, qui nec genus vllum numerorum, nec vllius magnitudinis diuersitatem, à se alienum putat? vt non numerorum modo latebras omnes detegat, sed vniuscuiusque etiam molis finitam magnitudinem, suorum metrum, ponderum momenta, mensurarumque certos terminos assequatur; neque vlla Arithmeticæ quæstio subijciatur, quam non veluti suam agnoscat Algebra, atque expediat. Tam multas, tam varias, tam obscuras, tam difficiles Mathematicæ partes vna Algebra pertractat vniuersas. Nam quod rerum Mathematicarum inextricabiles nodos solui non posse, accidit aliquando, aut si quid obscurum extrahi a tenebris nunquam potuit, non huius facultatis præcepta certissima, sed æquationum & æqualitatum difficultates, & quæ nondum innotuit, earundem ratio causanda est. De his tamen plura ad finem capitis 12. habentur. Illud modo agamus, vt quantis internallis Algebra Arithmeticæ præceptionibus antecellat, videamus: Quid enim in illa est, quod non etiam huius veluti fasces vereatur? quæ exempla tam sua, quæ tam ancipites quæstionum ambages, quæ tanta moles difficultatum, qui tam inextricabiles meandri rerum abditissimarum, quæ non sint omnia illi cum ista communia? Nihil habet Arithmetica, nihil quod Algebram fugiat; quæ explicare ipsa cum nequeat, cognoscenda Algebræ tradat, habet quàm plurima. Illud vero quam præclarum est, quam vnicuique optandum maxime, quam huius facultatis peculiare? Quod enim cæteris commune est, vt non ante proposita difficultas expediri possit, nec ne, sentias, quam totam absoluas, &, bis iterumque integram repetas, iteresque operationem: id in hac, in ipso operationis decursu obuiam fit, & prodit ipsa se quæstio, prius quam labor finem accipiat. Quæ enim sæpe suppositæ fallacia, & quæstionum pugnantes inter se sententiæ Algebræ imperitos latent, eas Arithmeticæ studiosus, nisi per hanc exploratas habeat, totus de proposita quæstionis solutione sollicitus frustra laborat, atq. ad has, atq. ad illas regulas animum refert, experitur singulas, singulas recognoscit, torquet sese & conficit, ad extremum inanes labores suos sentit, studiumque infelix damnat. Quare ne illud quidem in hac facultate est magnopere verendum, ne laborem vllum temere susceptum, & ad extremum vsque frustra toleratum dolendum sit, quod aliæ Mathematicæ partes accipere quidem ab hac possunt, præstare ipsæ non possunt. Atque hæc pauca de præstantia ac dignitate Algebræ præfationis loco dicta sint.

Algebræ excellentia.

# *DE INVENTORE ALGEBRÆ AC NOMINE.*

## CAPVT I.

DE inuentore huius artis non conuenit inter omnes; Gebrum Arabem Aſtronomum aſſerunt non pauci, & à Gebro Algebram dictam contendunt. Vero ſimilius tamen Ioannes Regiomontanus in præfatione Alphragani Diophanto Alexandrino hoc inuentum attribuit. Ipſe enim Diophantus in tredecim librorum præfatione, quos hac de re ſcripſit ad Dionyſium, ſe primum huius ſcientiæ inuentorem profitetur, & à nemine ante ſe in lucem datam, immo ad ſuam vſque ætatem ignotam omnino fuiſſe, pronunciat. Maiorem accepit nomen ipſum varietatem; nam quod inter cæteras Arithinceticæ regulas maxime præſtat, Ats maior à plurimis appellata eſt. Regulam cenſus & rei *Varia nomina Algebræ.* Latini dixerunt; hoc eſt, regulam Radicis & quadrati. Magna enim ex parte quæſtiones in hac arte propoſitæ ſoluuntur per calculationes radicum, quas ipſi res, & quadratorum, quos ijdem cenſus vocant, vt ſuo loco conſtabit. Apud Italos Regula coſæ (ſeu della coſa) nuncupatur; quod in quæſtionibus ſoluendis ſemper vna radix ponatur, quam ipſi coſam dicunt. Ex quo etiam nomen illud ſortita eſt, quo à multis regula Coſſica nominatur. Non vno eam nomine Arabes omnes nominarunt, Algebram enim quidam vocant, quod apud eos idem ſonat, ac reſtauratio; quia nimirum in quæſtionibus hac arte ſoluendis ad aliquam ſemper æquationem, ſiue æqualitatem eſt deueniendum; in qua, quicquid ablatum, quidquid diminutum eſt, quiquid deeſſe comperitur, reſtaurari oportet Almuchabulam vero, quod oppoſitionē eorum lingua ſignificat, propterea vocant alij, quod in quæſtionum abditis exponendis in hac ſcientia, eum ad æquationem æqualitatemve aliquam peruentum eſt, duo ſemper numeri æquales, diuerſo tamen nomine, ſibi inuicem opponuntur. Atq; hinc poſtremo factum eſt, vt geminatis nominibus Algebram & Almuchabulam aliqui vocauerint; quod ſcilicet tum per reſtaurationem, tum per hanc, quam modo diximus, oppoſitionem, quæſtiones omnes expediat. Harum tamen appellationum rationes is cognoſcet planius, qui quæſtionum, quæ hoc opere continentur, ſolutiones diligentius cognouerit. Vlus tamen apud ſcriptores, vt cum Arabibus Algebra hæc tota noſtra ſcientia communi appellatione dicerctur obtinuit.

HÆC de inuentore & nomine Algebræ dicta ſufficiant. Quæ ſi quam præclara eſt, quam iucunda ſtudioſis ſui, quam omnibus ſe ſe præſtat admirabilem; tam etiam perſpicue tradita eſſet, nec in Arithmeticorum, qui eam docuerunt, obſcuritate declaranda magis, quam in eiuſdem facultatis præceptis explicandis laborandum eſſet, coleretur etiam ipſa inter primas, ſuamque dignitatem pariter, & nominis ſplendorem integrum retineret nec tam multi ſcriptorum vel ambagibus impediti, vel obſcuritate deterriti, relato repente veſtigio, ante diſcendæ Algebræ voluntatem & ſpem perdiſcendi abieciſſent, quam Algebram ipſam, primo, vt aiunt, è limine ſalutarent.

HORVM mihi laborem leuandi labor incumbit in præſentia, nec moleſtus, licet grauis, nec ſi eius fructus exiltat, iniucundus. Quod & diuina ope præſtare pro meis viribus enitar. Omnia proinde, quæ ad Algebram ſpectant, ea methodo tradere, difficultatumque moles omnes explanare conabor, vt quiuis mediocriter tantum in Arithmeticæ præceptis verſatus, quam fieri poſſit, nimirum in ea addiſcēda laboris experiatur. In quo tamen præſtando, ſicut diligentiam non patiar deſiderari meam, ita eorum à me opinionem alienam puto, ſi qui ſint, qui vſquequaque perfectam & numeris omnibus ahſolutam Algebræ tractationem à me requirant.

NON adeo me amo, vt me tantopere cæteris omnibus, qui ad hanc diem eam deſcripſerunt, præferendum putem; vt quod ipſi non effecerunt, præſtare me poſſe profitear.

ÆQVATIONES eſſe plurimas inter tres pluresve numeros diuerſis nominibus appellatos, probe ſcio, quæ in quæſtionibus Algebræ beneficio diſſoluendis interdum, licet non ita frequenter, incidunt, nec tamen ſatis adhuc compertum apud omnes eſt, qua arte ab ipſis radices ſint educendæ, quarum ego æquationum & eas, quæ adhuc cognitæ exploratæque ſunt, & eas, quæ nondum ſuis è tenebris emerſerunt, cap. 12. enume-
*Intentio authoris.* rabo. Meum igitur hoc opus eſt, ea vna cura, vt quæ inuolute alij, ego explicatius exponam, apertius, quæ illi obſcurius; proferre quæ latent, ardua explanare, facem præferre, ſingula, quo ad mea induſtria feret, dilucide & enucleate tradere atque docere. Pollremo non tam de Algebræ dignitate & exiltimatione detrahere illæ æquationes debent, ex quibus radices inuenire nondum didicimus, quam eam quæſtiones infinitæ propemodum commendare, quæ æquationibus inuentis ſoluuntur, certamque, vt ſuis locis conſtabit, ſcientiæ rationem habent. Verum qui ſuos labores non omnino otioſos in Algebræ ſcientia poſuiſſe optat, eum in vulgaribus Arithmeticæ præceptis ſe ſe aliquando exercuiſſe oportebit, nec eorum omnino rudem ad huius cognitionem inſtitutionemque accedere, cuiuſmodi illa ſunt quæ quaſi fundamenta ſunt tyronibus iacienda; Additio numerorum, ſubtractio, multiplicatio, atque diuiſio, non integrorum modo, ſed & fractorum His adde proportionum regulam, quæ à pleriſque regula trium nuncupatur; atque his ſimilia non pauca: Proportiones præterea, progreſſioneſque numerorum tum Arithmeticas, tum Geometricas calluiſſe debet. Tertio noſſe debet radicum omnium extractiones ex quocunque numero, qui proponatur, ſiue integer is fuerit, ſiue fractus. Demum & Geometria, & diſciplinis alijs excultum, nec leuiter expolitum eſſe præſtabit.

*Algorithmus quid.* STVDII præterea plurimum in Algorithmo addiſcendo collocandum erit, quem habet hæc facultas à cæteris peculiarem. Algorithmum vero dicimus tractationem, quæ additionem, ſubtractionem, & alias operationes

operationes numerorum complectitur. Eum inquam Algorithmum numerorum quorundam, quos vulgari Arithmetica explicari in vsu non est. Eorum porro numerorum triplex omnino genus numeratur. Primum quidem eorum, quos Cossicos plerique; vel Denominatos dixerunt, ijque in aliqua Geometrica progressione quæ ab vnitate ducit initium, reperiuntur; cuiusmodi sunt Radices, Quadrati, Cubi, & quæ eiusdem generis sunt non pauca, de quibus mox dicere instituam. In altero genere insunt numeri, qui radicales appellantur, vt radix quadrata, cubica, & huiusmodi cuiuscunque numeri, siue is eam habeat radicem, siue non habeat. atque de his disseremus, cũ ad caput 16 peruenerimus. Tertij deniq; generis sunt numeri radicales numerorũ eius generis, quod primo loco positum est à nobis, quales sunt radix quadrata, vel cubica, & similes, quotcunq; quadratorum, cuborum, vel radicum, &c. de quibus postremus nobis erit labor. Et quoniam eorum numerorũ Algorithmus, quos in secundo ac tertio genere collocauimus, difficultatem non minimam, & obscuritatem habet non contemnendam, de industria cum in finem regulæ Algebræ reijci placuit. Nam etiamsi quæstionum satis multæ cum Geometricarum, tum Arithmeticarum per hanc Algebræ regulam enodari ac solui nequeant sine illo Algorithmo; nulla tamen inter Algebræ scientiam, & eum Algorithmum cognatio tanta est, vt hæc ab illo, tanquam nexu quodam adhæreſcant sibi, aut nunquam diuelli queat, aut aliquo modo ab eodem pendere dicenda sit. Primum igitur Algorithmus Cossicorum, siue eorum, qui Denominati dicuntur, numerorum explicandus nobis est, qui ad hanc scientiam penitus cognoscendam omnino censetur necessarius. Tum ipsam Algebræ regulam, eaque omnia persequemur, quæ ad eiusdem regulæ plenam cognitionem faciunt; quibus absolutis, à cap 16. initium facientes, totoque 26. numerorum radicalium, & absolutorum & Denominatorum, siue Cossicorum Algorithmum trademus. Extremas partes Ænigmata agent, quibus propositis, & tandem explicatis, planior ac perfectior totius regulæ Algebræ sensus fiet, & fructus vberior.

*Tria genera numerorum in Algebra vsitatorũ.*

---

## *DE NVMERIS COSSICIS, SIVE DEnominatis.*

## CAPVT II.

NVMERI Cossici, siue Denominati sunt omnes numeri cuiuscunque progressionis Geometricæ ab vnitate incipientis. Proposita namque progressione qualibet Geometrica ab vnitate initium sumente, Primus terminus, id est, vnitas numerum absolutum, & simplicem repræsentat: Secundus vero terminus vnitatem seqoens vocatur radix omnium sequentium, cum ex eius multiplicatione in seipsum procreetur tertius, & ex multiplicatione eiusdem secundi termini in tertium producatur quartus, & sic deinceps, vt in scholio propos. 10. lib. 8. Eucl. demonstrauimus. Tertius deinde terminus, quia producitur, vt dictum est, ex secundo in seipsum, dicitur Quadratus, seu Census, vel Zensus, vt nonnulli huius artis periti volunt. Quartus postea terminus appellatur Cubus, quoniam fit ex multiplicatione radicis, hoc est, secundi termini in suum quadratum nimirum in tertium terminum, vt diximus. Atque ita deinceps omnes numeri progressionis Geometricæ, cuius initium est vnitas, denominantur, habita ratione multiplicationis radicis in sequentes terminos.

*Numeri Cossici qui sint.*

QVIA vero varie huiuscemodi numeri à varijs auctoribus denominantur, delegimus nos ex omnibus modum quendam denomioandi illos numeros facilem, & valde accommodatum, vt denominationes has quantumlibet extendere possimus, & appositis characteribus designare; appellantes nimirum numeros progressionis Geometricæ, numeros Cossicos. qua quidem in re nonnullos scriptores recentiores secuti sumus. Parum enim refert, si hoc nomine, vel alio appellentur numeri progressionis Geometricæ, dummodo res ipsa intelligatur. Denominationes autem hæ exprimuntur sequentibus characteribus.

*Cur numeros progressionis Geometricæ vocamus Cossicos.*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N. | ℞. | ℨ. ℭ. | ℨℨ. | ß. ℨℭ. | Bß. | ℨℨℨ. | ℭℭ | |
| ℨß. | Cß. | ℨℨℭ. | Dß. | ℨBß | ℭß. | ℨℨℨℨ. | Eß. | &c. |

PRIMVS character N. appellationem habet numeri absoluti & simplicis, ita vt numerus, cui appositus fuerit, pro absoluto & simplici habeatur vt 4 N. nihil aliud significant, quam quatuor vnitates simplices ac absolutas: Plerunque tamen character hic vel signum N, non solet numeris apponi, quando pro absolutis habendi sunt. Itaque siue numerus aliquis gerat hoc signum N, siue eo careat, accipiendus est pro numero absoluto.

*Explicatio characterũ Cossicorum.*

Secundus character ℞. habet appellationem Radicis, vel Rei, ita vt numerus, cui appositus sit, à radicibus denominetur. vt 4 ℞. significant quatuor radices, vel res. Vnde si progressio Geometrica habeat 2. in secundo loco, erunt 4 ℞. octo vnitates: si vero 3. duodecim vnitates. & sic de cæteris.

Tertius charecter ℨ repræsentat quadratum, quem censum nonnulli dicunt. vt 4 ℨ. sunt quatuor quadrati vel zensi. Itaque si tertius numerus progressionis Geometricæ sit 4 erunt 4 ℨ. decem & sex vnitates: Si autem 9. triginta sex vnitates. &c.

Quartus character ℭ. denotat cubum. vt 4 ℭ. significant quatuor cubos; ita vt si cubus fuerit 8. 4 ℭ. sint 32. vnitates: si 27. 4 ℭ. sint 108. vnitates &c.

Idem dicendum est de reliquis characteribus, quorũ significationes hic sunt subscriptæ, vna cum appella-

tionibus, & signis, quibus alij scriptores vtuntur. Quemadmodum enim appellationes numerorum Cossicorum apud scriptores varios variæ sunt, vt diximus, ita etiam signa seu characteres, quibus ipsas exprimunt, ijdem non sunt.

N. Numerus simplex, & absolutus.

𝔯. Radix. Italis Res, vel Cosa. Vnde hoc modo ab ipsis radix exprimitur. 1 co. 4 co 20. co &c. Alij vero ita designant. 1 ℞. 100 ℞. &c.

ℨ. Zensus, siue Quadratus. Alij quadratum exprimunt hoc charactere q vt 1 q. 30 q. 8 q. &c. Itali sic notant, ce. vt 1. ce 4. ce 20. ce. &c.

ℭ. Cubus. Alij artifices ita depingunt. cu. vt 7 cu. 8 cu. 200. cu. &c.

ℨℨ. Zenzizensus, siue Quadratiquadratus. Nonnulli ita signant. qq. vt 3 qq. 10 qq. &c. Itali vero sic. ce. ce. vt 4 ce. ce. 9. ce. ce. 12 ce. ce. &c.

ſ. Surdesolidus. Hunc alij dicunt Sursolidum, vel Supersolidum. Italis dicitur Relatum primum. Vnde ita solent exprimere. Rel. P. vt 11 Rel. P. 20 Rel. P. &c.

ℨℭ. Zensicubus, seu Quadratus cubi. vel Cubizensus. Quadraticubus. Cubus quadrati. Cubiquadratus. Alij hoc charactere vtuntur. qℭ. Posset quoque hic numerus inuersis notis signari. vt ℭℨ ℭq. Itali hoc modo signant. ce. cu. vel cu. ce.

Bſ. Bsurdesolidus. Secundum quosdam Bisurdesolidus, vel Sursolidus, aut Supersolidus secundus. Apud Italos vocatur Relatum secundum. vnde ita depingunt. Rel. 2.

ℨℨℨ. Zensizenzensus, seu Quadratus quadratiquadrati. Quem ita nonnulli denotant. qqq. Itali vero sic. ce. ce. ce.

Cℭ. Cubicubus, seu Cubus cubi. qui ita à quibusdam pingitur. ℭℭ. Ab Italis autem sic. cu. cu.

ℨſ. Zensurdesolidus, seu quadratus Surdesolidi, vel Surdesolidus quadrati. Hunc ita nonnulli designat. qſ. Itali vero, quoniam eum vocant censum Relati primi, hoc modo notant. ce. Rel. P.

Cſ. Csurdesolidus. Secundum alios Tersurdesolidus, vel Supersolidus tertius. Italis dicitur Relatum tertium, & ita pingitur. Rel. 3.

Eodem modo proportione quadam reliqua signa, siue characteres Cossici explicari poterunt, qui quidem in infinitum progrediuntur, vt mox dicemus.

*Quando omnes naturali numerorum numeros Cossicos progressionis Geometricæ exponat.*

VT autem cognoscamus, quidnam sibi velint prædictæ denominationes, & qua ratione originem ducant a terminis cuiusque progressionis Geometricæ ab vnitate initium sumentis; considerandæ sunt diligenter sequentes duæ progressiones, vna cum supradictis characteribus Cossicis in medio earum positis.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0. | 1. | 2. | 3. | 4. | 5 | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |
| N. | 𝔯. | ℨ. | ℭ. | ℨℨ. | ſ. | ℨℭ. | Bſ. | ℨℨℨ. | Cℭ. | ℨſ. |
| 1. | 2. | 4 | 8. | 16. | 32. | 64. | 128. | 256. | 512. | 1024. |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11. | 12. | 13. | 14. | 15. | 16. | 17. | &c. |
| Cſ. | ℨℨℭ. | Dſ. | ℨBſ. | ℭſ. | ℨℨℨℨ. | Eſ. | &c. |
| 2048. | 4096. | 8192. | 16384. | 32768. | 65536. | 131072. | &c. |

PRIOR progressio est naturalis numerorum series incipientium ab 0. qui exponunt & signa Cossica subscripta, & terminos posterioris progressionis, quæ Geometrica est, ab vnitate initium ducens: appellanturque numeri ordinis superioris exponentes terminorum progressionis Geometricæ, & signorum Cossicorum. Hæc autem expositio in hoc consistit. Prima figura 0. habens sub se N, & 1. indicat numerum simplicem & absolutum ex vnitatibus compositum, & ob id nullo exponente insignitur. quamuis improprie hæc figura 0, dici possit Exponens numeri absoluti. Secundus terminus 1. supra 2. & 𝔯 ostendit numerum secundum progressionis Geometricæ esse primam denominationem in numeris Cossicis, appellarique Radicem. Tertius deinde terminus 2. manifestat, tertium numerum Geometricæ progressionis esse secundam denominationem vocarique Zensum, siue Quadratum Sic quoque 6. demonstrat, sextam denominationem esse numerum Zensicubum, & sic de cæteris.

*Quot proportiones inter vnitatē & quemlibet numerū progressionis Geometricæ intercipiantur.*

DEINDE ijdem numeri exponentes progressionis naturalis numerorum docent, quot proportiones progressionis Geometricæ interijciantur inter quemlibet numerum eiusdem Geometricæ progressionis, atque vnitatem. Vt 1 supra 𝔯. & 2. significat, inter 2. siue radicem progressionis Geometricæ, atque vnitatem contineri vnicam proportionem 2. ad 1. At 2. supra ℨ. & 4 indicant, inter 4. siue ℨ. quadratumve, atque vnitatem comprehendi duas proportiones 4. ad 2. & 2. ad 1. Item 3. supra ℭ, & 8. monet, inter 8. siue ℭ, & vnitatem cadere tres proportiones 8. ad 4 & 4, ad 2. & 2 ad 1. & sic de cæteris, vt 6. supra ℨℭ. & 64. monstrat, inter 64 siue ℨℭ. atque vnitatem intercipi sex proportiones 64. ad 32. & 32. ad 16 & 16. ad 8. & 8. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1.

*Cuius characteris exponens gignitur ex multiplicatione ... & ex diuisione ... quotientium exponentium.*

PRÆTEREA quilibet duo exponentes numeri inter se multiplicati producunt exponentem characteris Cossici, qui ex characteribus assumptorum exponentium componitur. Vt ductis 2. in 3. fit 6. exponens characteris ℨℭ. qui ex ℨ & ℭ componitur. Item ex 3. in 5. fit exponens 15. characteris ℭſ. ex ℭ, & ſ. compositi, &c. Sic etiam diuiso quouis numero exponente maiore per minorem quemcunque, indicabit Quotiens, si integer numerus est, exponentem characteris Cossici, qui relinquitur, si ex charactere numeri exponentis diuisi, tollatur character numeri exponentis, per quem facta est diuisio. Vt si 6. exponens characteris ℨℭ. diuidatur per 2. exponentem characteris ℨ. fit quotiens 3. exponens

characte-

characteris ℭ. qui relinquitur, si ex charactere ℨℭ, exponentis 6. auferatur character ℨ. exponentis 2. Item si numerus 15. exponens characteris ℭß. diuidatur per 5. exponentem characteris ß. fit Quotiens 3. exponens characteris ℭ. qui relinquitur, si ex ℭß. tollatur ß. &c.

RVRSVS hæc figura 2. posita supra 4. & ℨ. docet, quadratum, seu secundam denominationem produci ex multiplicatione radicis bis positæ. Nam si radix 2. ponatur bis hoc modo 2. 2. & fiat multiplicatio 2. in 2. procreabitur Quadratus, seu Zensus 4. Eodem pacto figura hęc 3. posita supra 8. & ℭ. significat, cubum, siue tertiam denominationem produci ex radice ter posita, & multiplicata. Nam si radix 2. ter ponatur, vt hic, 2. 2. 2. fiatque multiplicatio 2. in 2. & producti numeri in 2. exurget cubus 8. Sic quoque figura 5 monstrat, numerum Surdesolidum procreari ex multiplicatione radicis quinquies positæ, vt hic 2. 2. 2. 2. 2. Eademque est ratio de omnibus alijs.

EX his facile definientur omnes numeri Cossici. Si enim petatur, quid sit v. g. numerus Bsurdesolidus; dicemus eum esse numerum, qui ex aliquo numero septies posito, & multiplicato gignitur. Vt 128. nascitur ex multiplicatione huius radicis 2. septies positæ in hunc modum, 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. Similiter Zensizensus erit numerus, quem numerus aliquis quater positus sua multiplicatione producit, &c. Semper autem numerus, qui aliquoties positus multiplicatione sua numerum aliquem procreat, dicitur radix producti numeri. Vt quoniam 2. positus decies hoc modo, 2. 2 2. 2. 2. 2 2. 2. 2. 2. & multiplicatus facit hunc numerum 1024. qui est ℨß. idcirco 2. dicitur radix Zensurdesolida huius numeri 1024. Idemque de aliis dicendum est. *Definitio vniuscuiusque numeri Cossici.*

VIDES igitur, quam apposite naturalis progressio numerorum ab o. incipientium, & supra progressionem Geometricam ab vnitate cœptam posita, dicatur exponere terminos progressionis Geometricæ.

CÆTERVM non solum ex multiplicatione radicis aliquoties positę producuntur numeri progressionis Geometricę, vt exposuimus, verum etiam ex multiplicatione numerorum aliorum inter se, vt signa eorum Cossica demonstrant. Vt licet hic numerus Zensurdesolidus 1024. gignatur ex radice decies posita, hoc modo, 2. 2 2. 2. 2. 2. 2 2. 2. 2. vt eius exponens 10. indicat: tamen quia eius signum Cossicum ℨß constat ex his duobus signis Cossicis ℨ. & ß. quorum exponentes sunt 2. & 5. idcirco si eadem radix 2 bis ponatur, hoc modo, 2. 2. propter 2. exponentem signi ℨ. & multiplicetur, vt producatur 4. & hic productus quinquies positus, hoc modo, 4. 4. 4. 4. 4. ob 5 exponentem signi ß. multiplicetur, procreabitur idem numerus 1024. Eodem modo si radix 2. quinquies ponatur, propter signum ß. atque ita multiplicetur, & productus numerus 32. ponatur bis, propter signum ℨ. idem numerus gignetur. Nam radix ita multiplicata 2. 2 2. 2. 2. facit 32. hic autem numerus ita multiplicatus 32 32. procreat 1024. atque ita de reliquis dicendum est, si eorum signa Cossica ex pluribus signis Cossicis componantur.

EST quoque in superioribus progressionibus dignum consideratione, quod additio numerorum progressionis Arithmeticę respondet multiplicationi numerorum progressionis Geometricæ; & subtractio diuisioni. Sicut enim exempli gratia, 2. & 5. faciunt 7. si simul addantur, ita quoque ℨ. & ß. quorum 2 & 5. sunt exponentes, nempe 4. & 32. inter se multiplicati producunt 128 id est, Bß. cuius exponens est 7 Item sicut 3 & 9. simul faciunt 12. ita ℭ. & Cℭ. nimirum 8. & 512. quorum exponentes sunt 3. & 9. inter se multiplicati gignunt 4096. hoc est, ℨℨℭ. cuius exponens est 12. atque eodem modo de reliquis dicendum est. *Additio & [illegible] metricæ.*

RVRSVS quemadmodum subtrahendo 5. à 7 remanent 2. ita diuidendo Bß. nempe 128. cuius exponens est 7. per ß. hoc est, per 32. cuius exponens est 5. prodit numerus 4. nempe ℨ. cuius exponens est 2. Similiter sicut subtrahendo 3 ex 12. relinquuntur 9. ita diuidendo ℨℨℭ. hoc est, 4096. cuius exponens est 12. per ℭ. id est, per 8. cuius exponens est 3 producitur ℭℭ nempe 512. cuius exponens est 9. & sic de cæteris. Demonstrationem huius rei afferemus in Multiplicatione, & Diuisione numerorum Cossicorum.

QVOD autem dictum est hactenus de progressione Geometrica duplæ proportionis, quæ ab vnitate incipit, idem intelligendum est in quauis alia progressione Geometrica, cuius initium vnitas est: cuiusmodi sunt verbi gratia duæ sequentes progressiones Geometricæ, quarum prior continet proportiones quadruplas, posterior autem septuplas complectitur.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0. | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8 | &c. |
| N. | ℞. | ℨ. | ℭ. | ℨℨ. | ß. | ℨℭ | Bß. | ℨℨℨ. | &c. |
| 1. | 4. | 16. | 64. | 256. | 1024. | 4096. | 16384. | 65536. | &c. |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0. | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | &c. |
| N. | ℞. | ℨ. | ℭ. | ℨℨ. | ß. | ℨℭ. | Bß. | &c. |
| 1. | 7. | 49. | 343. | 2401. | 16807. | 117649. | 823543. | &c. |

Omnia namque quæ dicta sunt, ad has duas progressiones, & ad omnes alias transferri facile possunt.

SVPEREST, vt doceamus, quanam ratione omnes numeri propositæ cuiuscunque progressionis Geometricæ ab vnitate incipientis denominandi sint, aut (quod idem est) quænam signa Cossica dictis numeris tribuenda sint, & ascribenda. Quod quidem facile præstabimus, si prius denominemus numeros, quorum exponentes sunt numeri primi, cuiusmodi sunt sequentes. *Quomodo omnes numeri progressionis Geometricæ sint denominandi.*

2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37. 41. 43. 47. 53. 59. 61. &c.

Horum autem characteres, siue signa, quæ ipsi exponunt, hęc sunt.

ℨ. ℭ. ß. Bß. Cß. Dß. Eß. Fß. Gß. Hß. Iß. Kß. Lß. Mß. Nß. Oß. Pß Qß. &c.

Cum enim tertius numerus ab vnitate in progressione quauis Geometrica sit quadratus vt demonstratur propos. 8 lib. 9. Euclid. erit eius signum ℨ. cuius exponens 2. Rursus quia quartus numerus ab vnitate est Cubus, vt constat ex eadem propos. erit eius nota ℭ, & exponens 3. Deinde quia sextus ab vnitate numerus, quem exponit numerus primus 5 neque quadratus est, neque cubus, nisi quando secundus numerus ab vnitate quadratus est, vel cubus, vt ex propos. 10. lib. 9 Euclid. liquido constat, tribuerunt ei scriptores hoc signum ß. ita vt

Surdesolidus appellatus sit. Quoniam vero idem in reliquis numeris, quorum exponentes sunt numeri primi, contingit, ita vt neque quadrati sint, neque cubi, primo ab vnitate non existente quadrato, vel cubo, vt ex eadem propos. perspicuum est, appellati sunt quoque illi numeri progressionis Geometricæ, qui exponentes habent numeros primos, Surdesolidi, ita vt is, quem exponit 7. dicatur secundus Surdesolidus, qui vero exponitur ab 11. Tertius Surdesolidus, & sic de cæteris. Sed quia, si secundus Surdesolidus ita signetur, 2ß. & tertius sic, 3ß. &c. facile notæ Arithmeticæ huic signo ß. appositæ alios numeros confundere & perturbare possunt; visum est artificibus loco notarum Arithmeticarum asciscere literas Alphabeti, denominareque secundum ß. Bß. à secunda litera, & tertium Cß. à tertia litera, &c. Hoc igitur modo formantur signa & characteres numerorum Cossicorum, quorum exponentes sunt numeri primi, vt hæc formula indicat.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2. | 3. | 5. | 7. | 11. | 13. | 17. | 19. | 23. | 29. | 31. | 37. | &c. |
| ℨ. | ℭ. | ß. | Bß. | Cß. | Dß. | Eß. | Fß. | Gß. | Hß. | Iß. | Kß. | &c. |

EX his inueniemus characteres cæterorum numerorum Cossicorum, quorum exponentes non sunt numeri primi, sed compositi, hoc modo. Resoluatur numerus exponens compositus, cuius denominatio, & character desideratur, in suas partes aliquotas incompositas, quæ inter se ordine multiplicatæ ipsum constituant, atque producant. quod in hunc modum fiet.

*Numerum compositũ in suas partes incompositas resoluere, quæ ipsum producant.*

NVMERVS compositus datus diuidatur per minimum numerum primum, per quem diuidi potest: Similiter quotiens, si fuerit numerus compositus: Rursus hic quotiens, si fuerit compositus, per numerum primum minimum, qui eum numeret, diuidatur: atque ita deinceps continue fiat diuisio, donec occurrat quotiens, qui sit numerus primus, nullam videlicet habens partem aliquotam. Nam si omnes diuisores eiusmodi, etiamsi aliqui sæpius repetantur, vna cum vltimo quotiente ordine ponantur, & inter se multiplicentur, producetur præcise datus numerus compositus: atque ipsi diuisores, vna cum vltimo quotiente sunt partes incompositæ datum numerum compositum per multiplicationem constituentes. Vt si numerus compositus datus sit 924. Primo diuido eum, quoniam par est, per 2. tanquam per eius partem incompositam minimam, inuenioque quotientem 462. Reseruo autem 2. Rursus quotientem 462. quia par est, diuido per 2. efficioque quotientem 231. & reseruo iterum 2. Deinde quotientem 231. quia impar est, diuido per 3. tanquam per minimum numerum primum, reperioque quotientem 77. (quod si aliquid in diuisione relictum fuisset, expertus fuissem diuisionem per 5. 7. & alios numeros primos, donec nihil fuisset residuum. Et si nullum talem diuisorem, qui nihil relinquat, inuenirem, tunc primi duo diuisores 2. 2. & vltimus quotiens essent partes incompositæ datum numerum restituentes, & nulla alia dari posset, præter vnitatem) Reseruo igitur 3. Et rursus diuido 77. per 3. sed quoniam aliquid superest in diuisione, non reseruo 3. sed eundem quotientem 77. partior per 5. sed quia aliquid superest in diuisione, diuido eundem per 7. inuenioq; quotientem 11. numerum primum. Sunt ergo partes incompositæ 2. 2. 3. 7. 11. numerum datum 924. sua multiplicatione restituentes.

DEINDE omnibus partibus aliquotis incompositis inuentis characteres debiti subscribantur. Hac enim ratione prosiliet character integer compositus integri numeri exponentis. Exemplum. Inueniendum sit signum Cossicum numeri trigesimi primi Cossici, cuius exponens est numerus hic compositus 30. Quotus enim numerus Cossicus est ab vnitate, tot vnitates, minus vna, continet eius exponens, vt ex antedictis progressionibus apparere potest. Quoniam igitur partes ipsius aliquotæ incompositæ sua multiplicatione ipsum procreantes sunt 2. 3. 5. quarũ signa sunt ℨ. ℭ. ß. idcirco numerus dictus trigesimus primus hoc signo Cossico decorabitur ℨℭß. appellabiturque Zensicubisurdesolidus. Eodẽ modo exponens 24. cuius partes incompositæ sunt 2. 2. 2. 3. habebit signum Cossicum ℨℨℨℭ. Ita quoque exponens 100. cuius partes incompositæ sunt 2. 2. 5. 5. hoc signum Cossicum sortietur ℨℨßß. & sic de cæteris.

IDEM consequemur hac ratione. Accipiantur duo quicunque numeri, qui inter se multiplicati producunt exponentem numerum oblatum. Nam eorum signa Cossica component signum Cossicum propositi numeri exponentis. vt si exponens sit 12. numeri sua multiplicatione ipsum producentes sunt 3. & 4. quorum signa Cossica sunt ℭ & ℨℨ. Signum igitur Cossicum exponentis 12. est ℨℨℭ. Semper enim signa Cossica minora præponuntur maioribus. Eodem pacto numeri sua mutua multiplicatione producentes eundem numerum exponentem 12. sunt 2. & 6. quorum prior signum Cossicum habet ℨ. posterior vero ℨℭ. Signum ergo Cossicum numeri exponentis 12. est ℨℨℭ. vt prius. Quod si aliquando ignoretur alterius numerorum multiplicantium, vel etiam vtriusque signum Cossicum, sumendi erunt alij duo numeri ipsum producentes, vt in posteriori exemplo, si nos lateat signum Cossicum huius multiplicantis 6. accipiemus 2. & 3. qui ipsum procreant, quorum signa sunt ℨ. ℭ. Inuenitur ergo idem signum Cossicum numeri exponentis 12. ℨℨℭ. &c.

*Quem locũ progressionis Geometricæ occupet quilibet numerus Cossicus.*

IAM vero si è contrario signi cuiuslibet Cossici propositi numerus exponens quæratur; si quidem fuerit incompositum, accipiemus ex superiori progressione numerorum primorum numerum primum proposito signo debitum. vt si offeratur Cossicum hoc signum Dß. erit eius exponens 13. Si vero signum sit compositum, sumemus exponentes signis componentibus debitos, eosque inter se multiplicabimus. nam productus numerus erit exponens propositi signi Cossici, vt si detur signum Cossicum ℨℨℭ. compositum ex his tribus ℨ. ℨ. ℭ. capiemus horum exponentes 2. 2. 3. ex superiori progressione primorum numerorum, eosque inter se multiplicabimus. nam productus numerus 12. est exponens dicti signi ℨℨℭ. atque ita de cæteris dicendum est.

*Quomodo alij numeros progressionis Geometricæ nominent.*

NON est autem prætereundum, quosdam auctores hac in arte non mediocriter versatos aliter hos numeros Cossicos denominare, habita nimirum ratione multiplicationis, qua ex radice producuntur. Quoniam enim tertius numerus ab vnitate progressionis Geometricæ, quem nos Quadratum, vel Zensum diximus, producitur ex multiplicatione radicis bis positæ hoc modo, 2.2. vel 3.3. vel 4.4. vel 5.5. &c. ita vt vna tantum fiat multiplicatio; propterea numerum hoc modo genitum, id est, quadratum, appellant Primam quantitatem:

quia

quia prima est omnium, quæ ex radice nascuntur. Cubum deinde, quia gignitur ex radice ter posita, ita vt fiant duæ multiplicationes, dicunt Secundam quantitatem. Zensizensum vero eadem de causa vocant Tertiam quantitatem. & sic de cæteris intelligendum est. Sed placet nobis proprijs signis, & characteribus vti, vt clarius res ipsa percipiatur. Nostra etenim signa, & characteres à literis, ac numeris facile discernuntur, ita vt confusio nulla possit exoriri: quæ in aliorum signis, characteribusque vitari vix potest.

## *DE NVMERATIONE COSSICORUM NUMERORUM.*

## CAPVT III.

*Explicatio signorum + & —.*

FACILIS est ex dictis Numeratio numerorum Cossicorum. Quando enim soli ponuntur, vt 5℞. vel 8ʒ. vel 20ℭ. &c. exprimuntur hoc modo, quinque radices, vel 8. Zensi, siue quadrati, vel 20. cubi, &c. Quando autem coniuncti inter se proponuntur, medio hoc signo +, vel hoc —. vt 5℞ + 8ʒ. vel 8ʒ — 5℞ vel 20ℭ + 8ʒ — 5. habenda est maxima ratio horum signorum + . —. quorum illud dicitur signum additorum, significatque plus, vel additionem; hoc vero appellatur signum subtractorum, denotatque minus, vel diminutionem, aut subtractionem. Hinc factum est, vt numeri illi, quibus interponitur signum +, dicti sint compositi. Quibus vero interijcitur signum —. nominati sint Diminuti. Quibus denique vtrumq; signum interponitur, appellati sint mixti. licet omnes dici possint compositi. Itaq; compositus hic. 5℞ + 8ʒ. effertur hoc modo. 5. radices, plus 8. zensi, Hic vero Diminutus 8ʒ — 5℞. hoc modo 8. zensi, minus 5 radices Mixtus vero iste, 20ℭ + 8ʒ — 5. hoc pacto. 20. cubi, plus 8. zensi, minus 5. vnitates. Nam, vt dictũ est, numerus, qui post se non habet characterem aliquem Cossicum, significat numerum absolutum ex vnitatibus compositum.

*Numeri Cossici cõpositi, Diminuti, & mixti qui.*

REFERVNTVR autem, vt patet, hæc signa + . —. ad numeros, qui ea sequuntur, nunquam autem ad præcedentes. Item numerus, quem neutrum horum signorum præcedit, intelligitur habere signum additorum +. Sensus porro numerorum compositorum, diminutorum, vel mixtorum facilis est. Nam cum dicimus 5℞ + 8ʒ. intelligimus 5. radices vna cum 8. zensis: hoc est, vnitates 42. si radix est 2. & quadratus, vel zensus 4. Sic cum dicimus 8ʒ — 5℞ intelligimus ex 8 zensis detractas esse 5. radices. vnde si radix est 2. atq; adeo zensus 4. continebit numerus propositus vnitates 2. Idem dicendum est de alijs.

QVONIAM vero in antecedenti capite characteres numerorum Cossicorum, cuiusmodi sunt ℞ ʒ. ℭ. &c. appellauimus interdum etiam signa Cossica; vt vitemus omnem confusionem, appellabimus in sequentibus has notas ℞. ʒ. ℭ. &c. characteres, has vero + . —. signa.

PLERIQVE auctores pro signo + ponunt literam P, vt significet plus: pro signo vero — ponunt literam M, vt significet minus. Sed placet nobis vti nostris signis, vt à literis distinguantur, ne confusio oriatur.

*Radices surdæ quo pacto signentur.*

PRÆTEREA inter recentiores non pauci radices surdas, vt vocant, vel irrationales, quæ videlicet numeris exprimi nequeunt, notant hoc signo √. quod statim insequitur character Cossicus ʒ, vel ℭ, vel ʒʒ. &c. prout radix illa est quadrata, Zensicaue, vel Cubica, vel Zensizensica, siue quadrati quadrata &c. V. g. radicem quadratam numeri 12. designant hoc modo. √ʒ12. cubicam hoc modo √ℭ12. & Zensizensicam hac ratione, √ʒʒ12. atq; hanc ob causam signũ hoc √ radicale appellatur. Quo signo nos etiã in sequẽtibus vtemur: quippe cum minor confusio ex eo oriatur, quam si, quod plerique faciunt, radicem quadratam ita signemus, Rq. Cubicam hoc modo. R cu. Zensizensicam hoc alio, Rqq. &c. Facile enim ex hac designatione, literæ Rq. R cu. Rqq. cum aliis literis confunduntur. Diligenter ergo hæc signa √ʒ. √ℭ. √ʒʒ. √ß. &c. addiscenda sunt, vt ea, quæ sequuntur, intelligantur, quando nimirum huiusmodi signa occurrent. Sciendum tamen, quotiescunque nominatur radix alicuius numeri, sine voce, quadrata, cubica, surdesolida, vel zensizensica, &c. vel illi numero præfigitur signum hoc √. sine charactere ʒ, ℭ, ß, ʒʒ, &c. intelligi radicem quadratam simpliciter apud scriptores. quod à nobis etiam non raro obseruabitur.

*Signum radicale quid.*

## *DE ADDITIONE ET SVBTRACTIONE NUMERORUM COSSICORUM.*

## CAPVT IV.

*Additio Cossicorum numerorũ diuersarũ denominationum.*

QVANDO numerus Cossicus additur numero Cossico alterius denominationis, vel characteris, absoluitur additio mediante hoc signo +, fitque numerus compositus. Vt hi duo numeri 6℞. & 8. simul additi faciunt 6℞ + 8. Item 6℞. & 8ℭ. faciunt 6℞ + 8ℭ. &c.

*Additio numerorũ Cossicorũ eiusdem appellationis.*

QVANDO vero addendus est numerus Cossicus alteri numero Cossico eiusdem appellationis, vel characteris, adduntur simul numeri, & summæ apponitur idem character Cossicus. Vt hi numeri 4ʒ. & 9ʒ. simul additi faciunt 13ʒ. Item 5℞. & 4℞. faciunt 9℞ &c.

*Subtractio numerorũ Cossicorum diuersarũ appellationum.*

PARI ratione, quando numerus Cossicus subtrahitur à numero Cossico alterius denominationis, absoluitur subtractio mediante hoc signo —, fitque numerus diminutus. Vt hic numerus 6℞. detractus ex 8ʒ. relinquit 8ʒ — 6℞. Item 12. ex 6.℞. relinquunt 6℞ — 12. & sic de cæteris.

*Subtractio numerorũ Cossicorum eiusdẽ denominationis.*

QVANDO vero numerus Cossicus subtrahendus est ex altero numero Cossico eiusdem characteris, subtrahitur numerus à numero, & reliquo numero idem character affigitur. Vt 4℞. ex 9℞. relinquunt 5℞. Et 9ℭ. ex 20 ℭ. relinquunt 11 ℭ. &c.

*Additio & subtractio Cossicorum numerorũ compositorum, &c.*

SED quando Cossici numeri compositi, diminuti & mixti inter se adduntur, vel alter ab altero subtrahitur, ponendus erit alter sub altero, ita vt numeri eiusdem appellationis inter se respondeant, quemadmodum in fractionibus Astronomicis fieri consueuit. Quod si in alterutro eorum non reperiatur numerus respondens alicui in altero numero, ponenda erit loco eius figura hæc nihili o. cum signo +. Quibus constitutis addendi erunt numeri eiusdem appellationis, vel alter ab altero detrahendus, & summæ vel numeri reliqui propriis in locis subscribendi, vna cum iisdem signis, +, vel —, quæ in numeris addendis, vel subtrahendis reperiuntur.

*Exempla Additionis.*

| ℞. | N. |
|---|---|
| 6 + | 8 |
| 7 + | 10. |
| 13 + | 18 |

| ʒ. | ℞. | N. |
|---|---|---|
| 7 + | 8 — | 5. |
| 3 + | 9 — | 8. |
| 10 + | 17 — | 13 |

| ℭ. | N. | ʒ. |
|---|---|---|
| 7 + | 8 — | 3 |
| 4 + | 11 — | 5 |
| 11 + | 19 — | 8 |

| ℭ. | ʒ. | ℞. | N. |
|---|---|---|---|
| 4 + | 11 + | 0 — | 6 |
| 3 + | 0 + | 8 — | 4 |
| 7 + | 11 + | 8 — | 10 |

| ß. | ʒʒ. | ℞. | N. | ʒ. |
|---|---|---|---|---|
| 7 + | 0 + | 8 — | 5 + | 4 |
| 4 + | 9 + | 6 — | 9 + | 0 |
| 11 + | 9 + | 14 — | 14 + | 4 |

| ʒ. | N. |
|---|---|
| .4 — | 8 |
| 10 — | 10 |
| 14 — | 18 |

In penultimo exemplo additus est huic numero, 7ß + 8℞ — 5 + 4ʒ. hic numerus, 4ß + 9ʒʒ + 6℞ — 9. factaque est hæc summa 11ß + 9ʒʒ + 14℞ — 14 + 4ʒ.

*Exempla Subtractionis.*

| ℭ. | ʒ | ℞. | N. |
|---|---|---|---|
| 7 + | 11 + | 8 — | 10 |
| 3 + | 0 + | 8 — | 4 |
| 4 + | 11 + | 0 — | 6 |

| ℭ. | N. | ʒ. |
|---|---|---|
| 11 + | 19 — | 8 |
| 4 + | 11 — | 5 |
| 7 + | 8 — | 3 |

| ß. | ʒʒ. | ℞. | N. | ʒ. |
|---|---|---|---|---|
| 11 + | 9 + | 14 — | 14 + | 4 |
| 7 + | 0 + | 8 — | 5 + | 4 |
| 4 + | 9 + | 6 — | 9 + | 0 |

| ʒ. | ℞. | N. |
|---|---|---|
| 10 + | 17 — | 13 |
| 7 + | 8 — | 5 |
| 3 + | 9 — | 8 |

In penultimo exemplo reliquus numerus est, 4ß + 9ʒʒ + 6℞ — 9. Reiicitur enim + o. quia neque in reliquo numero subtractionis, neque in summa additionis poni debet figura hæc o. cum sit superuacanea. Eodem modo reliquus numerus in primo exemplo erit, 4ℭ + 11ʒ — 6.

POTEST etiam fieri additio, & subtractio, si characteres Cossici scribantur post numeros, non autem supra ipsos numeros. vt secundum exemplum Additionis, ita stabit.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | ʒ | + | 8 | ℞ | — | 5 | N |
| 3 | ʒ | + | 9 | ℞ | — | 8 | N |
| 10 | ʒ | + | 17 | ℞ | — | 13 | N |

Secundum item exemplum Subtractionis ita stabit.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | ℭ | + | 19 | N | — | 8 | ʒ |
| 4 | ℭ | + | 11 | N | — | 5 | ʒ |
| 7 | ℭ | + | 8 | N | — | 3 | ʒ |

Quod etiam de multiplicatione, diuisioneque intelligendum est. Atque hic modus vt plurimum à nobis obseruabitur in hoc opere.

*Quid agendum, quãdo vnus numerus habet signũ +, & alter signum —, in additione, & subtractione.*

QVOD si in additione, vel subtractione alter numerorum habuerit signum +, alter vero —, commutatur species, seu operatio; hoc est, in Additione subtrahitur minor ex maiore, & reliquo numero tribuitur signum maioris numeri, à quo facta est subtractio, siue illud fuerit +, siue —.

In Subtractione vero adduntur simul numeri, & summæ apponitur signum superioris numeri, à quo fieri debebat detractio; quodcunque illud fuerit siue +, siue —.

Exem-

*Exempla Additionis.*

| ʒce. | ß. | ʒʒ. | ce. | 2e. | N. |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 + | 0 + | 8 + | 0 — | 4 + | 8 |
| 7 + | 5 — | 11 — | 11 + | 0 + | 0 |
| 14 + | 5 — | 3 — | 11 — | 4 + | 8 |

| ʒ. | 2e. |
|---|---|
| 6 + | 8 |
| 2 — | 10 |
| 8 + | 2 |

Si hi duo numeri 6ʒ — 82e.& 122e — 3ʒ debeāt addi, formabimus exemplum hoc modo, vt singula [illegible] respondeant.

| ʒ. | 2e. |
|---|---|
| + 6 — | 8 |
| — 3 + | 12 |
| 3 + | 4 |

Vel sic

| | |
|---|---|
| + 6ʒ — | 82e |
| — 3ʒ + | 122e |
| 3ʒ + | 42e |

[illegible]tionem vero huius operationis pulchre docent numeri absoluti. vt hic vides.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 + 5 | 8 — 5 | 8 + 4 | 8 — 4 |
| 10 — 4 | 10 + 4 | 10 — 5 | 10 + 5 |
| 18 + 1 | 18 — 1 | 18 — 1 | 18 + 1 |

Quoniam enim in primo exemplo ad 8+5. hoc est, ad 13. non adduntur integre 10. vt fiant 23. sed subdu[illegible] prius 4. Ideo fit summa 19. nempe 18 + 1. Itaque postquam addita sunt 8. & 10. factaque sunt 18. detra[illegible]da sunt 4 ex 5, vt remaneat 1, cum hoc signo +.

Eodem modo in secundo exemplo. non adduntur integre 8, sed minus 5. ad 10+4, hoc est, ad 14. pro[illegible]ercà postquam ex 8. & 10. facta sunt 18. detrahenda sunt 5. ex 4. Et quia deest vnitas, vt possit subtrahi, idcir[illegible]ponitur 1. cum signo —. Eadem ratio est in cæteris. Vbi vides in primo exemplo ex 8+5. & 10 — 4. id est, 13. & 6. effici 18+1. id est, 19. In secundo vero ex 8 — 5. & 10+4. hoc est, ex 3. & 14. fieri 18 — 1. hoc est, 17. [illegible]tertio quoque ex 8+4. & 10 — 5. hoc est ex 12. & 5. constari 18 — 1. hoc est, 17. In quarto denique ex 8 — 4. 10 + 5. id est, ex 4 & 15. confici 18+1. id est, 19.

*Exempla Subtractionis.*

| ʒce. | ß. | ʒʒ. | ce. | 2e. | N. |
|---|---|---|---|---|---|
| 14 + | 5 — | 3 — | 11 — | 4 + | 8 |
| 7 + | 0 + | 8 + | 0 — | 4 + | 8 |
| 7 + | 5 — | 11 — | 11 ± | 0 + | 0 |

| ʒ | 2e |
|---|---|
| 8 — | 2 |
| 6 + | 8 |
| 2 — | 10 |

[illegible] priori exemplo, quādo detrahuntur — 42e. ex — 42e. potest signari reliqua figura 0, vel signo +, vel signo [illegible]. Nihil enim interest vtrum illorum ponatur, quando reliquus numerus est 0. Immo totus reliquus nume[illegible] ita scribendus erit. 7ʒce + 5ß — 11ʒʒ — 11ce.

Ratio quoque huiusce operationis perspicua est in numeris absolutis, vt ex sequentibus exemplis ap[illegible]aret.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 18 + 5 | 18 + 4 | 18 — 5 | 18 — 4 |
| 8 — 4 | 8 — 5 | 8 + 4 | 8 + 5 |
| 10 + 9 | 10 + 9 | 10 — 9 | 10 — 9 |

[illegible]oniam enim in primo exemplo non integre subducuntur 8. ex 18+5. hoc est ex 23: sed minus 4. propterea [illegible]ductis 8 ex 18. vt relinquantur 10. addenda sunt rursum 4. ad 5. Eademque est ratio in secundo exemplo. [illegible] tertio vero exemplo, cum 8. deducantur ex 18, ex quibus iam ablata sunt 5. restituenda sunt 5. ipsis 4. & sum[illegible] per signum — notanda. Quod etiam fit in quarto exemplo. Vbi vides in primo exemplo, si ex 18+5. hoc [illegible] ex 23. detrahantur 8 — 4. hoc est, 4. relinqui 10+9. id est, 19 In secundo quoque, si ex 18 + 4. hoc est, ex [illegible] detrahantur 8 — 5. id est, 3. relinqui 10+9. hoc est, 19. In tertio vero, si ex 18 — 5. id est, ex 13. detrahantur [illegible] 4. id est, 12. remanere 10 — 9. id est, 1. In quarto denique, si ex 18 — 4. hoc est, ex 14. demantur 8 + 5. id [illegible]3. remanere quoque 10 — 9. hoc est, 1.

QVOD si quando contingat, vt idem signum + vel — reperiatur tam in numero subtrahendo, [illegible] in eo, à quo fit subtractio, sed subtrahendus maior sit; subtrahendus erit præpostero ordine superior ab [illegible]feriori, sed numero reliquo dandum signum contrarium; ita vt ex signo +, fiat —, & ex — fiat +. Vt duo [illegible]empla, quæ sequuntur, indicant.

*Quid agendũ in subtractione, quando vterque numerus habet signum + vel — & numeri præpostere ponuntur.*

| ʒ. | 2e. | N. |
|---|---|---|
| 9 + | 4 — | 5 |
| 4 + | 7 — | 8 |
| 5 — | 3 + | 3 |

| ce. | ʒ. | N. |
|---|---|---|
| 6 — | 5 + | 3 |
| 7 — | 9 + | 10 |
| — 1 + | 4 — | 7 |

In po-

In posteriori exemplo, quoniam 6ℭ. & 7ℭ. intelliguntur habere signum +, idcirco reliquus numerus adeptus est signum —. Vnde ita scribendus erit, 4ʒ — 1ℭ — 7. Non enim recte primus numerus afficitur signo —. Huius etiam operationis veritas perspicua est in duobus hisce exemplis numerorum absolutorum. Vbi vides, si in priori exemplo

$$\begin{array}{l} 9 + 4 - 5 \\ \underline{4 + 7 - 8} \\ 5 - 3 + 3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 6 - 5 + 3 \\ \underline{7 - 9 + 10} \\ -1 + 4 - 7 \end{array}$$

ex 9 + 4 — 5. id est, ex 8. subtrahantur 4 + 7 — 8, id est, 3. relinqui 5 — 3 + 3. nimirum 5. In posteriori vero, si ex 6 — 5 + 3. subducantur 7 — 9 + 10. hoc est, 8. ex 4. remanere — 1 + 4 — 7. hoc est, — 4. quia nimirum superiori numero desunt 4. vnitates, vt inferior subtrahi possit.

CÆTERVM omnia præcepta hactenus tradita de additione, & subtractione, quod ad signa + & — spectat, comprehenduntur facile his duabus regulis ad memoriam iuuandam.

I.

*Duæ regulæ obseruandæ in additione, & subtractione.*

*Eadem signa idem signum ponunt, nisi in subtractione, quando numeri præpostere ponuntur. Tunc enim subtrahitur superior ab inferiore, & ex +. fit —, & ex — fit +.*

II.

*Diuersa signa mutant speciem operationis; Et in additione ponitur signum maioris numeri; In subtractione vero superioris, a quo fit subtractio, siue maior is sit, siue minor, aut æqualis.* Quæ quidem regulæ, intellectis præceptis traditis, difficiles non sunt.

*Probatio additionis & subtractionis.*

SVPEREST, vt doceamus, quo modo instituenda sit probatio, siue examen Additionis, & Subtractionis. Duobus igitur modis comprobari potest, an recte ne in Additione, vel Subtractione operatum sit. Primum enim probari potest Additio per subtractionem, & subtractio per Additionem; quemadmodum in absolutis numeris solet fieri.

Secundo construatur tabula cum aliquibus progressionibus Geometricis ab vnitate incipientibus, vt hic cernis.

| N | 𝔯 | ʒ | ℭ | ʒʒ | ß | ʒℭ | Bß | ʒʒʒ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | [illegible] | 64 | 128 | 256 |
| 1 | 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | 2187 | 6561 |
| 1 | 4 | 16 | 64 | 256 | 1024 | 4096 | 16384 | 65536 |
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{1}{128}$ | $\frac{1}{256}$ |

Deinde resoluantur numeri Cossici addendi, iuxta aliquam harum progressionum, in numeros absolutos, iique simul addantur, vel vnus ab altero detrahatur, ratione signi +, vel —. Post hæc eodem modo resoluantur numeri Cossici summæ collectæ. Si enim recte facta est additio, erunt numeri summæ collectæ resoluti simul æquales numeris addendis resolutis simul. Vt in hoc exemplo. 6ℭ. (si probatio instituatur per progressionem, cuius radix est 2.) faciunt 48 & 4ʒ faciunt 16. Iungantur simul 48. & 16. propter signum +. fiunt 64. Item 4ℭ. faciunt 32. addantur ad 64. propter signum + (semper enim numerus nullo signo notatus, intelligitur insignitus hoc signo +, vt dictum est.) fiunt 96. Denique 8ʒ faciunt 32. quæ ablata ex 96, ob signum —, relinquunt 64. Videiam, an 10ℭ — 4ʒ, resoluti faciant quoque 64. Perspicuum autem est, 10ℭ. facere 80, à quibus si deducantur 4ʒ, hoc est, 16. propter signum —, relinqui 64 &c.

| ℭ. | | ʒ. |
|---|---|---|
| 6 | + | 4 |
| 4 | — | 8 |
| 10 | — | 4 |

NON secus Subtractio comprobabitur, si eius numeri Cossici in absolutos numeros commutentur. Nam numeri subtracti, & reliqui simul æquales debent esse numeris, à quibus facta est subtractio, &c. Vt in hoc proposito exemplo, si probationem instituamus iuxta progressionem, cuius radix est 3. 10ℭ. faciunt 270, à quibus, si deducantur 4ʒ, id est, 36. propter signum —, remanent 234.

| ℭ. | | ʒ. |
|---|---|---|
| 10 | — | 4 |
| 6 | + | 4 |
| 4 | — | 8 |

Satis autem constat 6ℭ + 4ʒ. & 4ℭ — 8ʒ. resolutos ac simul additos facere quoque 234.

Eodem modo si 6ℭ + 4ʒ resoluti detrahantur ex 10ℭ — 4ʒ. resolutis, relinquentur 4ℭ — 8ʒ. Vel certe si 4ℭ — 8ʒ. resoluti deducantur ex 10ℭ — 4ʒ. remanebunt 6ℭ + 4ʒ. resoluti.

Idem exemplum examinabitur per progressionem, cuius radix est $\frac{1}{2}$. licet aliquanto laboriosius, hoc modo. 10ℭ. faciunt $\frac{10}{8}$. à quibus si tollantur 4ʒ. nimirum $\frac{4}{4}$ hoc est, $\frac{8}{8}$, remanent $\frac{2}{8}$. Necesse igitur est, vt 6ℭ + 4ʒ. resoluti, & detracti ex $\frac{2}{8}$. relinquant 4ℭ — 8ʒ. resolutos. Et quia 6ℭ. faciunt $\frac{6}{8}$. & 4ʒ. efficiunt $\frac{4}{4}$. id est, $\frac{8}{8}$. quæ cum $\frac{6}{8}$ faciunt $\frac{14}{8}$. quæ ex $\frac{2}{8}$. subtrahendæ sunt. At quoniam numeri præpostere ponuntur, subtrahendæ sunt $\frac{2}{8}$. ex $\frac{14}{8}$. vt remaneant — $\frac{12}{8}$. iuxta primam regulam. Atque tantundem debent conficere 4ℭ — 8ʒ. Sunt autem 4ℭ. $\frac{4}{8}$. à quibus vt auferãtur 8ʒ. id est, $\frac{8}{4}$. vel $\frac{16}{8}$. auferendæ sunt $\frac{4}{8}$. ex $\frac{16}{8}$. propterea quod numeri sunt positi præpostere, vt remaneant — $\frac{12}{8}$. iuxta legem primæ regulæ. quod est propositum.

# DE MVLTIPLICATIONE & Diuisione numerorum Coßicorum.

## CAPVT V.

CVM numerus Cossicus per numerum absolutum multiplicatur, aut diuiditur, producitur numerus (facta multiplicatione, aut diuisione, vt in numeris absolutis) eiusdem denominationis Cossicæ. Vt multiplicatis 4℞ vel 8ʒ, per 3. proueniunt 12℞. vel 24ʒ. &c. Item diuisis 12℞ vel 24ʒ, per 3. producuntur 4℞. vel 8ʒ. &c.

*Multipl. & Diuisio numeri Cossici per absolutum.*

QVANDO vero numerus Cossicus per numerum Cossicum multiplicatur, vel diuiditur, producitur numerus (facta multiplicatione, aut diuisione, vt in numeris absolutis) alterius denominationis Cossicæ, vt autem sciatur, quænam denominatio procreetur, pulchre id commõstrat progressio quælibet Geometrica ab vnitate incipiens, vna cum numeris exponentibus, de quibus in cap. 2. dictum est, & hic apparet.

*Multipl. & Diuisio numeri Cossici per Cossicum numerum.*

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | &c. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N. | ℞ | ʒ | ce | ʒʒ | ß | ʒce | Bß | ʒʒʒ | Cce | &c. |
| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | &c. |

Nam in multiplicatione fit exponens numerus denominationis Cossicæ conflatæ ex additione exponentium numerorum, qui videlicet denominationes illas, quæ multiplicantur, exponunt. In diuisione autem reperitur exponens numerus Cossicæ denominationis productæ, qui relinquitur, si exponens numerus denominationis diuidentis subtrahatur ab exponente numero denominationis diuidendæ. Vt ex multiplicatione. 4℞. in 4℞ vel 4℞ in 7℞ fiunt 16ʒ. vel 28ʒ. Nam vnitas, quæ est exponens huius characteris Cossici ℞ addita ad vnitatem, facit 2. exponentem huius characteris ʒ. Sic etiam ex multiplicatione 4℞. in 5ʒ fiunt 20ce. Et ex 4ʒ. in 6ß. fiunt 24 Bß. &c. Item ex di[illegible]24 Bß per 4ʒ. fiunt 6ß. Et ex diuisione 36 ʒce per 4ʒʒ. producuntur 9ʒ. Et ex diuisione 12ʒʒ pe[illegible]32℞. Et ex 8ʒ. per 8ʒ. fit 1 N. quia subductis 2. à 2. relinquitur 0, exponens numeri absoluti. Ita quo[illegible] diuisi[illegible] ʒ. c. per 4ß. proueniunt 32℞ &c.

EX his facile intelligitur, quonam modo num[illegible] Cossicus in seipsum multiplicetur quadrate, cubice, &c. Nam 5. ce, in se quadrate faciunt 25. ʒce. cum 3. & 3. faciant 6. At 5 ce, in se cubice faciunt 125. Cce. Nam primum 5ce, in se faciunt 25. ʒce. Deinde 25 ʒce. in 5ce. faciunt 125 Cce &c.

DEMONSTRATIO huius rei facilis est. Repetatur enim progressio characterum Cossicorum numeros progressionis Geometricæ denominantium, vna cum naturali progressione numerorum exponentium, vt hic.

*Demõstratio Multiplicationis & Diuisionis numerorũ Cossicorum.*

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | &c. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N. | ℞. | ʒ. | ce. | ʒʒ. | ß. | ʒce | Bß. | ʒʒʒ. | Cce. | ʒß. | Cß. | &c. |

Qnoniam igitur, vt in scholio propos. 11. lib. 9. Euclid. docuimus, quilibet numerus progressionis Geometricæ ab vnitate incipientis seipsum multiplicans producit numerum eiusdem progressionis, qui tantum ab eo distat exclusiue, quantum ipse abest exclusiue ab vnitate; fit vt ce, seipsum multiplicans producat ʒce. qui tertium locum occupat post ce, exclusiue, quemadmodum & ce, tertium habet locum post N. hoc est, post vnitatem exclusiue. Quare cum exponens huius characteris ce. nempe 3. ad se additus faciat 6. exponentem, qui tertium locum possidet post 3. exclusiue; propterea quod tres vnitates continentur in 3. per quot nimirum interualla denominatio ce. distat à N. seu vnitate exclusiue (Nam exponens cuiusque denominationis Cossicæ tot continet vnitates, quotum locum ipsa denominatio obtinet ab vnitate, siue à N. exclusiue.) perspicuum est, numerum 6. qui fit ex additione 3. ad 3. esse exponentem huius characteris Cossici ʒce qui producitur ex multiplicatione ce, in se. Eademque ratio est de cæteris characteribus Cossicis, qui seipsos multiplicant.

RVRSVS, quia, vt ex eodem scholio constat, si minor aliquis numerus progressionis Geometricæ ab vnitate incipientis multiplicet maiorem quempiam eiusdem progressionis, procreatur numerus, qui tantum à maiore distat exclusiue in progressione eadem, quantum minor ab vnitate abest exclusiue; efficitur vt ce. multiplicans ʒce, producat Cce, qui tertiũ occupat locum post ʒce exclusiue, sicut & ce, tertium possidet locũ exclusiuè post N, hoc est, post vnitatem. Quocirca cũ exponens 3. characteris ce, additus ad 6, exponentem characteris ʒce, faciat 9. exponentem, qui tertium locum adeptus est post 6. exclusiue, propterea quod in 3. continentur tres vnitates, quotum nimirum locum exclusiue ab vnitate, seu N, occupat character hic ce, manifestum est, numerum 9. qui fit ex additione 3. ad 6. exponentem esse huius characteris Cossici Cce qui gignitur ex multiplicatione ce, in ʒce. Eadem de causa idem character Cce, procreatur ex multiplicatione ʒʒ. in ß. & sic de cæteris.

QVONIAM vero, vt Additio Subtractionem, & Subtractio Additionem; ita quoque Multiplicatio Diuisionem, & Diuisio Multiplicationem probat; fit vt quemadmodũ ex additione 3 ad 3, fiunt 6 & ex multiplicatione ce, in ce, fit ʒce; ita subtractis 3. ex 6. relinquantur 3. & diuiso ʒce per ce, proueniat ce. Item sicut ex additione 3. ad 6. fiunt 9. & ex multiplicatione ce in ʒce, fit Cce; sic etiam subtractis 3. ex 9. relinquantur 6. & diuiso Cce. per ce, producatur ʒce. eademque ratio est de reliquis.

EX hac demonſtratione perſpicuum fit, id quod cap. 2. tradidimus; Additionem videlicet numerorum progreſſionis Arithmeticæ reſpondere multiplicationi numerorum progreſſionis Geometricæ, & Subtractionem Diuiſioni Demonſtrauimus enim, quemadmodum ex additione 2 ad 4. fiunt 6. ita ex multiplicatione ℨ, in ℨℨ, fieri ℨℭ. Item ſicut ſubtractis 2. ex 6. relinquuntur 4. ita diuiſo ℨℭ, per ℨ, fieri ℨℨ, &c.

*Multipl. & Diuiſio numeri Coſſici compoſiti per abſolutum, vel per Coſſicũ tam ſimplicem, quam compoſitũ.*

ITAQVE ex multiplicatione cuiuſuis characteris Coſſici in alium quemcunque producitur character Coſſicus tantũ à maiore diſtans excluſiue, quantũ minor ab vnitate, hoc eſt, ab hoc ſigno N. recedit excluſiue, vel quantus eſt exponens minoris characteris Coſſici. Vt ex ℭ, in ℨℨ, fit Cß. &c. Ex diuiſione vero cuiuslibet characteris Coſſici maioris per alium quemuis minorem prouenit character Coſſicus tantum à maiore diſtans excluſiuè, retrocedendo tamen, quantum minor ab vnitate, ſeu charactere N, abeſt excluſiue, vel quantus eſt exponens minoris characteris Coſſici. vt ex diuiſione Cℭ, per ℨℨ, producitur ß. &c.

QVANDO autem numerus Coſſicus compoſitus, vel diminutus multiplicatur, aut diuiditur per numerum abſolutum, vel Coſſicum tam ſimplicem, quam compoſitum, diminutumue, præter documentum iam traditum habenda eſt maxima ratio horum ſignorum +. & —. Nam quando numeri ſe mutuo multiplicantes, vel diuidẽtes habuerint idem ſignum +. vel —. apponitur producto ſemper hoc ſignum +. Quando vero alter illorum habuerit ſignum +, & alter hoc —, afficitur productus numerus perpetuo hoc ſigno —. Quod alij ſcriptores docent his verbis. In multiplicatione ac diuiſione, Plus per Plus, vel Minus per Minus producit Plus: At Plus per Minus, vel Minus per Plus producit Minus. Hoc autem vnica hæc regula memoriæ mandabitur.

*Regula in multipl. & diuiſione numerorũ Coſſicorum obſeruãda.*

*Eadem ſigna ponunt ſignum additorum: Diuerſa vero ſigna ponunt ſignum ſubtractorum.*

*Exempla Multiplicationis.*

| | | |
|---|---|---|
| 7 ℨ + 4 ℜ | 7 ℨ — 4 ℜ | 7 ℨ — 4 ℜ |
| 9 N | 9 | 9 ℜ |
| 63 ℨ + 36 ℜ | 63 ℨ — 36 ℜ | 63 ℭ — 36 ℨ |

| | |
|---|---|
| 8 ℨ + 9 | 8 ℨ — 9 |
| 8 ℨ + 9 | 8 ℨ — 9 |
| 72 ℨ + 81 | — 72 ℨ + 81 |
| 64 ℨℨ + 72 ℨ | 64 ℨℨ — 72 ℨ |
| 64 ℨℨ + 144 ℨ + 81 | 64 ℨℨ — 144 ℨ + 81 |

| | |
|---|---|
| 8 ℭ — 4 ℨ | 6 ℨ + 8 ℜ — 6 N |
| 6 ℜ | 2 ℨ — 4 N |
| 48 ℨℨ — 24 ℭ | — 24 ℨ — 32 ℜ + 24 N |
| | 12 ℨℨ + 16 ℭ — 12 ℨ |
| | 12 ℨℨ + 16 ℭ — 36 ℨ — 32 ℜ + 24 N |

9 ℨ + 8 N — 3 ℜ
7 ℭ — 4 ℨℨ — 8 ℨ
— 72 ℨℨ — 64 ℨ + 24 ℭ
— 36 ℨℭ — 32 ℨℨ + 12 ß
63 ß + 56 ℭ — 21 ℨℨ
— 36 ℨℭ + 75 ß — 125 ℨℨ + 80 ℭ — 64 ℨ

In hoc vltimo exemplo præcedunt ſemper in ſumma maiores denominationes Coſſicæ minores denominationes Coſſicas. Sed quoniam non recte in initio ponitur hoc ſignum —, propterea ita collocanda erit ſumma producta.

75 ß — 36 ℨℭ — 125 ℨℨ + 80 ℭ — 64 ℨ

*Exempla Diuiſionis.*

| | | |
|---|---|---|
| 10 ℭ per 3 ℭ (3⅓ N | 10 ℭ per 3 ℜ (3⅓ ℨ | 10 ℜ per 3 ℜ (3⅓ N |

| | |
|---|---|
| 9 ℨ + 4 ℜ / 3 ℜ · 3 ℜ (3 ℜ + 1⅓ N | 18 ℨℨ — 12 ℨ / 4 ℜ · 4 ℜ (4½ ℭ — 3 ℜ |

— 40 ℜ
30 ℨ — 58 ℜ + 24 N (6 ℜ — 8 N
5 ℜ — 3 N
5 ℜ — 3 N

```
          — 12ʒ          0ℛ
12ʒʒ + 16ce — 36ʒ — 32ℛ + 24N        (6ʒ + 8ℛ — 6N
2ʒ + 0ℛ — 4N
       2ʒ + 0ℛ — 4N
             2ʒ + 0ℛ — 4N
```

Quoniam in omni diuisione numerorum Cossicorum denominationes debent esse continuatæ, idcirco in vltimo exemplo, in quo diuisor est 2ʒ — 4N. interposuimus 0ℛ, cum signo +, vt totus diuisor sit 2ʒ + 0ℛ — 4N. Idem factum esse vides in sequenti exemplo, vbi diuidendus numerus est 1ce + 1. & diuisor 1ℛ + 1.

```
 — 1ʒ + 1ℛ
1ce + 0ʒ + 0ℛ + 1              (1ʒ — 1ℛ + 1N
1ℛ + 1
       1ℛ + 1
             1ℛ + 1
```

CÆTERVM tria hæc vltima exempla, in quibus diuisor est numerus compositus, vel diminutus, arte sunt excogitata. Nam vt plurimum per huiusmodi diuisores diuisio fieri non potest, sed subscripto diuisore ipsi diuidendo numero, interiectaque linea, fit fractio, vt hic. *Quando nō possit fieri diuisio.*

8 ß per 2ʒ + 4N || 8ʒ — 9ℛ per 4ℛ + 3N

Quotientes sunt.

$$\frac{8\ ß}{2ʒ + 4N} \quad || \quad \frac{8ʒ — 9ℛ}{4ℛ + 3N}.$$

Quid autem faciendum sit cum fractionibus huiusmodi, infra cap. 10. docebimus, cum de reductione æquationum inter minutias inuentarum agemus. Eodem modo fractio constituitur, cum numerus Cossicus simplex, vel compositus per Cossicum numerum simplicem maioris denominationis diuiditur, vt 8ʒ. per 2ʒce. constituunt hanc fractionem $\frac{8ʒ}{2ʒce}$. Item diuisis 9ʒ + 4. per 3ℛ. fit hæc fractio $\frac{9ʒ+4}{3ℛ}$. &c.

SVPEREST, vt tradamus examen Multiplicationis atque Diuisionis. Hoc autem duplex est. Primum Multiplicatio per Diuisionem, & contra examinari potest, vt in numeris absolutis præcipitur. *Pr... Multiplicationis & Diuisionis.*

DEINDE probatio institui potest per resolutionem Cossicorum numerorum secundum aliquam radicem progressionis Geometricæ, vt dictum est ad finem cap. 4. Nam numeri Cossici, qui multiplicantur inter se, resoluti tantum faciant necesse est, si multiplicentur inter se, quantum numeri Cossici producti, secundum eandem radicem resoluti. Et diuidendus numerus Cossicus resolutus tantum debet producere diuisus per diuisorem resolutum, quantum Quotiens secundum eandem radicem resolutus. vt hic apparet.

*Exemplum Multiplicationis.*

Secundum radicem 2. faciunt 6ℛ — 8. 4. & 5ℛ — 3. faciunt 7. Ex multiplicatione autem 4. per 7. fiunt 28. Tantundem quoque fit ex resolutione producti numeri secundum eandem radicem 2. vt patet.

```
            6ℛ — 8
            5ℛ — 3
      — 18ℛ + 24
30ʒ — 40ℛ
30ʒ — 58ℛ + 24
```

*Exemplum Diuisionis.*

```
      — 28ℛ
30ʒ — 58ℛ + 24          (5ℛ — 3N
6ℛ — 8
      6ℛ — 8
```

Diuidendus numerus 30ʒ — 58ℛ + 24. secundum radicem 2. resolutus facit 28. Diuisor vero 6ℛ — 8. facit 4. Diuisis autem 28. per 4. producuntur 7. Perspicuum autem est quotientem hunc 5ℛ — 3. secundum eandem radicem resolutum efficere quoque 7.

QVOD autem eadem signa + & +, vel — & —, in Multiplicatione & Diuisione producant semper signum hoc +. Diuersa autem signa +, & —, vel —, & +, faciant semper hoc signum —; prætérquam quod examen Multiplicationis & Diuisionis abunde id comprobare possit: tamen idipsum clare perspicitur in numeris absolutis. Vt in hoc exēplo sequenti, quis nō videt, si multiplicentur 8 — 2. hoc est, 6. per 7. — 3. hoc est, per 4. produci 24. nempe 56. — 38 + 6? Nam cū ex 7 in 8. fiunt 56. quoniā nō multiplicatur totus hic numerus 7. in hunc 8. sed in 8. detractis prius 2. propterea numerus hic 56. maior est vero ꝓducto. Vnde ex multiplicatione postea eiusdem numeri 7. in — 2. fiunt 14. signando hoc signo —. atque ita ex + in —, fit —. Rursus quis non *Quod eadē signa producant signum +. Diuersa autem signū —.*

```
 8 — 2
 7 — 3
56 — 14
   — 24 + 6
56 — 38 + 6
```

totus hic numerus 7. sed detractis prius 3. multiplicatur in 8 — 2, fit vt productus 56 — 14. fit vero producto maior. Quare ex multiplicatione 3, in 8. fiunt 24. notanda hoc signo —, atque ita rursus ex — in + fit —. Sed quia non totum hoc, quod prouenit ex — 3. in 8 sed quod producitur ex — 3. in 8 subtractis prius 2. idcirco restituendum est id, quod iniuste ablatum est; atque ita postremo ex — 3. in 2. fiunt 6. notanda signo hoc +, quod additionem significat, vt restituantur 6. quæ ablata fuerant. Eadem ratio est in cæteris exemplis Multiplicationis.

IAM vero cum ex multiplicatione 6. in — 4 gignatur hic numerus — 24. vt dictū est, necesse est, vt ex diuisione — 24 per — 4. producantur 6; & ex diuisione — 24. per 6. fiant — 4. Quare in diuisione quoq; ex —, in —, fit +, & ex —, in +, vel contra, fit —. Itaque quemadmodum affirmatio affirmationis, & negatio negationis affirmant, ita siue Plus in Plus, siue Minus in Minus multiplicatum, aut diuisum producit Plus. Item, sicut affirmatio negationis, siue negatio affirmationis negat, ita siue Plus in Minus, siue Minus in Plus multiplicatum, aut diuisum producit Minus.

## *DE NVMERIS FICTIS, SIue minoribus quam nihil.*

## CAPVT VI.

QVEMADMODVM variæ finguntur radices numerorum, qui eas non habent, qualis est radix quadrata, vel cubica, vel Zensizensica, vel Surdesolida huius numeri 20. fitque hæc fictio summa vtilitate, & commodo eorum, qui in rebus Mathematicis versantur, vt suo loco dicemus: Ita etiam à scriptoribus Algebræ finguntur non temere numeri quidam minores quam nihil, vt o — 4 hoc est, nihil detractis prius quatuor vnitatibus Item 6 — 10. hoc est, sex vnitates minus 10. vnitatibus. Quod vnico exemplo hoc subtractionis perspicuum fiet. Sint ex 8 — 2, deducenda 10 — 5 hoc est, 5. ex 6. Primo detraho — 5. ex — 2. hoc est, quia superior numerus minor est, detraho 2. ex 5. & reliquo numero 3, tribuo contrarium signum +, iuxta legem subtractionis supra traditam. Nam re vera hic numerus — 2, intelligitur superare hunc numerum — 5, tribus vnitatibus, cum — 2, cadat infra nihil duabus vnitatibus, at — 5. infra idē nihil descendat quinq; vnitatibus, hoc est tribus vnitatibus magis, quā — 2, recedat à nihilo.

*Numeri ficti, siue minores quā nihil.*

| | | |
|---|---|---|
| 8 | — | 2 |
| 10 | — | 5 |
| — | 2 + | 3 |

Quod etiā hinc potest intelligi, quod huic numero — 2, desint tantū duæ vnitates, vt æqualis sit nihilo, at huic — 5, desint quinque, vt nihilo æquiualeat. Deinde subtraho + 10, ex + 8, maiorem numerum ex minore, quod fieri non potest. Vnde non inuenio numerum aliquem verum, quem pro relicto reponam, si 10 ex 8. subducam. Nam si superior numerus 8, maior esset inferiore 10, remaneret verus numerus ex illa subtractione: Et si æqualis esset superior numerus inferiori, relinqueretur nihil. Nunc vero cum numerus subtrahendus 10, maior sit numero 8, à quo fieri debet subtractio, efficitur, vt numerus infra o, hoc est, minor nihilo relinquatur, ille nimirum, qui deest superiori, vt ab eo inferior detractus relinquat o, cuiusmodi est numerus, qui relinquitur ex subtractione superioris ab inferiore, notatus signo —, quod defectum significat, nempe — 2. Vt totus numerus relictus sit — 2 + 3. Sed quia nō recte ad initium numeri præfigitur hoc signum —, ita statuendus erit relictus. 3 2. — Eodem modo, quotiescunque maior numerus aliquis ex minore detrahendus est (quod vera fieri non potest) ponitur in hac scientia pro relicto excessus, quo inferior numerus superiorem superat, præfixo hoc signo —, vt subtractis 20, ex 12, relinquuntur — 8, &c.

VIDES igitur, quam pulchre hæc ars pro immensa copia sua vtatur & ijs, quæ sunt, & ijs, quæ non sunt, sed tamen esse finguntur. Quod accuratius adhuc ex ijs, quæ sequuntur, iam iam intelliges.

QVEMADMODVM supra vnitatem ponuntur numeri integri, & infra vnitatem fractiones vnitatis, vt vnitas media sit inter numeros integros & fractos; ita supra o, seu nihilum, ponitur vnitas cum reliquis numeris veris, & infra o, fingitur vnitas cum reliquis numeris, præposito tamen semper signo hoc —, ita vt o, seu nihilum, medium sit inter numeros veros, & fictos, siue minores nihilo. Quod appositæ sequentes duæ progressiones commonstrant, quarum superior est naturalis series numerorum, inferior autem Geometrica,

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| &c. | —7 | —6 | —5 | —4 | —3 | —2 | —1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | &c. |
| &c. | [illegible] | $\frac{1}{64}$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | &c. |

illiusque numeri numeros huius exponūt, vt cap 2. diximus. Nam & hic superioris progressionis numeri idem faciunt additione, & subtractione, quod inferioris progressionis numeri multiplicatione, atque diuisione. Vt enim ex multiplicatione $\frac{1}{4}$. in 32 fiunt 8. ita ex additione — 2, ad 5. fiunt 3. Item sicut ex multiplicatione $\frac{1}{2}$. in 8 fiunt 4. ita ex additione — 1. ad 3. fiunt 2 Rursus, vt ex diuisione 8, per $\frac{1}{4}$, prodeūt 32, sic ex subtractione — 2, de 3, relinquuntur 5 Et quemadmodū ex diuisione 8. per $\frac{1}{2}$, exeunt 16, ita ex subtractione — 1, de 3, relinquuntur 4 &c. Ex quibus, quæ de additione subtractioneque numerorum Cossicorum diximus, perspicuum est. Immo ex his etiam constat, in additione & subtractione diuersa signa mutare speciem operationis, &c. vt docuimus. Alias non responderet additio & subtractio in progressione naturali numerorum multiplicationi ac diuisioni in Geometrica progressione.

Ex his igitur liquido constat, non frustra excogitari huiusmodi numeros fictos, siue nihilo minores, quandoquidem eorum additio ad numeros integros, vel subtractio respondet multiplicationi, & diuisioni numerorū integrorum progressionis Geometricæ per numeros fractos eiusdem progressionis, vt dictum est.

EST autem hoc loco obseruatione dignum, dari posse numerum Cossicum, qui habeat duas radices quadratas inæquales; siue (quod idem est) exhiberi posse duos numeros inæquales, quorum vterque in seipsum ductus producat eundem numerum. Nam si duo numeri, 2ℨ−3𝔯 & 3𝔯−2ℨ. si vterque in se multiplicetur, producunt 4ℨℨ+9ℨ−12ℭ. vt hic vides. *Vnum & eundem numerū habere posse duas radices quadratas inæquales.*

$$\begin{array}{rr} & 2ℨ - 3𝔯 \\ & 2ℨ - 3𝔯 \\ \hline & -6ℭ + 9ℨ \\ 4ℨℨ - 6ℭ & \\ \hline 4ℨℨ + 9ℨ - 12ℭ & \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 3𝔯 - 2ℨ \\ & 3𝔯 - 2ℨ \\ \hline & -6ℭ + 4ℨℨ \\ 9ℨ - 6ℭ & \\ \hline 4ℨℨ + 9ℨ - 12ℭ & \end{array}$$

Cum tamen ipsi numeri multiplicati inter se sint valde inæquales. Prior enim 2ℨ−3𝔯, si per radicem 2. resoluatur, efficit 8−6. hoc est, 2. qui numerus in se ductus procreat 4. qui æqualis est producto 4ℨℨ+9ℨ−12ℭ. cum hic per eandem radicem 2. resolutus efficiat quoque 4. Posterior vero 3𝔯−2ℨ. efficit 6−8. id est 0−2. qui numerus in se multiplicatus producit quoque 4. si leges multiplicationis seruentur. Itaque tam numerus 2ℨ−3𝔯. quam 3𝔯−2ℨ. radix est quadrati numeri 4ℨℨ+9ℨ−12ℭ. quod sane mirum videri possit, & paradoxum, cum tamen ita rem sese habere, resolutiones radicum, & producti numeri euidenter comprobent.

HOC idem cernitur in numeris absolutis. Nam vterque horum numerorum 4−1. & 1−4. id est 3. & 0−3. in se multiplicatus gignit 9. vt hic cernis.

$$\begin{array}{rr} & 4 - 1 \\ & 4 - 1 \\ \hline & -4 + 1 \\ 16 - 4 & \\ \hline & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 1 - 4 \\ & 1 - 4 \\ \hline & -4 + 16 \\ 1 - 4 & \\ \hline & 9 \end{array}$$

Idemque in infinitis alijs numeris licebit experiri. Quod si ducantur 4−1. in 1−4. producetur numerus 8−17. hoc est, 0−9. At ex multiplicatione 2ℨ−3𝔯. in 3𝔯−2ℨ. procreabitur numerus 12ℭ−4ℨℨ−9ℨ. qui resolutus per radicem 2 efficit 32−36. id est, 0−4. cum tamen vterque illorum in se ductus producat 4. Causa autem huius rei in multiplicationem numerorum Cossicorum, & signorum + & − reijcienda videtur: & debilitas ingenij humani accusanda, quod capere non potest, quo pacto id verum esse possit. Neque enim de ratione prædictæ multiplicationis dubitandum est, cum illa per multa exempla sit confirmata.

## *DE FRACTIONIBVS numerorum Coßicorum.*

## CAPVT VII.

EADEM fere operationes sunt in fractionibus, seu Minutijs Cossicis, quæ in vulgaribus Minutijs, adhibitis tamen ijs, quæ de integris Cossicis numeris hactenus tradidimus, quod ad characteres Cossicos, & signa + & − attinet. Nam, vt de Numeratione exempla nonnulla ponamus, hæc fractio $\frac{3𝔯}{8𝔯}$. significat, tres vnitates diuisas esse per 8𝔯. Et [illegible]. denotat 7. Zensos esse diuisos per 9, vnitates. Item $\frac{9ℨℨ+8ℨ}{6ℭ}$. indicat hunc numerum 9ℨℨ+8ℨ. diuisum esse per 6ℭ. Et $\frac{9ℨℨ-8ℨ}{6ℭ}$. vult numerum hunc 9ℨℨ−8ℨ esse diuisum per 6ℭ. &c. *Numeratio fractionum Cossicarum.*

Abbreuiatio duobus modis fieri potest. Aut enim solum abbreuiantur numeri, vt in Minutijs vulgaribus fit, intactis characteribus Cossicis, aut etiam characteres Cossici abbreuiantur. Vt fractio hæc [illegible]. quod ad numeros attinet. reducitur ad hanc [illegible]. Hæc autem [illegible]. reducitur ad hanc [illegible]. quia maxima mensura communis est 9. Modus autem inueniendi maximam mensuram trium aut plurium numerorum colligitur ex propos. 3, lib. 7. Euclid. Si enim sunt tres numeri, inuenta maxima mensura duorum, si hæc metiatur quoque tertium, erit ipsa maxima mensura omnium; si vero non metiatur tertium, erit maxima mensura illius maximæ mensuræ, & tertij numeri, omnium trium mensura maxima. Eodem modo, datis quatuor numeris, inuenta maxima mensura trium, si hæc metiatur & quartum numerum, erit ipsa maxima omnium quatuor mensura; si vero non metiatur, erit maxima mensura mensuræ illius maximæ, & quarti numeri, maxima mensura omnium quatuor. Et sic de reliquis. Similiter hæc minutia [illegible]. ad hanc reducitur [illegible]. Hæc autem [illegible]. reducitur ad hanc $\frac{6ℨ-12𝔯}{1ℨℨ+1ℨ}$. &c. *Abbreuiatio fractionum Cossicarum.*

AT vero abbreuiatio characterum Cossicorum fit per subtractionem exponentis minoris characteris ab exponentibus aliorum characterum. Nam si reliquis numeris proprij characteres tribuantur, peracta erit abbreuiatio, quod ad characteres attinet. Hinc perspicuum est, numerum minoris characteris Cossici fieri in hac abbreuiatione Absolutum. Itē Minutiam, in quo Absolutus numerus reperitur, nō posse abbreuiari, quod ad characteres attinet. Vt hæc Minutia $\frac{7}{1ℨℨ+3}$. abbreuiari non potest, quod spectat ad characteres: sed quod ad

numeros attinet, reducetur per abbreuiationem ad hanc, [illegible]. At vero hæc Minutia [illegible]. quod ad characteres spectat, ad hanc reducitur. [illegible]. Deinde quod ad numeros attinet, ad hanc [illegible]. Hæc autem [illegible]. reducitur ad istam. quod ad numeros & characteres attinet, [illegible].

*Demonstratio abbreuiationis fractionũ Cossicarũ.*

FACILIS autem est demonstratio huiusce abbreuiationis. Nam quod spectat ad numeros, cum Minutiæ propositæ numeri diuidantur per eundem numerum, per maximam videlicet eorum mensuram, erit eadem proportio inter quotientes, quæ inter numeros diuisos. Quare æquales erunt hæ fractiones, [illegible]. [illegible]. Quod vero ad characteres attinet, cum singuli characteres per eundem exponentem deprimantur, ita vt eadẽ prorsus sit distantia inter characteres, ad quos facta est reductio, quæ inter characteres initio propositos, habebunt eandem proportionem characteres, ad quos facta est reductio, quam priores characteres propositi.

*a 19.7.* Æquales itaq; erunt hæ Minutiæ, [illegible]. [illegible]. a Nam eadem proportio est 4ℨ. ad 1ℨℭ, quæ 4. ad 1ℨℨ. cum idem numerus fiat ex multiplicatione 4ℨ, primi numeri, in 1ℨℨ, numerũ quartum, qui ex 4. numero tertio in 1ℨℭ, numerum secundum. Vtrobique enim producitur hic numerus 4ℨℭ. &c. Vel certe, cum & inter ℨ, ac ℨℭ, & inter N, ac ℨℨ, tres medij termini cadant proportionales, propterea quod ℨ, & ℨℭ, æqualiter sunt depressi, nempe per 2. exponentem huius characteris minoris ℨ, &c.

*Reductio fractionũ Cossicarũ.*

REDVCTIO fractionum ad eundem denominatorem absoluitur multiplicando numeratores in denominatores per crucẽ, & denominatores inter se, vt in Minutijs vulgaribus. Vt hæc fractiones [illegible]. ✕ [illegible]. reducuntur ad has. [illegible]. [illegible].

*Demonstratio reductionis fractionũ Cossicarum.*

RATIO autem huius reductionis perfacilis est. Quoniam enim idem numerus 5ℨℭ, multiplicans duos numeros 3ℜ, & 4ℨ, produxit 15ß, & 20ℨℨℨ. b eadem proportio erit 15ß, ad 20ℨℨℨ. quæ 3ℜ. ad 4ℨ. ac propterea eundem habebunt valorem fractiones hæ [illegible]. & [illegible]. Eodem modo æquales erunt hæ fractiones [illegible]. & [illegible]. Nam hic numerus 4ℨ, multiplicans duos 4ℭ, & 5ℨℭ, genuit hos duos 16ß, & 20ℨℨℨ.

*b 17.7.*

QVOD si numerus aliquis integer, & fractio ad eandem denominationem sint reducenda, supponenda est vnitas numero integro pro denominatore, & reliqua peragenda, vt prius. Vt 6. & [illegible]. hoc modo $\frac{6}{1}$. ✕ [illegible]. reducentur ad has fractiones [illegible]. & [illegible]. Et hæ duæ [illegible]. [illegible]. ad has [illegible]. [illegible]. Nam huic numero Cossico integro 5ℨ, supposita est vnitas pro denominatore.

SI vero integris adhereat fractio aliqua, reducenda erunt prius integra ad eam fractionem; quod quidem fit multiplicando integra per denominatorem fractionis, & numerum productum numeratori addendo. Vt si 4ℨ + [illegible]. & [illegible]. reducere velimus ad eandem denominationem, multiplicabimus prius 4ℨ, per 1ℭ, vt habeamus duas fractiones has [illegible] [illegible]. quas ad has duas reuocabimus. [illegible]. [illegible]. & sic de cæteris.

*Additio, Subtractio, Multiplicatio, & Diuisio fractionũ Cossicarum.*

IAM vero quatuor reliquæ operationes fractionum Cossicarum, hoc est, Additio, Subtractio, Multiplicatio, atque Diuisio, non differunt ab ijs, quas de Minutijs vulgaribus tradidimus, habita tamen semper ratione signorum + & −, nec non characterum Cossicorum, quorum operationes in superioribus præceptis continentur. Itaque solum exemplis rem absoluemus hoc loco.

## *Exempla Additionis.*

[illegible] ✕ [illegible] faciunt [illegible] hoc est, [illegible]. Itẽ [illegible] ✕ [illegible] faciũt [illegible]. Item [illegible] ✕ [illegible]. faciunt [illegible]. Quoniam enim in posteriori exemplo denominatores omnino similes sunt, propterea solum numeratores adduntur inter se, & summæ idem denominator subscribitur. Hæc autem fractio quod ad numeros & characteres simul spectat, reducetur ad hanc [illegible].

## *Exempla Subtractionis.*

[illegible] de ✕ [illegible] relinquunt [illegible] hoc est, [illegible]. Item [illegible] de ✕ [illegible] relinquunt [illegible] hoc est, [illegible]. Item [illegible] de [illegible] relinquunt [illegible] hoc est. [illegible]. Item [illegible] de [illegible] relinquunt [illegible]. Quoniam enim in posteriori exemplo denominatores omnino sunt similes, & üdem, detrahendus est numerator à numeratore, & reliquo numero idem denominator subscribendus,

## *Exempla Multiplicationis.*

[illegible] per [illegible] faciunt [illegible]. Item [illegible] per 42ℜ − 8N. faciunt [illegible]. Hic enim integro numero supponitur vnitas pro denominatore, vt exemplum ad Multiplicationem paretur hoc modo. [illegible] per [illegible]. Item [illegible] per [illegible] − 8N faciunt [illegible]. Prius enim in hoc exemplo facta est reductio −8N, ad fractionem, cui adhærebant, multiplicando videlicet −8N, per 5ℨ, denominatorem. Quare fractiones multiplicandæ fuerunt hæ [illegible] per [illegible].

## *Exempla Diuisionis.*

[illegible] per [illegible] faciunt [illegible]. Item [illegible] per [illegible] faciunt [illegible] hoc est, $\frac{4}{3}$ siue $1\frac{1}{3}$. Item [illegible] per 42ℜ − 8N. faciunt [illegible]. Item [illegible] per [illegible] faciunt [illegible].

QVONIAM vero Additio, & Subtractio, Item Multiplicatio ac Diuisio se mutuo probant, fit vt si ex additione [illegible] & [illegible] fiunt [illegible] hoc est, [illegible]; subductis [illegible] ex [illegible] relinquatur [illegible]. Relinquuntur autem iuxta regulam [illegible] hoc est, in minimis terminis [illegible]. Necesse est igitur, has duas minutias [illegible] & [illegible] esse æquales, hoc est, eandem proportionem esse 4ℨ. ad 3ℭ, atque 4N, ad 3ℜ. Quod quidem verum est. Nam si Minutiæ dictæ multiplicentur per crucem, producentur æquales numeri, hoc est, tantum fiet ex primo numero in quartum, nimirum ex 4ℨ, in 3ℜ, quantum ex secundo in tertium, nimirum ex 3ℭ, in 4N. Itaque

non

non est necesse vt eadem Minutia omnino proueniat, sed satis est, vt æqualis Minutia producatur, quæ quidem æqualitas facile comprobari potest ex multiplicatione per crucem. Idem dicendum est de exemplis Multiplicationis ac Diuisionis, vt ex superioribus exemplis apparet.

*Compendiariæ quadam operationes Minutiarum ad plurimas quæstiones soluendas, perutiles.*

## I.

*Dati numeri partem quamcunque, vel partes nominatas ad ipsum numerum addere.*

Compendia quæda fractionum.

SIT datus numerus $\frac{1x - 16N}{3N}$ cui volo addere $\frac{3}{4}$ ipsius numeri. Vtor ergo hoc cõpendio, etiamsi ignorem quę sint $\frac{3}{4}$ ipsius. Addo ad partem, vel partes addendas, vnitatem, (quod breuiter fit, addendo denominatorem numeratori) nimirum ad $\frac{3}{4}$ facio $\frac{7}{4}$. Hanc vero Minutiam multiplico per numerum datum efficioq; $\frac{7x - 112N}{12N}$ summam quæsitam.

Item si $\frac{2}{3}$, addendæ sint ad 12 ℨ. addo vnitatem ad $\frac{2}{3}$. vt fiant $\frac{5}{3}$. Hanc minutiam multiplico per 12. ℨ. facioque summam hanc $\frac{60ℨ}{3}$ hoc est, 20 ℨ. Similiter si ad hanc minutiam $\frac{1}{3}$ addendum sit eius dimidium; addita vnitate ad $\frac{1}{2}$, fiunt $\frac{3}{2}$. Multiplico $\frac{3}{2}$ per $\frac{1}{3}$. fit summa tota $\frac{3}{6}$.

## II.

*Dati numeri partem, vel partes quascunque ad partem, vel partes quascunque eiusdem numeri addere.*

SIT datus numerm $\frac{8x - 32N}{7N}$ ad cuius $\frac{2}{3}$, volo addere $\frac{3}{4}$, eiusdem dati numeri. Addo partes propositas inter se, vt $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$, facioque $\frac{17}{12}$. Hanc minutiam multiplico in datum numerum $\frac{8x - 32N}{7N}$ efficioque summam $\frac{136x - 544N}{84N}$.

Similiter si $\frac{2}{5}$ huius numeri 35. ad $\frac{4}{7}$ eiusdem volo addere Addo prius $\frac{2}{5}$ & $\frac{4}{7}$ facioque $\frac{34}{35}$. Multiplico $\frac{34}{35}$ per 35. efficioque $\frac{1190}{35}$ hoc est, 34. &c.

## III.

*Dati numeri partem, vel partes quascunque ab ipso numero subtrahere.*

SIT datus numerus $\frac{7x + 8x - 10}{30x}$, à quo volo subtrahere $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{5}$, hoc est $\frac{8}{15}$ (sunt enim prius in vnam summam redigendæ fractiones, si plures fuerint) Demo $\frac{8}{15}$ ex vnitate (quod breuiter fit, subtrahendo numeratorem à denominatore. Nam reliquus numerus est numerator) remanentque $\frac{7}{15}$. Multiplico $\frac{7}{15}$. per datum numerum $\frac{7x + 8x - 10}{30x}$ facioque reliquum numerum $\frac{49x + 56x - 70}{450x}$.

Similiter volo subtrahere $\frac{4}{5}$ huius numeri $\frac{9}{10}$, ab ipso numero $\frac{9}{10}$ Detraho $\frac{4}{5}$ ex vnitate, manet $\frac{1}{5}$. Multiplico $\frac{1}{5}$ per $\frac{9}{10}$, facioq; $\frac{9}{50}$ pro summa reliqua, &c.

## IIII.

*Dati numeri partem, vel partes quascunque à parte, vel partibus quibuscunque eiusdem numeri subtrahere.*

SIT datus numerus $\frac{12x + 8}{5}$ à cuius $\frac{1}{3}$ volo detrahere $\frac{1}{4}$. Demo prius $\frac{1}{4}$ ex $\frac{1}{3}$ remanet $\frac{1}{12}$. Multiplico $\frac{1}{12}$. per $\frac{12x + 8}{5}$ facioque summam reliquam $\frac{12x + 8}{60}$.

Item volo subducere $\frac{1}{4}$ huius numeri 36 ex $\frac{8}{9}$ eiusdem numeri. Demo $\frac{1}{4}$ ex $\frac{8}{9}$ manent $\frac{5}{36}$ Multiplico $\frac{5}{36}$ per 36. facioq; $\frac{180}{36}$ hoc est, 5. pro numero reliquo. &c.

## V.

*Dati numeri partem, vel partes quascunque inuenire.*

SIT datus numerus $\frac{12x + 8}{5}$. Volo ipsius $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, id est, $\frac{7}{12}$. (quando enim plures sunt fractiones, colligendæ sunt prius in vnam summam.) Multiplico $\frac{7}{12}$ per datum numerum $\frac{12x + 8}{5}$ facioque $\frac{84x + 56}{60}$ atque hic numerus constituit $\frac{7}{12}$, hoc est. $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$. dati numeri $\frac{12x + 8}{5}$.

Similiter volo $\frac{3}{4}$ huius numeri 24. Multiplico $\frac{3}{4}$ in 24. facioq; $\frac{72}{4}$ hoc est, 18, &c.

## VI.

*Numerum inuenire, cuius pars nominata data sit, vel partes. Hoc est, numerum inuenire, cuius datus quilibet numerus sit data quæuis pars, vel partes.*

SIT hic numerus $\frac{12x - 4}{5}$ duæ tertiæ partes alicuius numeri. Volo reperire illum numerum. Diuido $\frac{12x - 4}{5}$. per $\frac{2}{3}$. facioque $\frac{36x - 12}{10}$ atque hic est numerus, cuius $\frac{2}{3}$ faciunt $\frac{12x - 4}{5}$.

Pari ratione volo inuenire numerum, cuius hic numerus 8, sit $\frac{4}{5}$ Diuido 8 per $\frac{4}{5}$ facioque $\frac{40}{4}$, hoc est, 10 atque hic est numerus, cuius $\frac{4}{5}$ faciunt 8 &c.

# DE REGVLA ALGEBRÆ.

## CAPVT VIII.

ABSOLVTO Algorithmo numerorum Cossicorum, ordo iam postulat & locus, vt celeberrimam Algebræ regulam exponamus. Occasione. n. huius omnia, quæ hactenus tradita sunt de numeris Cossicis, planiora fient, & reliqua, quæ ad perfectiorem huius regulæ cognitionem requiruntur, declaranda erunt. Neque enim omnia, vt debent, explicari possunt, nisi occasione accepta à partibus regulæ Algebræ, vt suo loco dicemus. Regula igitur Algebræ, quam alij scriptores in plures distraxerunt, huiusmodi est,

*Regula Algebra*

*Pro numero incognito in quæstione ponatur radix vna hoc modo, 1 ℞. (Possunt etiam interdum plures radices poni hoc modo 2 ℞. vel 3 ℞. &c. vel alius quidam numerus, pro commoditate quæstionis propositæ.) Quæ iuxta quæstionis tenorem examinetur, donec Aequatio aliqua inueniatur: Hæc reducatur, si reductione opus fuerit: Deinde per numerum characteris Cossici maioris diuidatur reliquus æquationis numerus. Nam vel Quotiens ipse erit numerus, qui quærebatur, pretium scilicet radicis in principio positæ, vel certe radix aliqua Quotientis numeri numerum, qui quærebatur, notum reddet. Pulchre autem diuisor suo charactere Cossico demonstrabit, quando radix ex Quotiente, & quanam sit extrahenda.*

HABET autem regula hæc quatuor partes Prima est inuentio Æquationis: Secunda, Reductio Æquationis inuentæ: Tertia, Diuisio alterius numeri Æquationis per numerum maioris characteris Cossici: Quarta & vltima, Extractio radicis alicuius ex Quotiente.

HARVM duæ sunt omnino necessariæ, nimirum Inuentio Æquationis, & Diuisio. In omni enim quæstione per hanc regulam soluenda inuenienda est Æquatio siue Æqualitas inter duos numeros, & Diuisio instituenda Reliquæ duæ, nimirum Reductio Æquationis, & Extractio radicis ex Quotiente, non omnino sunt necessariæ Neque enim omnis Æquatio inuenta reductionem exigit, neque semper ex Quotiente radix extrahenda est, vt ex ijs, quæ sequuntur, manifestum erit. Quid porro inter vnicam hanc regulam nostram, & multiplices aliorum regulas intersit (Plures enim alij regulas præscribunt) cap. 13. manifestum erit.

SED priusquam omnes has quatuor partes regulæ singulatim pertractemus, rudi quadam Minerua, & obiter regulam ipsam explanabimus, hoc proposito problemate.

*Inuenire numerum, ita vt dimidio ipsius, & tertia parte ab eo sublatis, reliquus numerus sit 7.*

*Prima pars regula Algebra.*

PONO hunc numerũ ignotũ, qui quæritur, esse 1 ℞. ita vt 1 ℞. æqualis intelligatur numero abscõdito, quem inquirimus. Cum n omnis numerus siue integer siue fract⁹, siue integer cũ fracto obtinere possit secondũ locũ alicuius progressionis Geometricæ ab vnitate incipientis, ita vt sit radix illius progressionis: consistit totum artificium huius regulæ Algebræ in eo, vt inueniat, quamnam progressionẽ Geometricam numerus quæsitus constituat; hoc est, in quanam progressione numerus, qui quæritur, locum vnitati proximum occupet. Iuxta igitur quæstionis tenorem examino 1 ℞. hoc est, sumo ipsius $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{3}$, hoc est, $\frac{1}{2}$ ℞. & $\frac{1}{3}$ ℞., quæ partes simul constituunt $\frac{5}{6}$ ℞. Aufero $\frac{5}{6}$ ℞. ex 1 ℞, remanet $\frac{1}{6}$ ℞. Iam si ratiocinor. Quoniam 1 ℞, posita est æqualis toti numero abscondito, qui quæritur, erit $\frac{1}{2}$ ℞. æqualis dimidio totius numeri, & $\frac{1}{3}$ ℞ tertiæ parti eiusdem. Et quoniam dimidio, ac tertia parte ex toto numero subtractis, reliquus numerus est 7; fit, vt $\frac{1}{2}$ ℞. & $\frac{1}{3}$ ℞ hoc est, $\frac{5}{6}$ ℞. detractis ex 1 ℞, reliquus numerus, nimirum $\frac{1}{6}$ ℞. æqualis sit reliquo numero 7, quia si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur, sunt æqualia. Inuenta est igitur Æquatio, siue Æqualitas inter $\frac{1}{6}$ ℞, & hunc numerum 7. atq; ita prima pars regulæ absoluta est, quæ ita habet. [*Pro numero incognito in quæstione ponatur 1 ℞, quæ iuxta quæstionis tenorem examinetur, donec Æquatio aliqua inueniatur.*]

*In quo consistat artificium regula Algebra.*

*Æquatio quid.*

Satis autem patet ex proposito exemplo, qua ratione iuxta tenorem quæstionis Æquatio inuenienda sit Est autem Æquatio, vt hic sumitur, nihil aliud, quam proportio æqualitatis inter duas quantitates, siue res varie denominatas. Vt in dato exemplo, proportio æqualitatis est inter $\frac{1}{6}$ ℞ & 7. quæ duo varie denominantur Nam cum duæ res æquales dicuntur, quæ eandem habent denominationem, est ea æqualitas, siue æquatio vel falsa, vt cum dico æquationẽ esse inter 5, & 7, aut inter $\frac{1}{6}$ ℞, & $\frac{1}{6}$ ℞ vel certe identitas quædam ad regulam Algebræ inutilis prorsus, vt cum dico, æqualitatem esse, seu æquationem inter 4 ℞, & 4 ℞, aut inter 7. & 7. Necesse est ergo, vt æqualitas ad regulam Algebræ pertinens sit inter duas res diuersorum nominum.

*Secũda pars regula Algebra*

Sequitur deinde in regula. [*Hæc reducatur, si reductione opus fuerit.*] Hoc est, Æquatio inuenta reducatur, si res postulauerit. Quando autem, & quomodo sit reducenda Æquatio, paulo post docebimus. Nunc certum sit, nostram Æquationem inter $\frac{1}{6}$ ℞. & 7. non indigere reductione.

*Tertia pars regula Algebra.*

QVARI. subiungit regula [*Deinde per numerum characteris Cossici maioris diuidatur reliquus æquationis numerus.*] Quoniam in omni Æquatione reperiuntur duo numeri inæqualiter denominati, præcipit regula Al[illegible] . vt per numerum maioris characteris Cossici diuidatur reliquus numerus æquationis. Non iubet vt di[illegible]iat per maiorem numerum Cossicum, sed per maioris characteris Cossici numerum. Nam Diuisor in hac regula, dum diuidit, abijcit characterem suum, alioquin Quotiens semper foret vnitas. Cum enim numerus maioris characteris Cossici, quando à charactere denominatur, æqualis sit reliquo æquationis numero perspicuum est, si alter per alterum ita diuidatur, produci vnitatem, propterea quod numerus quicunque in altero

numero

numero sibi æquali semel duntaxat continetur. Cur autem Diuisor huiusmodi abijciat suum signum Cossicum paulo inferius cap. 11. dicam, vbi hanc diuisionem, quæ in Algebræ regula præcipitur, plenius explanabimus. In nostra Æquatione inuenta inter $\frac{1}{6}$ ℞, & 7 N, maior character Cossicus est ℞, hoc est maiorem exponentem habet, quam N, cum huius exponens sit 0, illius vero 1. Per exponentes enim cognoscimus, vter character Cossicus maior sit, vel minor. Itaque diuidendus est hic numerus 7 N, per $\frac{1}{6}$, relicto charactere ℞, fitque Quotiens 42.

ADDITVR autem tandem in regula. [*Nam vel quotiens ipse erit numerus, qui quærebatur, pretium scilicet radicis in principio positæ, vel certe radix aliqua Quotientis numeri numerum qui quærebatur, notum reddet, &c.*] Quando, & quæ radix Quotientis manifestet numerum incognitum, qui quæritur, perpulchre docet maior character Cossicus, per cuius numerum diuisio instituitur, vt proprio loco docebimus. In proposito nostro exemplo non est extrahenda vlla radix, sed ipse Quotiens offert numerum, qui quærebatur. Itaque numerus, qui in problemate proponitur inueniendus, est 42. versaturque propositum problema in progressione Geometrica ab 1. incipiente, in qua numerus vnitati proximus est 42 qualis est hæc. *Quarta pars regulæ Algeb. 4.*

1. 42. 1764. 74088. 3111696. &c.

In hac enim sola apparet, veram esse vltimam æquationem inuentam inter $\frac{1}{6}$ ℞ & numerum 7. Iam vero si huius numeri 42. inuenti sumatur $\frac{1}{2}$, nimirum 21 & $\frac{1}{3}$. videlicet 14. atq; hæ partes ex ipso numero 42. detrahantur, fit reliquus numerus 7. id quod in quæstione proposita desiderabatur.

ATQVE hoc modo, inuento numero, qui inquirebatur, & vni radici ponebatur æqualis, institui potest examen, siue probatio, iuxta problematis, vel quæstionis propositæ tenorem. Sed problemate proposito, & explicatione regulæ pingui, vt diximus, Minerua, absoluta, declarandæ sunt deinceps singulæ partes regulæ exquisitius, ac clarius, vt facturos nos paulo ante recepimus.

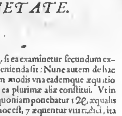
---

## *DE ÆQVATIONVM VARIETATE.*

## CAPVT IX.

SATIS constat ex ijs, quæ dicta sunt, vt ex positione 1 ℞, si ea examinetur secundum exempli pronuntiationem, æquatio inter duos numeros inuenienda sit: Nunc autem de hac æquatione plura dicenda erunt, vt intelligamus, quotnam modis vna eademque æquatio possit variari. Inuenta enim æquatione aliqua, poterunt ex ea plurimæ aliæ constitui. Vt in superiori exemplo, inuenta est æquatio inter $\frac{1}{6}$ ℞ & 7. Et quoniam ponebatur 1 ℞, æqualis toti numero inueniendo, fit vt $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ hoc est, $\frac{3}{6}$ ℞ & $\frac{2}{6}$ ℞, hoc est, 7 æquentur vni radici, ita vt æquatio sit inter $\frac{5}{6}$ ℞ + 7, & 1 ℞ iuxta hanc communem sententiam. Omne totum æquale est omnibus suis partibus simul sumptis. Sic etiam si $\frac{5}{6}$ ℞, dematur ex 1 ℞, & 7, ex toto numero 42, inuenta erit æquatio inter $\frac{1}{6}$ ℞. & 35. &c.

SED vt accuratius varias æquationum commutationes cognoscamus, sciendum est, omnem calculum, qui in hac Algebræ regula instituitur, fieri per lineas, superficies, atque corpora, quæ progrediuntur secundum proportionem aliquam Geometricam ab vnitate inchoatam, vt supra diximus. Apposite igitur variæ æquationes ex hac sequenti figura Geometrica intelligi possunt.



Est enim 1 ℞, linea quædam partium sub certo quodam numero, seu series quædam rerum quarumcunque sub numero aliquo determinato. Vt in hac figura quadrangulari, sex lineæ longitudinis, quarum quælibet partes habet 12; similiterque duodecim lineæ latitudinis, in quarum qualibet reperiuntur partes 6, videlicet. Vides autem primo, vt 6 ℞, longitudinis æquentur huic numero 72. quia sex lineæ, seu 6 ℞, longitudinis complent totam figuram continentem partes 72. Deinde cernis, vt 12 ℞, latitudinis eidem numero 72, æquales sint. Totam enim figuram habentem partes 72, constituunt 12 ℞, latitudinis, seu 12 lineæ latitudinis, vt patet. Sed in exemplum sumamus 12 ℞ latitudinis, vt æquatio sit inter 12 ℞ & 72. Et quoniam, si ab æqualibus æqualia auferantur, quæ remanent, æqualia sunt; si ex vtroque numero æquationis auferamus 4 ℞. remanebit adhuc æquatio inter 8 ℞, & 72 − 4 ℞. Nam 8 ℞ latitudinis in figura superiori continent partes 48. at 4 ℞. faciunt 24. Sublatis autem 24, ex 72. relinquuntur 48. Similiter, quoniam si æqualibus æqualia addantur, quæ fiunt, æqualia sunt; si vtrique parti huius vltimæ æquationis inter 8 ℞, & 72 − 4 ℞ addamus 10, inueniemus æquationem inter 8 ℞ + 10, & 82 − 4 ℞ Nam 8 ℞ + 10, faciunt 58, & tantundem efficiunt 82 − 4 ℞ vt constat. Quod si rursus vtrique parti huius æquationis inter 8 ℞ + 10, & 82 − 4 ℞ auferamus 4 ℞, remanebit æquatio inter 4 ℞ + 10, & 82 − 8 ℞. Nam ex superiori figura vtraque pars constituit 34. Ita quoque si ex huius æquationis vltimæ parte vtraque detrahamus 10. constituetur æquatio inter 4 ℞. & 72 − 8 ℞. Vtraque enim pars facit 24. Atque hac arte ex vna æquatione inuenta sexcentæ aliæ possunt constitui, non variato valore, seu pretio vnius radicis. *Variæ permutationes æquationum.*

SVMMA autem huius variationis in hoc præcepto consistit.

*Vtrique termino Æquationis idem commune addatur, aut ab vtroque idem commune subtrahatur; aut certe vterque terminus per eundem numerum multiplicetur, diuidaturve. Ita enim remanebit illæsa æquatio sub terminis mutatis.* *Præceptum variationis æquationum.*

IN qua quidem Additione, Subtractione, Multiplicatione, ac Diuisione in memoriam reuocanda sunt documenta illa, quæ de signis istis +, & −, tradidimus. Variatio superiorum æquationum facta est per additionem, & subtractionem eiusdem numeri ab vtroque termino æquationis: Nunc subijciemus alterum

exemplum

exemplum multiplicationis,& diuisionis. Sit igitur ex eadem figura superiori inuenta æquatio inter 3 ℞ + 12, & 72 − 7 ℞. Quod si vtrunque terminum multiplicemus per 2, efficiemus æquationem inter 6 ℞ + 24 & 144 − 14 ℞. Nam vterque terminus facit 60. Sic etiam, si vtrunque terminum huius posterioris æquationis diuidamus per 6, prodibit æquatio inter 1 ℞ + 4, & 24 − 2⅓ ℞. Vt perspicuum est.

## DE REDVCTIONE ÆQVATIONIS.

## CAPVT X.

QVANDO in solutione alicuius quæstionis ad Æquationem deuentum fuerit, ita vt per numerum, maioris characteris Cossici reliquus Æquationis numerus diuidi non possit, vt regula Algebræ præcipit; reducenda est Æquatio inuenta prius, quam Diuisio instituatur. Tunc autem Diuisio fieri non potest, cum maior character Cossicus, per cuius numerum fieri debet diuisio, vel non solus ponitur in altera parte æquationis, vel etsi solus ponitur, tamen in reliqua quoque parte idem character reperitur, vt ex his exemplis perspicuum fiet. Sit inuenta æquatio inter 9 ℞ − 12, & 42. Hic vides diuisionem fieri non posse per 9. numerum videlicet maioris characteris Cossici ℞, quia non solum 9 ℞, constituunt alteram æquationis partem, sed 9 ℞ − 12. Sic quoque, si æquatio fuerit inter 9 ℞. & 72 − 3 ℞; non poterit diuisio fieri per 9, numerum scilicet huius characteris ℞, quia licet solus hic numerus 9 ℞. occupet alteram partem æquationis, idem tamen character ℞, in altera quoque parte æquationis reperitur. Similiter inuenta æquatione inter 9 ℞ + 12, & 78 − 2 ℞., diuisio nulla fieri potest, quod in vtraque parte æquationis reperiatur & character hic ℞. & hic N. Idem iudicium de alijs æquationibus huiusmodi habeto, qualis est inter 1 ʒ − 3 ℞, & 108, Item inter 1 ʒ − 48, & 8 ℞. Item inter 108 + 8 ℞, & 2 ʒ − 12 ℞ + 60. &c.

*Variæ æquationes reducendæ.*

Omnes hæ æquationes, in quibus valor radicis est 12. & similes aliæ, reducendæ sunt ad alias, in quibus maior character Cossicus in altera parte æquationis solus statuatur, & in altera parte amplius non repetatur & in quibus nullus character Cossicus bis ponatur. Fit autem hæc reductio per variationem illam, seu permutationem particularum æquationis, quam in præcedenti cap. descripsimus. Vt æquatio inter 9 ℞ − 12, & 42, reducitur per restaurationem huius diminuti − 12. hoc est, per additionem huius numeri 12, ad vtramque partem, ad hanc inter 9 ℞ & 54 Ita etiam æquatio inter 9 ℞. & 72 − 3 ℞, per restaurationem huius diminuti − 3 ℞, hoc est, per additionem 3 ℞. ad vtramque partem, reuocatur ad æquationem inter 12, ℞ & 72. Pari ratione æquatio inter 9 ℞ + 12, & 78 − 2 ℞, primo per restaurationem diminuti huius − 2 ℞, seu additionem 2 ℞, ad vtramque partem, reducitur ad æquationem inter 11 ℞ + 12, & 78. Secundo hæc per transpositionem huius additi + 12, hoc est. per subtractionem 12, ex vtraque parte, reducitur ad æquationem inter 11 ℞, & 66.

*Æquationes ita reducendæ sunt, vt maior character solitarie in vna parte ponatur, &c.*

*Reductiones variarum æquationum.*

RVRSVS æquatio inter 1 ʒ − 3 ℞. & 108, reducitur per restaurationem diminuti huius − 3 ℞, ad æquationem inter 1 ʒ, & 3 ℞ + 108. vtrique enim parti additæ sunt 3 ℞. Sic etiam æquatio inter 1 ʒ − 48, & 8 ℞. reducitur per restaurationem huius diminuti − 48, hoc est, per additionem 48. ad vtramque partem, ad istam inter 1 ʒ, & 8 ℞ + 48. Denique æquatio inter 108 + 8 ℞. & 2 ʒ − 12 ℞ + 60, reducitur primo per restaurationem − 12 ℞, ad æquationem inter 108 + 20 ℞ & 2 ʒ + 60. Secundo hæc per transpositionem + 60, id est, per ablationem 60, ex vtraque parte, reducitur ad æquationem inter 2 ʒ. & 20 ℞ + 48 Itaque omnis reductio æquationum, vt expeditior fiat, initium sumere debet à restauratione diminuti, si quod fuerit, hoc est, numerus ille, qui hoc signum − gerit, vtrique parti æquationis addi debet. Deinde transponendus est numerus signum + gestans, ex vna parte in alteram, hoc est, ex vtraque parte est detrahendus. Quæ quidem restauratio, seu additio, & transpositio, seu subtractio, quamuis recte fiat per regulam additionis, & subtractionis, vt ex dictis patet. tota tamen ars reductionis continetur in his duobus præceptis, quorum primum est.

*Quicquid transponitur, mutat signum.* Hoc est particula æquationis habens signum −, transposita in alteram partem acquirit signum +. nimirum additur alteri parti. Particula vero gerens signum +, transposita mutat + in −, id est. subtrahitur. Quod quidem in omnibus reductionibus præmissis obseruatum est. Quod si particula illa, quæ transponitur, habuerit similem denominationem in altera parte, in quam est transponenda, vsurpandum erit secundum hoc præceptum.

*Primum præceptum reductionum.*

*Eadem signa subtrahunt, diuersa vero addunt.* Hoc est, si particula æquationis transponenda gerens signum quodcunque ex his duobus +, −, habuerit in altera parte æquationis numerum maiorem eiusdem denominationis cum eodem signo, subtrahendus est numerus illius particulæ ab hoc numero, relinquendumque est idem signum, quod habet numerus, à quo fit subtractio: Vnde inchoanda erit transpositio à minori numero. Si vero particula transferenda habuerit in altera parte numerum eiusdem denominationis cum opposito signo, addendus est numerus illius particulæ huic numero, relinquendumque est idem signum, quod habet numerus, ad quem fit additio. Atque vt vtriusq; regulæ vsus melius intelligatur, reducemus adhuc vnam aut alteram æquationem. Sit æquatio inter 6 ℞ − 10, & 10 ℞ − 34. quoniam igitur numeri 10. & 34. habent idem signũ −, propterea, vt minor 10. transferatur, auferendus est numerus 10, ex 34. atque ita remanebit æquatio inter 6 ℞ & 10 ℞ − 24. Rursus quia numeri 10 ℞, & 6 ℞, idem habẽt signũ +, idcirco minor 6 ℞, à maiori 10, ℞ aufertur, vt maneat æquatio inter 0 ℞, & 4 ℞ − 24. Deniq; transponendo − 24, erit æquatio inter 24, & 4 ℞. Sit rursum æquatio inter 54 + 4 ℞, & 1 ʒ − 6 ℞ + 30. Primũ quia + 4 ℞, & − 6 ℞, diuersa signa habent, propterea adduntur 4 ℞. ad 6 ℞, vt fiant − 10 ℞, sitque æquatio inter 54, & 1 ʒ − 10 ℞ + 30. Deinde quia 54, & + 30. idem signum + habent, ideo subtrahuntur 30, à 54, vt maneat æquatio inter 24, & 1 ʒ − 10 ℞. Tertio transpono − 10 ℞, vt sit æquatio inter 1 ʒ, & 10 ℞ + 24. & sic de cæteris.

*Secundum præceptum reductionum.*

ITAQVE

*Summa reductionis.*

ITAQVE colligitur ex ijs, quæ diximus, totum negotium reductionis in transpositione particularum esse positum; Transpositionem autem istam ex proxime dictis documentis pendere. Oblata enim æquatione aliqua, in qua numerus characteris maioris Cossici non solus vnam partem æquationis constituit, sed ei coniunctus est alius numerus Cossicus minoris denominationis, transferendus est hic in alteram partem, iuxta præceptum quidem primum, si in altera parte, in quam transfertur, non reperiatur numerus eiusdem denominationis: At vero si altera pars æquationis, in quam fieri debet hæc transpositio, habuerit eiusdem denominationis numerum, peragenda est hæc translatio iuxta alterum documentum, quæ omnia in superioribus exemplis obseruata esse vides. Denique eousque continuanda est æquatio, addendo, auferendo, & transponendo, quoad maioris characteris numerus in vna parte solitarius conspiciatur.

*Securior est reductio sine duobus præceptis prædictis.*

VOLO autem studiosum hoc loco esse monitum, hæc duo præcepta solum inuenta esse pro compendio reductionis. Nam qui additionis & subtractionis regula vult esse contentus, potest citra omne incommodum illis carere. Quod etiam nonnullis consulerem, ne hæc præcepta cum præceptis additionis, & subtractionis confundant, id quod sæpe accidere solet, præsertim tyronibus huius artis.

*Reductio æquationum inter Minutias, & inter numeros Cossicos irrationales, & numeros absolutos inuentam.*

SED agamus iam de reductione illarum æquationum, quæ inter Minutias reperiuntur. Omnis autem eiusmodi æquatio reducitur ad æquationem integrorum per multiplicationem in crucem. Sit inuenta æquatio inter has Minutias (9℞+36)/5 ✕ (36ℨ−198℞)/1℞. Multiplicentur in crucem, nempe numerato prioris Minutiæ in denominatorem posterioris ducatur, & denominator prioris in numeratorē posterioris; eritque facta æquatio inter 9ℨ+36℞ & 180ℨ−990℞. Hoc est per abbreuiationem characterū, inter 9℞+36, & 180℞−990. & per abbreuiationem numerorum, inter 1℞+4, & 20℞−110 Quod si fiat reductio per transpositionem, vt nuper tradidimus, erit eadem hæc æquatio inter 19℞. & 114.

SIC æquatio inter (4℞+18)/1℞ & (12℞−58)/2, reducitur per multiplicationem in crucē ad hanc inter 8℞+36, & 12ℨ−58℞ Quæ si per transpositionem reducatur, erit eadem æquatio inter 66℞+36, & 12ℨ.

QVOD si æquatio inuenta sit inter hanc minutiam 628/(186+1℞) & quamcunque aliam rem, vt libram, vel vnciam, vel horam, vel gradum, vel minutum, &c. sumenda est hæc res tanquam integrum aliquod, & pro ea vnitas cōstituenda, cui alia vnitas supponatur, vt fiat fractio. Vnde in dato exemplo erit æquatio inter 628/(186+1℞) & 1/1 quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 628, & 186+1℞.

*Demonstratio reductionis æquationum inter minutias.*

DEMONSTRATIO reductionis æquationū inter Minutias perfacilis est. Quoniam.n. duę Minutiæ ponuntur æquales, erit eadem proportio numeratoris Minutiæ prioris ad denominatorem eiusdem, quæ numeratoris Minutiæ posterioris ad denominatorem eiusdem. Quare si Minutiæ per crucem multiplicentur, hoc est, numerator prioris Minutiæ in denominatorem posterioris ducatur, & denominator prioris in numeratorem posterioris, nempe primus numerus in quartum, & secundus in tertium, producti erunt numeri æquales: atque adeo Æquatio innenietur inter illos numeros productos, Quod erat demonstrandum.

QVO pacto autem æquatio inter numerum Cossicum irrationalem, & numerum absolutum, vt inter √ℨ 24 ℞ & 12. vel inter √ℨ 10 ℨ. & 20. reducenda sit, docebimus ad finem cap. 26. vbi de huiusmodi numeris acturi sumus.

*Characteres abbreuiandi sunt vt habeatur numerus absolutus in vna parte æquationis.*

SI occurrat tandem æquatio, in qua nullus sit numerus absolutus, abbreuiandi erunt characteres Cossici vt cap. 7. docuimus. Vt æquatio inter 2ℨ, & 12℞ reducenda est ad æquationem inter 2℞, & 12.

SIMILITER æquatio inter 1ℨℭ, & 1ß+35156ℨℨ. reducenda est ad æquationem inter 1ℨ. & 1℞+35156.

Item æquatio inter 1ß, & 1ℨℨ+35156ℭ, reducenda est ad æquationem inter 1ℨ & 1℞+35156.

Item æquatio inter 1ℨℨ. & 1ℭ+35156ℨ, reducenda est ad æquationem inter 1ℨ. & 1℞+35156.

Item æquatio inter 1ℭ. & 1ℨ+35156℞, reducenda est ad æquationem inter 1ℨ. & 1℞+35156. & sic de alijs huiusmodi.

VERVM hæc abbreuiatio non est omnino necessaria, vt in cap. 12. dicemus ante extractiones radicum numerorum Cossicorum simplicium.

*Reducenda est æquatio per diuisionem, vt numerus maioris characteris solitarius positus sit vnitas.*

POSREMO si facta reductione æquationis, vt maior character Cossicus ponatur solus ex altera parte æquationis, qui maior sit quā ℞, qualis est ℨ, vel ℭ vel ℨℨ, &c. diuidendi erunt omnes numeri æquationis per numerum illius characteris Cossici maioris, si non est vnitas; ita vt vnitas ab illo charactere Cossico denominata æqualis sit alteri parti æquationis. Vt si æquatio sit inuenta inter 4ℨ. & 8℞+96. diuidendi erunt singuli numeri per 4. vt reducatur æquatio ad æquationem inter 1ℨ. & 2℞+24.

Item æquatio inter 12ℨ. & 66℞+36. reducenda est per diuisionem ad æquationem inter 1ℨ. & 5½℞+3. &c.

RATIO huius reductionis obscura non est. Cum enim singuli numeri per eundem numerum diuidantur, nempe per numerum maioris characteris Cossici, habebunt Quotientes eandem proportionem, quam numeri diuisi. Quamobrem, quemadmodum inter numeros diuisos, ita & inter Quotientes Æquatio necessario reperietur.

CÆTERVM hæc reductio fiet, si iuxta tenorē regulæ Algebræ diuisio instituatur per numerum maioris characteris, ipso charactere abiecto, retentis tamen characteribus numerorum, qui diuiduntur, vt cap insequenti dicetur: adeo vt hæc reductio, de qua proxime diximus, superuacanea esse videatur, quandoquidem Diuisio, quæ in regula Algebræ præcipitur, eam nobis exhibeat. Quia tamen alij auctores eam reductionem necessariam esse docent, libuit eam etiam hic explicare, quamuis, vt diximus, eam diuisio iuxta legem regulæ Algebræ, commodissime quoque offerat.

## DE DIVISIONE, QVAM PRÆCIPIT *regula Algebræ.*

## CAPVT XI.

*Explicatio plenior diuisionis, quã regula Algebra præcipit.*

FACTA reductione æquationis, vbi id res postulat, quemadmodum cap. præcedenti docuimus, præcipit regula Algebræ, vt per numerum maximi characteris Coſſici, abiecto charactere, totus reliquus æquationis numerus diuidatur, vna cum characteribus Coſſicis. Eſt autem hæc diuiſio compendium quoddam regulæ illius aureæ proportionum, quam trium appellant. Nam ſi exempli gratia 7 ℛ, æquales ſint huic numero 42. inquirendum eſt, cui numero 1 ℛ æqualis ſit. Quare iuxta doctrinam regulæ trium, multiplicantur inter ſe 42, & 1 ℛ, producunturq; 42 ℛ, quibus diuiſis per 7 ℛ, prodeunt 6. pro æſtimatione vnius radicis. Quando enim Coſſicus numerus per numerum Coſſicum eiuſdem characteris diuiditur, producitur numerus abſolutus, vt ex ijs conſtat, quæ cap. 5. ſcripſimus; quia nimirum exponentes æquales ſunt, ac proinde detracto vno ex altero, remanet 0, exponens numeri abſoluti. Hinc eſt, quod regula Algebræ abſolute docet, per numerum maioris characteris Coſſici diuidendum eſſe alterum numerum æquationis. Nam hac ratione idem numerus producitur, qui per proportionum regulam produceretur. Vt ex propoſito exemplo conſtat. Idem enim numerus producitur ex diuiſione 42 ℛ, per 7 ℛ, qui ex diuiſione 42, per 7.

SIMILITER ſi 12 ʒ, æquales ſint 66 ℛ + 36, inquirendum eſt, cui numero æqualis ſit 1 ʒ. Quare multiplicantur inter ſe 66 ℛ + 36. & 1 ʒ, producunturque 66 ȼ + 36 ʒ: quibus diuiſis per 12 ʒ, vt iubet regula trium proueniunt 5 $\frac{1}{2}$ ℛ + 3. pro pretio vnius Zenſi, ſeu quadrati. Idem hic numerus producetur, ſi per 12 ʒ abiecto prius charactere hoc ʒ, diuidantur 66 ℛ + 36. vt conſtat propterea ait regula Algebræ, per numerum maioris characteris Coſſici diuidendum eſſe ſimpliciter reliquum æquationis numerum, ne longior operatio per regulam trium inſtituatur. Eodem modo ſi $\frac{1}{3}$ ʒ. & 6 ℛ + 13 $\frac{1}{3}$. æquales ſint, quærendum eſt, quanta ſit æſtimatio vnius Zenſi vel quadrati. Quod quidem fiet, iuxta legem regulæ Algebræ, diuidendo ſingulos numeros per $\frac{1}{3}$, numerum ſcilicet maximi characteris. Qua ratione inuenietur æquatio inter 1 ʒ. & 18 ℛ + 40. hoc eſt, pretium 1 ʒ. erit 18 ℛ + 40.

Item ſi æquatio inueniatur inter 3 ʒȼ. & 600 ȼ + 10368 indagandum eſt pretium vnius zenſicubi. quod per regulam trium fiet, ſi dicatur. Si 3 ʒȼ. dant 600 ȼ + 10368. quid dabit 1 ʒȼ? Multiplicando enim duos poſteriores numeros inter ſe, producetur numerus 600 ȼȼ + 10368 ʒȼ. quo diuiſo per primum numerum, videlicet per 3 ȼ fiet Quotiens 200 ȼ + 3456. eritque æquatio inter 1 ʒȼ & 200 ȼ + 3456. quæ facilius inuenitur, ſi ſinguli numeri huius æquationis inter 3 ʒȼ. & 600 ȼ + 10368. diuidantur per 3. nimirum per numerum maioris characteris, vt ad finem antecedentis cap. ſcripſimus. Ita enim opus non erit adhibere regulam trium: ſed ſatis erit, vt per numerum maioris characteris, abiecto charactere, ſinguli numeri alterius partis æquationis vna cum characteribus diuidantur, vt regula Algebræ iubet.

QVOD ſi diuiſor fuerit vnitas denominata à maiore charactere Coſſico, non opus eſt diuiſione, quoniam vnitas diuidens nihil noui producit. Vt ſi 1 ʒ, æqualis ſit 3 ℛ + 18 &c. Quare operæ pretium eſt, vt æquatio reducatur, ita vt numerus maioris characteris ſit vnitas, quemadmodum ad finem præcedentis cap. docuimus.

QVOD autem, quando vnitas denominatur à maiore charactere, diuiſione non ſit opus, liquido conſtat ex regula trium. Nam in hac æquatione inter 1 ʒ. & 3 ℛ + 18. ſi dicatur. Quando 1 ʒ. dat 3 ℛ + 18. quid dabit 1 ʒ? erit identitas, & nugatio. Nam ex multiplicatione 3 ℛ + 18. per 1 ʒ. fit numerus 3 ȼ + 18 ʒ. qui diuiſus per 1 ʒ facit 3 ℛ + 18. vt ex lege multiplicationis, atque diuiſionis liquet.

---

## DE EXTRACTIONE RADICVM CVIVS *mentionem facit regula Algebræ.*

## CAPVT XII.

*Quando quotiens indicat pretium radicis.*

DOCENDVM eſt vltimo loco, quando numerus Quotiens Diuiſionis numerum ignotum, qui quæritur, patefaciat, & quando radix aliqua Quotientis & quænam eundem numerum abſconditum indicet. Quando igitur, facta reductione characterum Coſſicorum, maior character Coſſicus fuerit ℛ, tunc numerus quotiens continuo numerum, qui quæritur, manifeſtum facit. Vt ſi 5 ℛ, æquales ſint 30. facta diuiſione 30. per 5. dabit Quotiens nempe 6, pretium vnius radicis; vt ad initium præcedentis cap dictum eſt. Immo quotieſcunque numerus Coſſicus maioris denominationis æquatur numero Coſſico proxime minoris denominationis, diuiſo numero minoris denominationis per maioris denominationis numerum, dabit Quotiens valorem vnius radicis, etiamſi non ſit facta abbreuiatio characterum: quia huiuſmodi æquatio per abbreuiationem characterum reducitur ad æquationem inter ℛ & N. Vt ſi 5 ʒ. æquentur 30. ℛ, diuiſis 30. per

30 per 5. fit Quotiens 6. pro pretio vnius radicis. Nam hæc æquatio reducitur ad æquationem inter 5 ℞. & 30. si characteres abbreuientur. Quod etiam ex regula trium manifestum est. Nam si dicatur. Si 5 ß. dant 30 ℨℨ. quid dabit 1 ℞? multiplicando 30 ℨℨ. per 1 ℞. fiunt 30 ß. quibus diuisis per 5 ß. fit Quotiens 6. numerus absolutus. Eademque ratio est de cæteris numeris Cossicis collateralibus. Ratio huius rei est, quod in omni progressione Geometrica incipiente ab 1. eadem semper est proportio cuiuscunque numeri ad proxime antecedentem, quæ secundi ad primum, hoc est, radicis ad vnitatem.

SI vero maximus character Cossicus æquationis, qui solus ex vna parte æquationis statuitur, maior sit, quam ℞. & numerus absolutus sit in altera parte, extrahenda est ex Quotiente radix, quam ipse character significat. Vt si character sit ℨ. extrahenda est radix Zensica, siue quadrata. si ℭ, cubica: si ℨℨ, Zensizensica: si ß, Surdesolida, &c. Quia in huiusmodi æquationibus ex diuisione inuenitur æstimatio vnius zensi, vel cubi, vel zensizensi, &c. Exempli gratia, si æquatio sit inter 2 ℨ. & 144 − 12 ℞. erit (facta prius diuisione, vt 1 ℨ. æqualis sit 72 − 6 ℞.) extrahenda radix quadrata ex 72 − 6 ℞. Similiter, si æquatio sit inter 1 ℨ. & 6 ℞ + 72, vel 72 + 6 ℞. eruenda erit quadrata radix ex 6 ℞ + 72, vel ex 72 + 6 ℞. Sic etiam, si æquatio inueniatur inter 5 ℨ. & 720. erit, facta diuisione, quærenda radix quadrata ex Quotiente hoc 144. Item si 10 ℭ. æquales sint 466560, inuenienda erit, facta diuisione, radix cubica huius Quotientis 46656. & sic de cæteris. Vt autem generaliter sciatur, quænam radix eruenda sit ex quotiente, quando duo numeri Cossici non collaterales inter se æquantur, quorum neuter est numerus absolutus, abbreuiandi sunt characteres, vt æquatio fiat inter N. & numerum Cossicum. Vt si æquatio sit inter 10 ℨℭ. & 466560 ℭ. reducetur ea ad æquationem inter 10 ℭ & 466560. Facta ergo diuisione, eruenda erit radix cubica ex Quotiente 46656. Et sic de cæteris. Ratio est, quia per diuisionem inuenitur valor vnius cubi, vel alterius numeri Cossici, ad quem facta est abbreuiatio per characteres. Nam si dicas. Si 10 ℨℭ dant 466560. quid dabit 1 ℨℭ? facies ex multiplicatione secundi numeri in tertium, 466560 ℨℭ. quibus diuisis per 10 ℨℭ fit Quotiens 46656. valor vnius cubi &c.

*Quãdo, & quæ radix sit extrahenda, quãdo alter numerorum æquationis est numerus absolutus.*

*Quænam radix sit extrahenda, quãdo duo numeri Cossici non collaterales inter se æquãtur, quorũ neuter est numerus absolutus.*

DENIQVE quando duo numeri Cossici non collaterales inter se æquantur, vt cognoscas, quænam radix, facta diuisione minoris numeri Cossici per maiorem, ex Quotiente sit eruenda, etiamsi characteres non abbreuientur: vide quot denominationes in progressione Geometrica inter propositos duos numeros Cossicos sint interiectæ. Nam si vna tantum est intermedia, extrahenda est radix quadrata: si duæ, cubica: si tres, Zensizensica, &c.

*Qualis radix sit extrahenda, etiamsi characteres non abbreuientur.*

CÆTERVM quarte radices ex numeris absolutis sint extrahendæ, copiose satis in Geometria practica exposuimus, nunc vero explicandum est, quonam modo ex numeris Cossicis sint eliciendæ.

SI igitur extrahenda est radix aliqua ex numero Cossico simplici, sumatur proposita radix illius numeri, relicto charactere, ac si absolutus esset. Deinde exponens characteris eiusdem numeri diuidatur per exponentem characteris, à quo radix extrahenda denominatur, inuenieturque exponens characteris, à quo radix quæsita denominabitur. Vt si inuenda radix quadrata huius numeri 144 ℨ. Sumpta radice quadrata ipsius numeri 144. quæ est 12. diuidatur exponens huius characteris ℨ, per exponentem characteris, à quo videlicet radix quadrata, quæ quæritur, denominatur nimirum 2. per 2. proueniet enim 1, pro exponente characteris ℞. Est ergo 12 ℞. radix quadrata huius numeri 144 ℨ. Nam si hic numerus 12 ℞. in seipsum multiplicetur, producetur numerus propositus 144 ℨ.

*Extractio radicum ex numeris Cossicis simplicibus.*

RVRSVS sit eruenda radix quadrata ex 144 ℨℭ. Accepta radice quadrata numeri, nempe 12. diuidatur exponens characteris huius ℨℭ. nempe 6, per exponentem radicis quadratæ, nimirum per 2, reperieturque exponens 3. cuius character est ℭ. Igitur 12 ℭ. radix quadrata est huius numeri 144 ℨℭ.

SIC quoque radix cubica huius numeri 64 ℭ. erit 4 ℞. Nam radix cubica numeri huius 64, est 4 & exponente huius characteris ℭ, nempe 3, diuiso per 3. exponentem scilicet characteris, à quo radix cubica nomen sumit, producitur vnitas, exponens videlicet huius characteris ℞.

Item radix quadrata huius numeri 25 ℨℨ. erit 5 ℨ.

Et radix Zensizensica huius numeri 16 ℨℨℨ, erit 2 ℨ.

Et radix Surdesolida numeri huius 32 ℨß, erit 2 ℨ.

Et radix Zensizensica huius numeri 81 ℨℨ, erit 3 ℞. &c.

QVOD si vel numerus non habeat radicem, quæ inquiritur, vel ex diuisione exponentium non producatur numerus exponens integer, carebit propositus numerus Cossicus radice illa, quæ desideratur. Vt numerus 25 ℭ non habet radicem quadratam, vel cubicam, quia etiamsi numerus 25. habeat radicem quadratam nempe 5. tamen ex diuisione 3. exponentis scilicet huius characteris ℭ, per 2, exponentem quadratæ radicis, prouenit numerus 1½, cui nullus character respondet. Rursus etsi ex diuisione 3, exponentis huius characteris ℭ. per 3. exponentem radicis cubicæ, proueniat 1, exponens characteris huius ℞. tamen numerus 25. caret radice cubica, &c.

QVOD vero attinet ad extractiones radicum ex numeris Cossicis compositis, & diminutis, sciendum est, tunc solum posse certa via & arte ex eiusmodi numeris extrahi radices, quando tres numeri Cossici æquationis habent exponentes, qui eundem inter se excessum habeant: hoc est, qui sint Arithmetice proportionales. Quales sunt sequentes æquationes.

*Qui numeri compositi habeant radices.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. ℨ. | 6 ℞ + 72. | Exponentes sunt. | 2. 1. 0. |
| 1. ℨ. | 72 − 6 ℞. | Exponentes sunt. | 2. 0. 1. |
| 2. ℨ. | 142 ℞ − 48. | Exponentes sunt. | 2. 1. 0. |
| 1. ℨℨ. | 18 ℨ + 648. | Exponentes sunt. | 4. 2. 0. |
| 1. ℨℨ. | 725 − 4 ℨ. | Exponentes sunt. | 4. 0. 0. |
| 1. ℨℨ. | 433 ℨ − 41616. | Exponentes sunt. | 4. 2. 0. |
| 1. ℨℭ | 200 ℭ + 3456. | Exponentes sunt. | 6. 3. 0. |
| 1. ℨℭ. | 5120 − 16 ℭ. | Exponentes sunt. | 6. 0. 3. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.ʒℭ. | 800ℭ−156751. | Exponentes ſunt. | 6. 3. 0. |
| 1.ʒʒʒ. | 2000ʒʒ+185076881. | Exponentes ſunt. | 8. 4. 0. |
| 1.ʒʒʒ. | 214651701−20ʒʒ. | Exponentes ſunt. | 8. 0. 4. |
| 1.ʒʒʒ. | 20000ʒʒ−7846119. | Exponentes ſunt. | 8. 4. 0. |
| 1 ʒß. | 80ß+39609. | Exponentes ſunt. | 10. 5. 0. |
| 1.ʒß. | 7424−200ß. | Exponentes ſunt. | 10. 0. 5. |
| 1.ʒß. | 2000ß−999424. | Exponentes ſunt. | 10. 5. 0. &c. |

Quando exponentes Arithmeticam progreſſionem ſeruantes omnes ſunt maiores quam 0. abbreuiandi ſunt per ſubtractionem minimi numeri exponentis. Vt hæ ſequentes æquationes.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.Cß. | 725Bß−4Cℭ. | Exponentes ſunt. | 11. 7. 9. |
| 1.Cß. | 200ʒʒʒ+3456ß. | Exponentes ſunt. | 11. 8. 5. |
| 1.ʒß. | 200ʒℭ+14336ʒ. | Exponentes ſunt. | 10. 6. 2. |

reducuntur ad has.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.ʒʒ. | 725−4ʒ. | Exponentes ſunt. | 4. 0. 2. |
| 1.ʒℭ. | 200ℭ+3456. | Exponentes ſunt. | 6. 3. 0. |
| 1.ʒʒʒ. | 200ʒʒ+14336. | Exponentes ſunt. | 8. 4. 0. |

Et ſic de alijs infinitis dicendum eſt. Ita enim facile cognoſcetur, quænam radix eruenda ſit.

*Qui numeri Coſſici cōpoſiti non habeat radices.*

QVANDO autem exponentes non ſeruant Arithmeticam proportionalitatem, hoc eſt, non habent eundē exceſſum, vt ſi æquatio foret inter 1 ℭ, & 4ʒ+16. vbi exponētes ſunt 3. 2. 0. Vel inter 1. ℭ. & 10℞+24. vbi exponentes ſunt 3. 1. 0. nondum eſt inuenta ars, qua huiuſmodi radices certo eruantur; quamuis Cardanus, & Nicolaus Tartalea in quibuſdam exemplis ſingularibus inuenerint æſtimationem vnius radicis. Raphael autem Bombellus ex quibuſdam etiam æquationibus eiuſmodi, & alijs nonnullis putat ſe inueniſſe, quo pacto eruendæ ſint radices. Franciſcus quoque Vieta dicitur demonſtraſſe regulam generalem pro eiuſmodi radicibus extrahendis: quam quia videre hactenus non licuit, & rationes Bombelli obſcuræ valde ſunt, atque æquationes eiuſmodi, in quibus nimirum plures numeri Coſſici quam duo æquantur vni numero Coſſico, (qualis eſt V. g. æquatio inter 1 ℭ+3ʒ+72℞ & 34) numero fere infinitæ exiſtunt, & quæ raro in vſum veniunt, patiunturque, ipſo teſte, non paucas exceptiones, contenti erimus in hac noſtra Algebra ijs, quæ facilem, certam, atque exploratam habent ſcientiam, id eſt, explicabimus tantummodo extractiones radicum ex numeris Coſſicis prioris generis, quando nimirum vnus numerus Coſſicus duobus æquatur, exponenteſque ſeruant proportionalitatem Arithmeticam: quippe cum hæ ſatis ſint ad innumera fere numerorum ænigmata diſſoluenda.

AC primo quidem agemus de extractione radicum ex ijs numeris, quorum exponentes ſunt 2 1 0, vel 2. 0. 1, quæ omnes quadratæ ſunt. Deinde vero de inuentione radicum illorum numerorum dicemus, quorum exponentes ſunt 4. 2. 0. vel 6. 3 0 vel 8. 4 0. vel 10. 5. 0. &c. quæ quidem radices ſunt vel Zenſizenſicæ, vel Zenſicubicæ, vel Zenſizenzenſicæ, vel Zenſurdeſolidæ, &c. vt maximi characteres æquationum indicant. Hæ enim æquationes omnes exploratam, ac certiſſimam habent ſcientiam, qua earum radices inueniantur.

HAC igitur arte per Michaelem Stifelium nobilem Arithmeticum radices quadratæ eruuntur ex compoſitis, ſiue diminutis numeris Coſſicis.

*Extractio radicis quadratæ ex Coſſico numero compoſito vel diminuto.*

1. *Dimidium numeri radicum ſume.*
2. *Ad huius dimidij quadratum adde, vel ab eodem ſubtrahe numerum abſolutū, prout ſigno + vel − fuerit affectus.*
3. *Ad huius ſummæ, vel relicti radicem quadratam adde, vel ab eadem ſubtrahe dimidium numeri radicum, prout radicum numerus ſigno + vel − fuerit notatus. Nam vltima hæc ſumma, vel relictum dabit æſtimationem, & pretium vnius radicis quadratæ.*

SIT æquatio inuenta inter 1 ʒ, & 72−6℞. Facta diuiſione 72−6℞, per 1, vt iubet regula Algebræ prodit idem numerus, pretium videlicet vnius Zenſi, cuius radicem ita inueniemus.

Primum ſumo dimidium numeri radicum, nimirum 3.

Deinde ad huius dimidij quadratum, vt ad 9, addo abſolutum numerum 72, propterea quod gerit ſignum +, facioque 81.

Tertio à radice quadrata huius ſummæ 81, nempe à 9, detraho dimidium numeri radicum, puta 3. Nam numerus radicum ſigno − affectus eſt, relinquuntúrque 6. pro æſtimatione radicis quæſitæ. Quod ſic probatur. Si 1 ℞, eſt 6, erunt 6 ℞. 36, quibus ſublatis ex 72, remanent 36, quibus æqualis eſt quadratus numerus huius radicis 6.

SIT rurſus æquatio inuenta inter 1 ʒ. & 6 ℞+72. Inuenienda igitur eſt radix quadrata huius numeri 6℞+72.

Primum capio dimidium numeri radicum, puta 3.

Deinde ad huius dimidij quadratum, vt ad 9, addo 72, propter ſignum +, quod gerit numerus abſolutus, facioque 81.

Tertio ad radicem quadratam huius ſummæ 81, nimirum ad 9, adijcio dimidium numeri radicum, nempe 3; affectus enim eſt numerus radicum ſigno +, efficioque 12, pro pretio radicis. Quod ita confirmatur. Cum 1 ℞, eſt 12, erunt 6 ℞. 72, quibus additis ad 72, fiunt 144, quibus æqualis eſt numerus quadratus radicis 12.

SIT

SIT denique inuenta æquatio inter 1 ʒ. & 18 ℞ − 72. Quærenda ergo est radix huius quadrati 18 ℞ − 72.

Primum accipio dimidium numeri radicum, nimirum 9.

DEINDE ab huius dimidij quadrato, puta ab 81, deduco 72, propter signum −, quod præponitur numero absoluto, relinquunturque 9.

Tertio ad radicem quadratam huius relicti 9, hoc est, ad 3, addo dimidium numeri radicum, vtpote 9. Gerit namque numerus radicum signum +. efficioque 12, pro valore radicis. Quod hac ratione patet. 18 ℞, faciunt 216, si 1 ℞, est 12. ablatis igitur 72, ex 216, remanent 144. quibus æqualis est numerus quadratus radicis inuentæ 12.

SED hoc loco monendus lector est, huiusmodi numeros Cossicos Diminutos, in quibus numerus absolutus gerit signum −, habere duplicem radicem, quæ æquationi satisfaciat, maiorem scilicet & minorem. Maior inuenitur, vt proxime dictum est. Minor vero habebitur, si radix quadrata illius relicti ex dimidio numeri radicum detrahatur. Vt in dato exemplo postremo, si 3, radix quadrata huius relicti 9, subtrahatur à 9, dimidio numeri radicum, relinquentur 6, pro altera radice, & minore huius numeri Cossici 18 ℞ − 72. Quod ita constat. 18 ℞, faciunt 108, si 1 ℞, est 6, ablatis igitur 72, remaneot 36, quibus æqualis est quadratus numerus huius radicis 6.

*Qui numere Cossici habeant duplicem radicem. Quo pacto sum maior sum minor radix inueniatur.*

ITAQVE in huiusmodi numeris liberum erit, tertio loco ad radicem quadratam inuentam ex relicto illo vel addere dimidium numeri radicum, vel eandem illam radicem inuentam ex dimidio numeri radicum subducere. Non tamen semper vtraque radix propositum problema soluet, sed altera tantum, vt in ænigmate 25. cap 32. manifestum fiet.

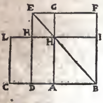
SOLVM numerus ille Cossicus Diminutus habens numerum absolntum signo − affectum. vnicam habet radicem, cuius numerus absolutus quadrato dimidij numeri radicum æqualis est. Huius enim numeri Cossici radix est dimidium ipsum numeri radicum. Vt si æquatio sit inter 1 ʒ. & 12 ℞ − 36. erit radix huius numeri diminuti 12 ℞ − 36, dimidium numeri radicum, nimirum 6: quia numerus absolutus 36, æqualis est quadrato dimidij numeri radicum. Nam capiatur dimidium numeri radicum, nempe 6; & à quadrato huius dimidij, vt à 36, detrahatur 36, quo facto remanet 0, cuius radix quadrata quoq; est 0. Siue igitur ad hanc radicem addatur dimidium numeri radicum, puta 6, siue ex hoc dimidio radix dicta tollatur, semper inuenietur radix esse 6, quæ æquationi satisfaciat, vt constat.

EX his perspicuum est, triplicem esse oumerum Cossicum, cuius radix quæritur. Aut enim compositus est, cuius tam numerus radicum, quam numerus absolutus gerit signum +; Aut Diminutus, cuius vel numerus radicum, vel oumerus absolutus signo − est ootatus, vt ex tribus exemplis adductis liquido constare potest.

AGE vero, aperiamus rationem huius extractionis radicum Geometricis demonstrationibus, vt non solum experientia, sed etiam certissima scientia cognoscamus, recte hac arte erui radices quadratas ex numeris Cossicis compositis, diminutisve. Repetamus ergo primum exemplum, in quo æquatio erat inter ʒ, & N − ℞. v. l si restauretur diminutum hoc − ℞, inter ʒ + ℞, & N.

SIT AB. latus Zensi, seu quadrati nobis ignotum, qnod quæritur, quo producto ad partes A, sumatur recta AC, numero radicum æqualis, quæ bifariam secetur io D, vt sit AD, dimidium numeri radicum. Super rectam BD, compositam ex latere quadrati ignoti, & dimidio numeri radicum, describatur quadratum DF, cuius Diameter BE. Ducta deinde ipsi DE, parallela AG, quæ diametrum secet in H, ducatur per H, recta IL, ipsi BC, parallela secans DE, in K, occurrensque rectæ, quæ ex C, ipsi DE, parallela ducitur, in L. Quoniam igitur AI, KG, quadrata sunt ex coroll. propos. 4. lib. 2. Eucl. erit rectaugulum CH, contentum sub AC, numero radicum, & AH, latere quadrati, quod quæritur, valor, seu pretium radicum; (Numerus enim radicum multiplicatus in valorem radicis producit omnium radicum valorem. Vt existente vna radice 6, valebunt 5 ℞, 30.) atque adeo DH, dimidium pretij radicum, cum [a] æqualia sint rectangula DH, DL. [b] Cum ergo rectangula, DH, HF, æqualia quoque sint, erunt DH, HF, æqualia integro radicum pretio. Et quoniam quadratum AI, æquale ponitur alicui numero absoluto, mious valore radicum: vel quia quadratum AI, vna cum valore radicum, quarum numerus est AC, ponitur æqnale alicui numero absoluto, erit gnomon GBK, illi numero absoluto æqualis: qui si addatur ad GK. quadratum dimidij numeri radicum cognitum erit totum quadratum DF, à cuius latere DB, si auferatur AD, dimidium numeri radicum, vt præcipit regula, notum fiet latus AB. Quod est propositum.

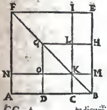
*Demonstratio extractionis radicum ex Cossicis numeris compositis, diminutisve.*

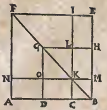



[a] *36 primi.*
[b] *43. primi*

SED sumamus iam secundum exemplum, vbi æquatio erat inter ʒ, & ℞ + N.

SIT rursus AB, latus quadrati, quod inquiritur. Et quia ponitur 1 ʒ, æqualis ℞ + N, erit oumerus radicum minor latere AB. Sit ergo recta AC, numero radicum æqualis, cuius dimidium AD, vel DC. Descripto ex AB, quadrato AE, vna cũ diametro BF, ducatur DG, ipsi AF, parallela secans BF, in G, puncto, per quam agatur GH, ipsi AB, parallela. Deinde ducatur CI, parallela ipsi BE, secãs BF, in K, & GH, in L. Deniq; per K, agatur MN, parallela ipsi AB, secans DG, in O. Eruntque DH, OL, CM, quadrata per coroll. propos. 4. lib. 2. Eucl. Quoniam igitur rectangulum AI, comprehensum sub AF, latere quadrati ignoti, & numero radicum, AC, valor est omnium radicum, vt in præcedenti demonstratione dictum est, poniturque quadratum AE, æquale valori





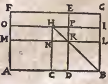

*a 36. & 43. primi.* *b 43. primi* *c 43. primi*

radicum, vna cum numero aliquo absoluto, erit rectangulum CE, numero illi absoluto æquale. ª Et, quoniam AO, DK, æqualia sunt, necnõ ᵇ & DK, KH; æqualia erũt AO, KH. Addito ergo cõmuni DM, erit rectangulum AM, gnomoni LBO, æquale. Sed AM, ipsi CE, æquale est, hoc est, numero absoluto. ᶜ (Sunt enim, AK KE, æqualia, additoque communi CM, æqualia fient AM, CE.) Igitur & gnomon LBO, numero absoluto æqualis erit: qui si addatur ad OL, quadratum dimidij numeri radicum cognitum erit quadratum DH, cuius lateri DB, si adijciatur AD, dimidium numeri radicum, vt regula extractionis radicum iubet, notum fiet latus AB. Quod est propositum.

SVMAMVS denique tertium exemplum, in quo posita fuit æquatio inter ℨ, & 2℞ — N. Vel si restauretur diminutum hoc, — N, inter ℨ + N. & 2℞.

SIT numero radicum æqualis recta AB, quæ bifariam secetur in C, & non bifariam in D. Super maiorem partem AD, describatur quadratum ADEF, & perficiatur rectangulum AG. Deinde ex BC, dimidio numeri radicum fiat quadratum BCHI, cuius diameter BH, secet DE, in K, puncto, per quod agatur ipsi AB, parallela LM, secans CH, in N. Producta quoque IH, secet AF, in O, & DE, in P. Eruntque quadrata DL, NP, ex coroll. propos. 4. lib. 2. ᵈ & rectangulum AH, quadrato CI, æquale. Siue igitur quadratum datum, quod quæritur, sit AE, siue DL, siue CI, semper vera erit æquatio, hoc est, erit ℨ, æqualis radicibus minus aliquo numero absoluto, vel 1 ℨ, cum aliquo numero absoluto æqualis radicibus. Sit enim primum quadratum propositum AE. Erit ergo rectangulum AG, contentum sub latere quadrati AF, & numero radicum AB, valor omnium radicum: Atque adeo cum valori radicum æquale sit quadratum AE, vna cum numero absoluto, vel quadratum AE, æquale sit valori radicum AG, minus numero absoluto, ex hypothesi; erit DG, rectangulũ numero absoluto æquale. Et quoniam rectangulum DG, rectangulo AK, æquale est, quod latera DE, DB, lateribus DA, DK, æqualia sint, propter quadrata AE, DL: Est autem AK, gnomoni PBN, æquale. ᵉ (Cum enim æqualia sint complementa CK, KI; addito communi DL, erit CL, ipsi DI, æquale: ᶠ Sed CL, ipsi AN, æquale est. Igitur & DI, ipsi AN, æquale erit; additoq; communi CK, fiet AK, gnomoni PBN, æquale.) Igitur & DG, hoc est, numerus absolutus gnomoni PBN, æqualis erit. Qui si auferatur, vt præscribit regula extractionis radicum, ex CI, quadrato dimidij numeri radicum, relinquetur notum quadratum NP, cuius latus CD, additum ad AC, dimidium numeri radicum, constituet latus AD, quadrati AE, notum. Quod est propositum.

*d 36. primi* *e 43. primi* *f 36. primi.*




SIT iam datum quadratum DL, eodem numero radicum, & numero absoluto eodẽ manentibus; Erit ergo rectangulũ AL, contentum sub numero radicum AB, & latere quadrati BL, æstimatio omnium radicum: Ac proinde, cum quadratum DL. vna cũ numero aliquo absoluto, valori radicum æquale sit, vel quadratũ DL, æquale sit valori radicum AL, minus aliquo numero absoluto, ex hypothesi; erit rectangulum AK, numero absoluto æquale. quod cum æquale sit gnomoni PBN. vt ostensum est, erit & numerus absolutus gnomoni PBN, æqualis. quo ablato ex CI, quadrato dimidij numeri radicum, notũ remanebit quadratum NP, cuius latus CD, ex CB, dimidio numeri radicum subtractum, notũ relinquet DB, latus quadrati dati DL. Quod est propositum.

POSREMO datum sit quadratum CI. Erit igitur rectangulum AI, sub AB, numero radicum, & latere BI, comprehensum, pretium radicum propositarum, quibus æquale ponitur quadratum CI, vna cum dato numero absoluto. Vel quibus æquale ponitur quadratum CI, minus numero absoluto. Rectangulum igitur AH, numero absoluto æquale erit. Quo ablato ex CI, quadrato dimidij numeri radicũ, nihil remanebit ᵍ cum æqualia sint rectangula AH, CI, atq; adeo nihil addendum erit vel subtrahendum à dimidio numeri radicum, sed ipsummet dimidium, numeri radicum, nempe CB, latus erit quadrati dati, vt ante docuimus. Quod est propositum.

*g 36. primi*

Itaque si ℨ æquetur 2℞ — N. vel æquatio sit inter ℨ + N, & 2℞ (quod idem est) si radicem numeri, qui relinquitur, subtracto numero absoluto ex quadrato dimidij numeri radicum, addamus dimidio numeri radicum, inueniemus radicem maiorem æquationi propositæ satisfacientem: Si vero eandem ex dimidio numeri radicum subtrahamus, reperiemus radicem minorem æquationis propositæ. Si denique numerus absolutus æqualis sit quadrato dimidij numeri radicum, erit ipsum dimidium numeri radicum radix, quæ inquiritur.

*Demonstratio alia extractionis radicũ ex numeris Cossicis cõpositis, dimmutisue.*

PETRVS Nonius cap. 4. primæ partis suæ Algebræ adducit alias demonstrationes non minus elegantes, quibus prius inuestigat Geometrice, quinam quadratus numerus, vel Zensus, æqualis sit cuicumque numero absoluto, minus quotcunq; radicibus, siue qui vna cum quotlibet radicibus, æqualia sit cuicunque numero absoluto: Vel qui æqualis sit quotcunque radicibus, vna cum quouis numero absoluto: Vel denique qui sit æqualis quotcunque radicibus, minus quolibet numero absoluto, siue qui vna cum quocunque numero absoluto æqualis sit quotlibet radicibus.

PROPONATVR ergo primum hic numerus Cossicus 55 — 6 2℞. Inueniendum est quadratum huic numero æquale, atque adeo demonstrandum, recte ex superioribus præceptis, eius radicem quadratam fuisse inuentam. Prius restituatur ablatum illud — 6 2℞, per transpositionem, vt sit æquatio inter 1 ℨ + 6 2℞. & 55 Sit numerus radicum recta AB, quæ bifariam secetur in C, & ex C, erigatur perpendicularis CD, æqualis lateri illius quadrati, quod numero absoluto est æquale. (omnis enim numerus, etiã non quadratus, habet in quantitate continua radicem, seu latus, vt propos. 22. lib. 6. Geometriæ Practicæ docui.) connectaturq; recta BD. cui ex CB, producta æqualis abscindatur CE. Dico quadratum rectæ BE, vna cum radicibus propositis, quarum numerus est AB, æquale esse numero absoluto cuius latus quadratum est CD; ac proinde idem

quadratum

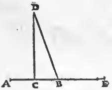
quadratum rectæ BE, æquale esse eidem numero, cuius latus quadratum CD, minus radicibus propositis, quarum numerus est AB. [a] Quoniam enim quadratum ex BD, æquale est quadratis ex CD, CB; estque quadratum ex BD, quadrato ex CE, æquale; erit quoque quadratum ex CE, quadratis ex CD, CB, æquale. [b] Sed quadrato ex CE, quale est rectangulum sub AE, BE, vna cum quadrato ex CB. Igitur & rectangulum sub AE, BE, vna cum quadrato ex CB, æquale erit quadratis ex CD, CB: ablatoque communi quadrato rectæ, CB; æquale erit rectangulũ sub AE, BE, quadrato ex CD. [c] Est autem rectangulũ sub AE, BE æquale quadrato ex BE, & rectangulo sub AB, BE. Igitur & quadratum ex BE, vna cum rectagulo sub AB, BE, æquale erit quadrato ex CD. Cum igitur (posito quadrato ex BE) rectangulum sub AB, BE; numero radicum, & latere quadrati comprehensum sit valor radicum, liquido constat, quadratum rectæ BE, vna cum radicibus datis, quarũ numerus est AB, æquale esse numero proposito absoluto, cuius latus quadratum est CD, ideoque idem quadratum rectæ BE, æquale esse numero absoluto; cuius latus quadratum est CD, minus valore radicum, quarum numerus est AB. Quod est propositum.

[a] 47. primi
[b] 6. secun.
[c] 3. secun.

EX hac demonstratione manifestum est, præceptum superius recte præscribere modum inueniendi radicem ex numero hoc Cossico 55 − 62℞. Nam si ad quadratum rectæ CB, dimidij numeri radicum, adijciatur numerus absolutus, nempe quadratum ex CD, nota fient duo simul quadrata ex CB, CD, [d] hoc est, quadratum ex BD, atque adeo & quadratum ex CE. Si igitur ex hoc latere CE, auferatur CB, dimidium numeri radicum, cognitum erit latus BE, hoc est, radix quadrata, quæ quærebatur.

[d] 47. primi

SIT rursum Cossicus numerus 62℞ + 55. Exhibendum est quadratum illi æquale; demonstrandumque recte eius radicem esse extractam, iuxta præcepta superiora. Sit rursus recta AB, secta bifariam in C, numerus radicum, & perpendicularis CD, latus quadratum numeri absoluti, & ductæ rectæ BD, æqualis sit recta CE. Dico quadratum rectæ AE, æquale esse radicibus datis, quarum numerus AB, vna cum numero dato absoluto, cuius quadratum latus CD. [e] Quoniam enim quadratum ex BD, atque adeo & quadratum ex CE, quadratis ex CD, CB, æquale est, [f] Est autem quadrato ex CE, æquale quadratum ex CB, vna cum rectangulo sub AE, BE: Erit quoque quadratum ex CB, vna cum rectangulo sub AE, BE, comprehensum quadratis ex CD, CB, æquale; ablatoque communi quadrato rectæ CB, æquale erit rectangulum sub AE, BE, quadrato ex CD, hoc est, numero absoluto proposito. Quare cum & rectangulum sub AE, AB, latere quadrati, (posito quadrato ex AE,) & numero radicum contentum sit radicum propositarum valor, sitque [g] quadratum ex AE; duobus rectangulis sub AE, BE, & sub AE, AB, æquale; perspicuum est, quadratum rectæ AE, æquale esse radicibus, quarum numerus est AB, vna cum dato numero absoluto, cuius latus quadratum CD. quod est propositum.

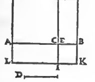



[e] 47. primi
[f] 6. secun.
[g] 2. secun.

LATVS autem AE, ita notum fiet ex superioribus, & hac demonstratione. Ad quadratũ rectæ CB, dimidij numeri radicum, addatur numerus absolutus, quadratum videlicet rectæ CD; fientque nota duo quadrata simul rectarum CB, CD, [h] hoc est quadratum ex BD, seu CE. Quod si ad latus CE, cognitum opponatur dimidium numeri radicum, nempe recta AC, nota erit tota AE, quæ quærebatur.

[h] 47. primi

SIT denique numerus Cossicus 18℞ − 56. cui inueniendum est quadratum æquale, & ostendendum, recte inuentum esse eius latus. Sit, vt prius, numerus radicum recta AB, secta bifariam in C; & recta D, latus sit quadratum numeri absoluti; restituaturque diminutum hoc, −56, vt sit etiam æquatio inter 1ʒ + 56. & 18℞. Sit autem primum recta D, minor dimidio numeri radicum AC, vel CB. Diuidatur recta AB, in E, ita vt D, sit medio loco proportionalis inter segmenta AE, EB, ex ijs, quæ ex Peletario docuimus ad propos. 13. lib. 6. Eucl. [i] Erit igitur rectangulum sub AE, EB, quadrato ex D, hoc est, numero absoluto proposito æquale. Dico tam quadratum rectæ AE, quam EB, vna cum dato numero absoluto æquale esse radicibus propositis quarum numerus est AB: ideoque tam quadratum rectæ AE, quam EB, æquale esse valori radicum propositarum, minus numero absoluto. Describantur enim ex AE, EB, quadrata AF, EK, perficianturque rectangula AH, BL. Eritque tam rectangulum EH, quam EL, contentum sub AE, EB, numero absoluto, hoc est, quadrato rectæ D, æquale. Posito igitur latere quadrati AE, erit rectangulum AH, contentum sub AB, numero radicum, & AE, latere quadrati, valor radicum propositarum; Manifestum autem est, quadratum AF, vna cum EH, numero absoluto, æquale esse valori radicum AH, ac proinde idem quadratum AF, æquale esse valori radicum AH, minus absoluto numero EH. Posito rursus EB, latere quadrati, erit pretium omnium radicum rectangulum BL, sub AB, numero radicum, & latere quadrati EB, comprehensum, Perspicuum autem est, quadratum etiam BI; vna cum EL, absoluto numero esse valori radicum BL, æquale: ideoque idem quadratum BI, æquale esse valori radicum BL, minus numero absoluto EL.



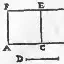

[i] 17. sexti.

Vtrumque autem latus AE, EB, ita notum efficietur. [k] Quoniam rectangulum sub AE, EB, vna cum quadrato ex CE, æquale est quadrato ex AC, vel CB; si ex quadrato rectæ AC, vel CB, id est, dimidij numeri radicum, auferatur rectangulum sub AE, EB, nempe numerus absolutus, relinquetur notum quadratum ex CE. Si igitur latus hoc CE, cognitum addatur ad AC, dimidium numeri radicum, notum fiet latus AE; Si vero idem latus CE, ex CB, dimidio numeri radicum dematur, notum remanebit latus EB.

[k] 5. secun.

SIT deinde recta D, æqualis dimidio numero radicum AC, vel CB. Dico quadratũ ex AC, dimidio numeri radicum, vna cum numero absoluto dato æquale esse radicibus propositis. Describatur enim ex AC, quadratum AE, compleaturque rectangulum AG, eritque CG, quoque quadratum. Quoniam igitur

recta D, æqualis ponitur rectæ AC, vel CB, erit quadratum CG, æquale numero absoluto; positoque AC, latere quadrati æquationis, erit rectangulum AG, sub latere AC, & numero radicum AB, contentum, æstimatio, siue pretium radicum. Liquido autem constat, quadratum AE, vna cum CG, numero absoluto, æquale esse radicibus AG: ideoque quadratum idem AE, esse æquale valori radicum AG, minus numero absoluto CG.




ITAQVE cum recta D, minor est dimidio numeri radicum AC, vel CB, hoc est, cũ numerus absolutus æquationis minor est quadrato dimidij numeri radicũ, inuenitur duplex radix æquationis. Cũ vero recta D, æqualis est dimidio numeri radicum, id est, numerus absolutus propositus æqualis est quadrato dimidij numeri radicum, est radix æquationis ipsum dimidium numeri radicum. Neque vero recta D, maior esse potest dimidio numeri radicum AC, vel CB. Nam falsa esset æquatio, cum quadratum ipsius D, nempe numerus absolutus, ex quadrato dimidij numeri radicum auferri non posset, atque adeo, radix, secundum præceptum traditum, nullo modo inueniri. Accedit etiam, quod D, si maior esset quam AC, vel CB, non posset esse medio loco proportionalis inter duo segmenta rectæ AB, vt patet ex demonstratione illa, quam ex Peletario apposuimus ad propos. 13. lib. 6. Eucl. Quare inueniri non posset quadratum æquationi satisfaciens.

POSSVMVS cum eodem Petro Nonio artem hanc extractionis radicum ex numeris Cossicis compositis hoc etiam modo proponere.

*Alius modus extrahendi radicem quadratam ex numero Cossico composito, vel diminuto.*

1. *Ad quadratum numeri radicum adde, vel ab eodem subtrahe quadruplum numeri absoluti, prout signo +, vel −, fuerit affectus numerus absolutus.*
2. *Ad huius summa, vel relicti radicem quadratam adde, vel ab eadem subtrahe numerum radicum, prout radicum numerus signo +, vel −, fuerit notatus. Nam vltima hæc summa, vel relictum dabit æstimationem, & pretium duplicatæ radicis quadratæ. Quare dimidium ipsius valor erit vnius radicis.*

SIT enim extrahenda radix ex hoc numero Cossico, 72 − 6 ℞. Ad quadratum numeri radicum, vt ad 36, addo 288, quadruplum numeri absoluti; & ex radice quadrata summæ confectæ 324, hoc est, ex 18, detraho numerum radicum, nempe 6; remanentq; 12, pro valore duarum radicum. Pretium ergo vnius radicis erit 6.

RVRSVS ex numero hoc Cossico, 6 ℞ + 72, eruenda sit radix. Ad quadratum numeri radicum, vt ad 36, addo 288, quadruplum numeri absoluti, facioq; 324. Ad huius summæ deinde radicem quadratã, vt ad 18, adijcio numerum radicum, vtpote 6, facioq; 24, pro pretio duplicatæ radicis. Vnius ergo radicis pretium erit 12.

POSTREMO inuenienda sit radix huius numeri Cossici, 18 ℞ − 72. Ex 324, quadrato numeri radicum, subtraho 288, quadruplum absoluti numeri; relinquunturque 36 Ad huius relicti radicem quadratam, nempe ad 6, adiungo 18, numerum radicum, cõficioque 24, pro duplicatæ radicis pretio. Vna ergo radix erit 12. Quod si radicem quadratam relicti illius, nempe 6, detraham ex 18, numero radicum, remanebunt 12, pro valore duplicatæ radicis minoris; (Huiusmodi enim numerus Cossicus duplicem habet radicem, vt dictum est,) Quare vna radix erit 6.

*Commoditas huius posteriorũ modi extractionis.*

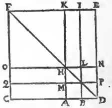
ATQVE hic modus commodissimus est, quando radicum numerus impar est, vel fractus, ne cogamur accipere dimidium illius, quod semper est numerus fractus, &c.

*a Schol. pro pos. 4. lib 2* *b 1. quinti.* *c 5. quinti.* *d Schol. pro pos. 4 lib. 2.* *e 1. vel 5. quinti.*

RATIO vero huius operationis hæc est. [a] Quoniam quadratum numeri radicum quadruplum est quadrati, quod ex dimidio numeri radicum gignitur, quemadmodum & numerus absolutus quadruplicatus numeri absoluti quadruplus est, [b] fit vt & summa, quæ fit ex quadrato numeri radicum, & quadruplo numeri absoluti, quadrupla sit summæ, quæ prius in alio modo operationis conficiebatur ex quadrato dimidij numeri radicum, & numero absoluto: [c] efficitur quoque, vt & relictum, quod fit ex detractione quadrupli numeri absoluti ex quadrato numeri radicum, quadruplum sit relicti, quod antea fiebat ex detractione numeri absoluti ex quadrato dimidij numeri radicum. [d] Quam ob rem radix quadrata huius summæ, vel relicti, dupla erit radicis quadratæ prioris summæ, vel relicti. quemadmodum & numerus radicum duplus est dimidij numeri radicum. Siue igitur ad hanc radicem quadratam adijciamus numerum radicum, vel ab eadem subtrahamus eundem, [e] fiet quoque summa, vel relictum duplum summæ, vel relicti, quod fit ex additione dimidij numeri radicum ad radicem quadratam in priore operatione inuentam, vel ex detractione dimidij numeri radicum ex priore radice quadrata Quare dimidium summæ huius, vel relicti pretium erit radicis æquationi satisfacientis.

QVAM tamen operationem ita quoque Geometricè confirmabimus cum Petro Nonio. Sit primum æquatio inter ʒ, & N − ℞, hoc est, si restauretur diminutum, inter ʒ + ℞, & N.

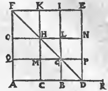
*Demonstratio alterius huiusmodi extractionum.*




PONATVR AB, latus quadrati ignotum, quod quæritur, quo producto ad partes A, sumatur recta AC, numero radicum æqualis. Sumatur quoque ex eadem AB, ad partes B, protracta, recta BD, ipsi AB, æqualis; & ex tota CD, describatur quadratum CDEF, vna cum diametro DF, perficiaturque figura, vt vides, ita vt similis sit omnino figuræ propos. 8. lib. 2. Euclidis Erunt igitur, vt in propos. 8. lib. 2. Eucl. demonstratum est BP, ML, AG, GN, OK, quadrata, & gnomon ODK quadruplus rectãguli GG. Quoniam vero AG, ponitur quadratum, cuius latus AB, quæritur, erit rectangulum CM, contentum sub numero radicum AC, & latere quadrati AM, valor radicum omnium. Cum ergo æquatio sit inter ʒ + ℞, & N, erit rectangulum CG, æquale numero absoluto, atque adeo gnomon ODK, quadruplus numeri absoluti; qui si addatur ad OK, quadratum numeri radicum AC, totum quadratum CE, cognitum erit; ex cuius latere CD, cognito, si tollatur AC, numerus radicum, relinquetur recta AD, dupla lateris AB, quod quæritur, cognita. Quod est propositum.

SIT

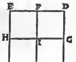
SIT deinde æquatio inter ℨ. & 𝓇+N. Ponatur AB, latus ignotum quadrati, quod quæritur, & AC, numerus radicum. Producta recta AB, sumatur BD, ipsi BC, & DR, ipsi AC, æqualis; & ex AD, describatur quadratum ADEF, vna cum diametro DF, perficiaturque figura, vt prius. Erit rursum, vt antea, gnomon ODK, quadruplus rectanguli KG, & OK, QI, quadrata. Et quia QI, quadratum ponitur, cuius latus AB, quæritur, erit rectangulum QK, contentum sub QM, numero radicum, (*est enim QM, ipsi AC, æqualis) & latere quadrati QF, valor omnium radicum. Quocirca cum sit æquatio inter ℨ, & 𝓇+N, erit rectangulum KG, numero absoluto æquale, ac propterea gnomon ODK, numeri absoluti quadruplus; quo addito ad OK, quadratum numeri radicum, notum fiet totum quadratum AE; ad cuius latus AD, cognitum si addatur DR, numerus radicum (posita enim est recta DR, numero radicum AC, æqualis) cognita erit tota recta AR, quæ dupla est lateris AB, quod quæritur. Si enim æqualibus BC, BD, æquales rectæ adiiciantur CA, DR, totæ BA, BR, æquales fient, atque adeo AR, dupla erit ipsius AB. Quod est propositum. *34. pri.




DENIQVE sit æquatio inter ℨ, & 𝓇−N, hoc est, si diminutum restauretur, inter ℨ+N, & 𝓇. Repetatur præcedens figura, sitque numerus radicum recta AD, & AB, latus quadrati, quod quæritur, sit primum maius dimidio numeri radicum. Quoniam igitur QI, ponitur quadratum, cuius latus AB, inueniendum est, erit rectangulum AI, contentum sub latere quadrati AB, & numero radicum AD, vel AF, valor radicum. Cum ergo æquatio sit inter ℨ+N, & 𝓇, erit rectangulum AG, numerus absolutus, atq; adeo gnomon ODK, ipsius quadruplus, vt prius; qui si ex AE, quadrato numeri radicum dematur, remanebit quadratum OK, notum, cuius lateri cognito AC, vel DR, si adiiciatur numerus radicum AD, fiet nota tota AR, quæ dupla est lateris quadrati AB, vt prius est demonstratum. Quod est propositum.

SIT iam BD, latus quadrati inueniendum dimidio numeri radicum minus, eritque rectangulum AP, contentum sub latere quadrati DP, & numero radicum AD, valor radicum. Et quia æquatio est inter ℨ+N, & 𝓇. erit rectangulum AG, numerus absolutus, ac proinde gnomon ODK, ipsius quadruplus; qui ablatus ex AE, quadrato numeri radicum relinquit quadratum OK, eiusque latus propterea AC, notum fiet. Quod si AC, ex AD, numero radicum dematur, remanebit nota recta CD, quæ lateris BD, dupla est. Quod est propositum.

IAM vero, si quadruplum numeri absoluti æquale fuerit quadrato numeri radicum, erit dimidium numeri radicum latus quadrati, quod quæritur. Sit enim AB, recta numerus radicum secta bifariam in C; descriptoque quadrato AD, ducantur rectæ CF, GH, secantes quatuor latera bifariam, & quadratum in quatuor quadrata æqualia. Si igitur AC, dimidium numeri radicum ponatur latus quadrati, erit rectangulum AG, contentum sub latere quadrati AH, & numero radicum AB, valor radicum; ac propterea cum æquatio sit inter ℨ+N, & 𝓇. erit CG, rectangulum numero absoluto æquale, & quadruplum eius quadrato AD, ex numero radicum AB, descripto æquale. Si igitur quadruplum numeri absoluti, hoc est, quadratum AD, auferatur ex AD, quadrato numeri radicum AB, remanebit o. quod siue addatur ad AB, numerum radicum, siue ab eo subtrahatur, nota fiet recta AB, quæ dupla est lateris AC. Quod est propositum.




QVOD vero spectat ad extractionem radicum Zenſizenſicarum, vel Zenſicubicarum, vel Zenſizenzenſicarum, vel Zenſurdeſolidarum, quando nimirum numeri Coſſici æquationis, abbreuiatis tamen eorum characteribus, habent exponentes, qui progressionem Arithmeticam constituant vnam ex his. 4.2.0. vel 4.0.2. vel 6.3.0. vel 6.0.3. vel 8.4.0. vel 8.0.4. vel 10.5.0. vel 10.0.5. &c. in quibus maior character semper cōponitur ex ℨ. & alio charactere Coſſico, vt ex numeris exponentibus manifestum est: extrahenda est prius radix quadrata, propter characterem ℨ. iuxta modum hactenus descriptum, accommodando omnia ea, quæ de numero radicum præcepimus, illi numero, qui affectus est charactere Coſſico in illa parte æquationis, ex qua radix eruenda est. perinde ac si æquatio foret inter tres numeros Coſſicos characteribus ℨ. 𝓇. & N. affectos. Deinde ex hac radice quadrata inuenta, siue ea rationalis sit, siue irrationalis, elicienda est radix alia, iuxta reliquam partem characteris Coſſici maioris, relicto hoc charactere ℨ. (est enim character maior Coſſicus compositus) hoc est, eruenda est radix denominata à charactere Coſſico, qui in ea parte æquationis cernitur, in qua duo numeri reperiuntur, & qui medius est inter maximum characterem, & minimum, siue N. Vt si æquatio sit inter 1ℨℨ. & 18ℨ+648. extrahenda erit radix quadrata ex hoc numero 18ℨ+648, propter priorem partem signi Coſſici ℨ. non aliter, ac si esset æquatio inter 1ℨ. & 18𝓇+648. quæ radix est 36. ex qua rursus eruenda est radix quadrata, nempe 6. ob reliquam partem characteris Coſſici, nimirum ℨ. qui medium locum obtinet inter ℨℨ. & N. Igitur 6. erit radix numeri Coſſici propositi. *Extractio radicum Zenſizenſicarum, Zenſicubicarum, &c.*

EODEM modo si sit æquatio inter 1ℨ𝒸𝒸. & 5120 − 16𝒸𝒸. sumenda est prius radix quadrata huius numeri 5120 − 16𝒸𝒸. & ex hac elicienda radix cubica. Sic etiam, si æquatio habeatur inter 1ℨℨℨ. & 20000ℨℨ − 7846119. accipienda est primum quadrata radix, & ex hac eruenda deinde radix Zenſizenſica. Et sic de cæteris.

QVOD autem ex huiusmodi numeris Coſſicis extrahatur radix quadrata eodem artificio, quo superius vsi sumus, perspicuum est. Nam maximus character Coſſicus, cum sit compositus ex ℨ. & alio quodam charactere Coſſico siue simplici, siue composito, indicat vnitatem ab eo denominatam esse zensum, seu quadratum alicuius numeri à reliqua parte maximi characteris Coſſici denominati, ita vt reliqua illa pars sit tanquam radix prioris partis. Quare cum hæc reliqua pars reperiatur quoque in altera æquationis parte, cuius radix inuestigatur, denominari poterit eius numerus à 𝓇. si numerus maximi characteris, nēpe vnitas, ℨ. denominetur: atque adeo iuxta præcepta tradita recte ex illo numero æquationis radix quadrata inuenietur. V. g.

In æquatione inter ℨℭ,& ℭ+N. cum hic character ℨℭ. significet zensum vnius cubi, erit vnus cubus radix quadrata illius zensi, ac proinde numerus cuborum in altera parte æquationis, numerus erit radicum eiusdem zensi. Et sic de cæteris. Inuenta autem hac radice quadrata, extrahẽda est ex ea radix à reliqua parte maximi characteris Cossici denominata, quia illa radix quadrata est numerus denominatus ab illa reliqua parte, & non absolutus. Quemadmodum qui vult radicem zensicubicam huius numeri 64. inuenire prius debet eius radicem quadratam, nempe 8. Deinde quoniam hæc radix quadrata non est numerus absolutus, sed cubus, cum numerus 64. sit zensus vnius cubi, sumenda erit radicis inuentæ 8. radix cubica, nimirum 2. atque hic numerus radix erit Zensicubica dati numeri 64.

## *EXEMPLA DVO, IN QVIBVS occurrunt radices surdæ.*

SIT æquatio inter 1. ℨℭ. & 800ℭ—156751. Dimidium cuborum, nimirum 400. quadro, efficioque 160000. Detraho 156751. & reliqui numeri 3249. quadratam radicem 57. ad dimidium numeri cuborum, nimirum ad 400. adiicio, efficioque 457. cuius radix cubica dat radicem Zensicubicam quæsitam, quæ surda est. Eius cubus est 457. qui ductus in se facit Zensicubum 208849. qui æqualis est 800ℭ. id est, 365600. minus 156751. vt patet. Idem fere constabit, si per radicem cubicam numeri 457. in numeris inuentam agemus. Radix enim cubica numeri 457. propinqua est $7\frac{7}{10}$. inuenta per appositionem duorum ternariorum cifrarum. Eius cubus est $\frac{456533}{1000}$. & Zensicubus 208422. proxime: qui æqualis est ferme 800ℭ, hoc est, $\frac{365226400}{1000}$. minus 156751. Nam post detractionem reliquus fit numerus $208475\frac{2}{5}$. qui parum differt à 208422. Causa huius inæqualitatis est, quod propinqua illa radix non est vera radix. Felicius ergo æquatio succedit, si operatio per ipsammet radicem surdam instituatur.

ET quoniam numerus 800ℭ—156751. duplicem radicem habet, vt supra diximus, propterea quod numerus absolutus signo — affectus est; maior inuenitur, vt dictum est, nimirum radix cubica numeri 457. minor vero reperietur, si superioris numeri 3249. relicti post detractionem numeri absoluti ex quadrato dimidij numeri cuborum, radicem quadratam 57. ex 400. dimidio numeri cuborum detrahamus. & reliqui numeri 343. radicem cubicam sumamus 7. Huius enim Zensicubus est 117649. qui æqualis quoque est 800ℭ. id est, 274400. minus 156751. vt manifestum est. Itaque maior radix huius numeri 800ℭ—156751. surda est, nimirum radix cubica numeri 457. minor autem rationalis est, nimirum 7. radix videlicet cubica cubi 343.

SIT rursus æquatio inter 1ℨ. & 82ℛ—5. Dimidium numeri radicum, nimirum 4. quadro, & ex quadrato 16. demo 5. & reliqui numeri 11. propinquam radicem quadratam $3\frac{79}{250}$. (quæ inuenta est per appositionem trium binariorum cifrarum.) addo ad dimidium numeri radicum, vt ad 4. efficioque radicem propinquam $7\frac{79}{250}$. numeri propositi 82ℛ—5. Eius quadratum est $53\frac{32741}{62500}$. quod fere æquale est 82ℛ—5. quippe cum 82ℛ—5. efficiant $53\frac{66}{125}$.

RADIX minor eiusdem numeri 82ℛ—5. (Habet enim duplicem radicem, propter signum —. quod numerus absolutus gerit, vt supra diximus) est $\frac{171}{250}$. quæ habetur, si reliqui numeri superioris 11. radix propinqua $3\frac{79}{250}$. ex 4. dimidio numeri radicum detrahatur. Quadratum radicis $\frac{171}{250}$. est $\frac{29241}{62500}$; quod fere æquale est 82ℛ—5. Nam 82ℛ—5. conficiunt $\frac{59}{125}$. qui numerus illum quadratum superat hoc fracto numero $\frac{259}{62500}$. qui minor est, quam $\frac{1}{241}$.

FELICIVS quoque æquatio succedet, si per radices surdas operari velimus. Nam maior radix est 4+√ℨ11. Minor vero 4—√ℨ11. Illius tam quadratum, quam octuplum radicis —5. efficit 27+√ℨ704. hoc est, $53\frac{8}{15}$. proxime. Huius vero tam quadratum, quam octuplum radicis —5. conficit $\frac{7}{15}$. proxime, nimirum 27—√ℨ704. Ratio porro huius operationis per radices surdas intelligetur cap. 23. in algorithmo surdorum numerorum.

Multiplicationes ita formantur.

| | | |
|---|---|---|
| | 4 + √ℨ 11 | 4 — √ℨ 11 |
| | 4 + √ℨ 11 | 4 — √ℨ 11 |
| | + √ℨ 176 + 11 | — √ℨ 176 + 11 |
| | 16 + √ℨ 176 | 16 — √ℨ 176 |
| Summa. | 27 + √ℨ 704 | 27 — √ℨ 704. |

| | |
|---|---|
| 4 + √ℨ 11 | 4 — √ℨ 11 |
| 8 | 8 |
| 32 + √ℨ 704 | 32 — √ℨ 704 |
| Demptis 5. remanent | Demptis 5. remanent |
| 27 + √ℨ 704 | 27 — √ℨ 704 |

*Quando aliquando quæstio aliqua nō soluitur, culpa in Arithmeticū, nō autē in Algebrā trāsferēda est*

Posui duo hæc exempla, vt videas, non minus veram esse regulam Algebræ à nobis traditam in numeris surdis, quam in rationalibus.

IAM vero, si quando æquatio occurrat, quam resoluere nescias, culpa transferenda non est in artem Algebræ, sed in te potius, qui non omnium æquationum scientiam perdidicisti. Verbi gratia. Si incidis in æquationem inter 1ℭ & 3ℨ+2ℛ+8. & nescias ex hoc numero 3ℨ+2ℛ+8. extrahere radicem cubicam, culpa erit tua, non autem regulæ Algebræ, quæ docet, si ex illo numero radix cubica extrahatur, quæstioni satisfactum esse-

esse. Est autem radix cubica prædicta 4. Nam eius cubus est 64. qui æqualis est tribus quadratis, nimirum 48. & duabus radicibus, id est, 8. & octo vnitatibus. Idem indicium habeto de æquatione inter 1ℭ. & 4ℨ + 147. Item inter 1ℭ. & 30℞ + 133. Quia enim exponentes denominationum non seruant proportionem Arithmeticam, nondum est inuenta ars, qua resolui possint, cum tamen sint solubiles. Nam in vtraque radix valet 7.

SIC etiam, quando occurrunt radices surdæ, quarum doctrinam non perfecte calles, non erit vitio vertendum scientiæ Algebræ, si quæstio proposita maneat adhuc ignota. Id quod in duobus exemplis superioribus perspicuum esse potest, in quibus, vt æquatio proposita explicaretur, opus fuit, per numeros surdos, siue irrationales, operationem instituere.

SÆPENVMERO etiam accidit, vt in quęstionibus nonnullis explicandis requiratur magna doctrina Geometrię, vel alterius cuiuspiam scientię, vt infra, quando varias quęstiones proponemus dissoluendas, perspicuum fiet. Qui ergo in ea doctrina satis non fuerit exercitatus, frustra se ad quæstionis propositę explicationem accinget. Nunquam enim ea scientia destitutus illam expediet. quod quidem non culpa Algebrę, sed ipsius accidere, pro certo tenendum est.

QVEMADMODVM si forte in regula illa aurea, quam regulam Trium dicunt, occurrant numeri surdi, ac irrationales, aut numeri fracti, atque is, qui per eam regulam ratiocinationem instituit, ignarus sit doctrinę illorum numerorum, ac proinde quęstionem propositam soluere nequeat; accusanda non est ipsa regula, sed artifex. Cum enim prędicta regula iubeat multiplicare secundũ numerum per tertium, ac productum per primum diuidere, vt Quotiens exhibeat quęstionis solutionem, culpa erit artificis, si operari nesciat per numeros surdos, aut fractos, non autem ipsius regulę Vt si proponatur hæc quęstio. 2. dant √ℨ 3. quid ergo dabit √ℨ 12? certum est, eum, qui nesciat multiplicare, ac diuidere radices surdas, quęstionem non posse soluere. Secundus enim numerus √ℨ 3. ductus in tertium, id est, in √ℨ 12. facit √ℨ 36. qua diuisa per primum numerum 2. fit Quotiens √ℨ 9, hoc est, numerus 3, Eadem ratione regula Algebrę docet, quid agendum sit in qualibet quęstione proposita, vt ad æquationem aliquam deueniatur: quam etiamsi artifex enodare nesciat, nihil tamen Algebræ regula de sua firmitate, ac robore amittit, sed tota culpa in artificem reiicienda est.

---

## *DE MVLTITVDINE REGVLARVM Algebræ, quam alij auctores introducunt;*

## CAPVT XIII.

VIDISTI hactenus, opinor, studiose lector, vnicam nostram regulam Algebræ perfecte planeque nos docere, qua ratione quamlibet quęstionem propositam euoluere debeamus: quippe quæ præcipiat, vt 1℞, quæ pro numero inuestigando ponitur, vel alium numerum, iuxta quęstionis tenorem examinemus, donec in æquationem aliquam incidamus duorum numerorũ: Deinde, æquatione huiusmodi inuenta, ac reducta, vt cap. 10. de reductione æquationis tradidimus, per numerũ maioris characteris Cossici reliquũ æquationis numerum diuidamus; ac tandẽ ex Quotiente, radicem æquationi congruentem extrahamus, si opus est. Vt autem te nõ lateat, quam varias alij scriptores regulas Algebræ tradant, operæ pretium duxi, eorum regulas hic proponere, vt illis collatis cum vnica nostra, quid inter nostram, & multiplices aliorum regulas intersit, intelligas.

ALII ergo scriptores æquationes illas potissimum considerant, quę inter tres primos terminos progressionis Geometricę ab vnitate incipientis, hoc est, inter Numerum, Radicem, atque Quadratum, siue Zensum, reperiuntur. qui quidem tres termini sex possunt modis inter se æquari. Aut enim æquatio est inter ℨ. & ℞. aut inter ℞. & N: aut inter ℨ. & N. quę tres æquationes ab illis simplices dicuntur, quod solum vnus terminus in ijs vni termino æquetur: Aut inter ℨ + ℞. & N: aut inter ℨ. & ℞ + N: Vel (quod idem est) inter ℨ. & N + ℞. Aut denique inter ℨ + N & ℞; quę tres æquationes ab eisdem compositę vocãtur, propterea quod in ijs semper duo termini vni termino adęquantur. Pro his sex æquationibus sex regulas pręscribunt.

*Inter quos numeros alij potissimũ æquationes obseruent.*

*Tres simplices æquationes.*

*Tres compositæ æquationes.*

*REGVLA I.*

QVANDO reperitur æquatio inter ℨ. & ℞. diuiso numero signi ℞. per numerum signi ℨ. Quotiens exhibet pretium 1℞. Vt si 5ℨ. ęquales sint 30℞. diuisis 30. per 5, prodibit Quotiens 6. pro æstimatione vnius radicis. Nam quadratum huius radicis est 36 atque ideirco 5ℨ. faciunt 180. quantum nimirum faciunt 30℞.

*Quando æquatio est inter ℨ & ℞.*

*REGVLA II.*

QVANDO æquatio reperitur inter ℞. & N. diuiso numero absoluto per numerum signi ℞. procreabitur in Quotiente pretium 1℞. quemadmodum in 1. regula. Vt si 5℞. æquales sint 30. diuisis 30. per 5. exit Quotiens 6. pro valore 1℞. Nam radix 6. quinquies sumpta facit 30.

*Quando æquatio est inter ℞ & N.*

*REGVLA III.*

QVANDO inter ℨ. & N, æquatio deprehenditur, diuiso numero absoluto per numerum signo ℨ. affectum, habebitur in Quotiente valor 1ℨ. Eius ergo radix quadrata dabit pretium 1℞. Vt si æquatio sit inter 4ℨ & 144. diuisis 144. per 4. prouenit Quotiens 36. pro valore 1ℨ. Radix ergo quadrata numeri 36. quæ est 6. offeret pretium 1℞ Nam quadratum numeri 6. est 36. quo multiplicato per 4 fit numerus 144.

*Quando æquatio est inter ℨ & N.*

REGV-

## REGVLA IV.

*Quando æquatio est inter ℨ+℞ & N.*

QVANDO æquatio occurrit inter ℨ+℞ & N. multiplicanda est ſemiſſis numeri radicum in ſe, productoque numerus abſolutus addendus. Nam ſi ex huius aggregati radice quadrata dematur ſemiſſis numeri radicum, reliquum fiet pretium 1℞. Vt ſi æquatio conſtituatur inter 1ℨ+12℞. & 85 multiplicabimus 6. ſemiſſem videlicet numeri radicum, in ſe, productoque 36. adiiciemus 85. vt fiant 121. Ab huius enim numeri radice quadrata 11. ſi ſubducatur ſemiſſis numeri radicum, nimirum 6. remanebunt 5. pro valore 1℞. Nam 1ℨ. eſt 25. additis autem 12℞, videlicet 60. fit numerus abſolutus 85. vt proponitur.

## REGVLA V.

*Quando æquatio est inter ℨ & ℞+N.*

QVANDO æquatio inſtituitur inter ℨ. & ℞+N, vel inter ℨ. & N+℞. multiplicanda eſt ſemiſſis numeri radicum in ſe, & producto numerus abſolutus adiiciendus. Nam ſi ad huius aggregati radicem quadratam addatur ſemiſſis numeri radicũ, conflabitur æſtimatio 1℞. Vt ſi æquatio ponatur inter 1ℨ. & 6℞+16. vel inter ℨ. & 16+6℞. ducemus 3. id eſt, ſemiſſem numeri ℞, in ſe, ac producto 9. adiiciemus numerum abſolutum 16. vt fiant 25. Ad huius enim numeri radicem quadratam 5. ſi addatur ſemiſſis numeri radicum, nimirum 3 conflabitur numerus 8. pro pretio 1℞. Nam eius quadratum eſt 64. qui numerus æqualis eſt 6℞, id eſt, 48. vna cum 16. vt patet.

## REGVLA VI.

*Quando æquatio est inter ℨ+N. & ℞.*

QVANDO denique æquatio reperitur inter ℨ+N. & ℞; multiplicanda eſt ſemiſſis numeri radicum in ſe, & ex producto auferendus numerus abſolutus propoſitus. Nam ſi ad radicem quadratam reliqui numeri adiicias ſemiſſem numeri radicum, vel ex hac ſemiſſe eandem radicem detrahas, conficies pretium 1℞, ita vt eiuſmodi æquatio duplicem habeat radicem, maiorem ſcilicet ac minorem. Vt ſi propoſita ſit æquatio inter 1ℨ+21. & 10℞. ducemus 5. ſemiſſem numeri radicum in ſe, & ex producto numero 25. auferemus numerum abſolutum 21. Nam ſi ad reliqui numeri 4. radicem quadratam 2. addemus ſemiſſem numeri radicum, hoc eſt, 5. efficiemus 7. valorem maioris radicis: Et ſi eandem radicem 2. ſubtrahemus ex 5. nimirum ex ſemiſſe numeri radicum, reliqua fient 3. pro valore minoris radicis. Nam maioris radicis 7. quadratum eſt 49. & additis 21. fit numerus 70. qui æqualis eſt 10℞. At vero minoris radicis 3. quadratum eſt 9. & additis 21. fit numerus 30. qui æqualis eſt 10℞ vt liquet.

*Quando in æquatione reperiuntur plures, pauciores ue Zensi.*

PORRO quando plures, vel pauciores zenſi, quam 1. in aliqua æquatione occurrunt, diuidendi erunt omnes numeri æquationis per numerum ſigno ℨ. affectum, vt æquatio fiat inter 1ℨ. &c. quod & nos faciendum eſſe præcepimus. V.g. ſi æquatio detur inter 3ℨ+63. & 30.℞, diuidendi erunt ſinguli numeri per 3. vt æquatio fiat inter 1ℨ+21. & 10℞: ac deinde regula 6. vſurpanda. Sic ſi detur æquatio inter ½ℨ. & 3℞+8. Vel inter ½ℨ. & 8+3℞. ſi numeri ſinguli diuidantur per ½. inuenietur æquatio inter 1ℨ. & 6℞+16. vel inter 1ℨ. & 16+6℞. quæ per 5. regulam explicabitur.

*Quo pacto aliæ æquationes ad 6. superiores regulas reuocentur.*

HÆ ergo ſunt 6. regulæ ab omnibus ferme auctoribus traditæ. Omnes enim aliæ æquationes inter alios numeros Coſſicos, qui diuerſi ſunt à ℨ ℞. & N. ad prædictas 6. reducuntur; vt fruſtra nonnulli ſcriptores plures regulas præſcribant. Nam ſi huiuſmodi æquationes occurrant, in quibus numeri exponentes characterum ſeruant proportionalitatem Arithmeticam, abbreuiandi erunt characteres, vt ſupra dictum eſt, ad eum finem, vt in altera parte æquationis numerus abſolutus reperiatur: Deinde obſeruanda ea, quæ circa finem cap. 12. de extractione radicis Zenſizenſicæ, Zenſicubicæ, &c. ſcripſimus: quando videlicet exponentes ſeruant hanc proportionem Arithmeticam 4.2.0. vel 4.0.2. aut 6.3.0. vel 6.0.3. &c.

*Præstatiorem esse vnicam nostram regulam Algebræ 6. aliorũ regulis.*

QVOD ſi rem attentius introſpicere velimus, facile deprehendemus, vnicam noſtram Algebræ regulam longe eſſe præſtantiorem ſupradictis 6. regulis aliorum: quippe cum in noſtra fiat ſemper reductio æquationis ad 1ℨ. in vna parte æquationis, ac proinde ſigna + & —. in altera æquationis parte plene, atque abunde nos inſtruant, quando fieri debeat additio, & quando ſubtractio. quod in ſuperioribus 6. regulis non tam clare apparet.

*Æquatio simplex, & composita quæ.*

QVEMADMODVM autem ſcriptores Algebræ æquationes priorum trium regularum, ſimplices appellant, trium vero poſteriorum regularum æquationes compoſitas, vt paulo ante diximus: ita quoque nos in iis, quæ ſequuntur, æquationem, quæ inter duos numeros duntaxat occurrit, doctrinæ gratia, ſimplicem nominabimus, compoſitam vero eam, quæ inter tres numeros deprehenditur.

---

## *QVÆSTIO PROPOSITA VTRVM POSSIBILIS ſit, nec ne, an vero inepta, ac nugatoria, quo pacto ex ipſa operatione, quæ per Algebræ regulam fit, cognoſcatur.*

## CAPVT XIV.

*Quo pacto cognoscatur, num quæstio sit possibilis, an impossibilis.*

QVONIAM in principio huius lib. diximus, regulam Algebræ hanc habere excellentiam, vt in ipſo opere nos edoceat, num quæſtio, quæ proponitur, ſolui poſſit, nec ne: docendum iam paucis erit, qua id ratione fiat. Quotieſcunq; igitur in diſſoluenda per Algebræ præcepta quæſtione aliqua incidimus in æquationem aliquam impoſſibilem, vel nugatoriam, atque ineptam, pronunciabimus quæſtionem ſolui nulla ratione poſſe: vel certe eſſe nugatoriam, & ineptam. quod nonnullis exemplis declarabitur.

1. *Quæratur numerus, qui ductus in 3. & hic productus in se, tantum faciat, quantum ex ipso numero in se multiplicato, & ex hoc producto in 5.* 1 quæstio impossibilis.

PONATVR quæsitus numerus 1℞ quæ ducta in 3. facit 3℞. & hic productus in se, facit 9ℨ. qui numerus debet esse æqualis ei, qui fit ex 1℞, in se, & ex producto in 5. Fit autem ex 1℞ in se, 1ℨ. & hic numerus in 5. ductus facit 5ℨ Inuenta ergo est æquatio inter 9ℨ. & 5ℨ. quæ est impossibilis. Quapropter enunciabimus, quæstionem propositam esse impossibilem.

2. *Diuidatur numerus 12. in tales duas partes, vt $\frac{1}{3}$. vnius cum $\frac{1}{4}$. alterius efficiat 4* 2. quæstio impossibilis.

PONATVR pro vna parte 1℞ eritque altera 12—1℞. Tertia pars illius est $\frac{1}{3}$℞. & quarta pars huius est $3-\frac{1}{4}$℞. quæ simul efficiunt $3+\frac{1}{12}$℞. (Nam ex $+\frac{1}{3}$℞. & $-\frac{1}{4}$℞. fit $+\frac{1}{12}$℞. vt ex cap. 4. constat) quæ æqualia esse debent numero 4. Ablatis vtrinque 3. erit æqualitas inter $\frac{1}{12}$℞. & 1. Igitur diuisa 1 per $\frac{1}{12}$. fiet 1℞ 12. atque hæc est prima pars numeri 12 & altera pars 0. quod est ineptum. Impropriè tamen $\frac{1}{3}$. illius, nimirum 4. cum $\frac{1}{4}$. huius, id est, cum 0. facit 4.

QVOD si, positis eisdem partibus 1℞. & 12—1℞. accipiamus $\frac{1}{4}$. prioris, nempe $\frac{1}{4}$℞ & $\frac{1}{3}$ posterioris, videlicet $4-\frac{1}{3}$℞. quæ partes simul conficiunt $4-\frac{1}{12}$℞ quod $\frac{1}{4}$℞. & $-\frac{1}{3}$℞ faciant $-\frac{1}{12}$℞. vt ex cap. 4. constat) quæ æqualia non possunt esse numero 4. Ergo neque hoc modo quæstio possibilis est.

3. *Diuidatur numerus 10. in tales duas partes, vt ex ductu vnius in alteram producantur 26.* 3. quæstio impossibilis.

PONATVR pro vna parte 1℞. eritq; altera 10—1℞. quæ partes inter se multiplicatæ faciunt 10℞—1ℨ. qui productus æqualis esse debet numero 26. Addito 1ℨ. vtrinque, fiunt 10℞. æquales 1ℨ+26: ablatisque 26. vtrinque, erit æqualitas inter 1ℨ. & 10℞—26. Ex hoc numero, qui æqualis est 1ℨ. extrahemus radicem quadratam hoc modo, vt supra docuimus. Semissis radicum est 5. huius quadratum 25. ex quo auferri non possunt 26. vt vult signum —. Igitur dicemus, quæstionem solui non posse.

4. *Inueniantur duo numeri, vt ex ductu vnius in alterum fiat numerus triplus summæ ipsorum.* 4. quæstio impossibilis.

PONATVR vnus 1℞. & alter 2. vnitates. Ex 1℞ in 2. fit numerus 2℞. qui triplus esse debet summæ ipsorum, quæ est 1℞+2. Ergo summa hæc triplicata, nimirum 3℞+6. æqualis debet esse 2℞. quod falsum est. Impossibilis igitur est quæstio proposita, si alter numerorum constituatur 2. Si pro secundo numero positæ fuissent plures vnitates, quam in denominatore proportionis datæ continentur, nimirũ 4. vel 5. vel 6. &c. quæstio solui posset. Nam posito secundo numero 4. inueniretur 1℞. esse 12. atque ita duo numeri quæsiti essent 12. & 4. qui inter se multiplicati efficiunt 48. qui numerus triplus est summæ ipsorum, quæ est 16.

5. *Quæratur numerus, qui per 3. multiplicatus producat ipsius quadratum, & summa ex ipso numero, & eius quadrato collecta sit 7.* 5. quæstio impossibilis.

PONAMVS numerum esse 1℞. quæ multiplicata per 3. facit 3℞. qui numerus æqualis debet esse quadrato ex 1℞. producto, nimirum 1ℨ. eritque vnius radicis pretium 3. qui numerus per 3. multiplicatus, hoc est, in seipsum, procreat eius quadratum 9. Sed quoniam hic quadratus cum sua radice 3. conficit 12. non autem 7. dices quæstionem esse impossibilem. quod etiam ex ipsis æquationibus constat. Nam 1℞. cum suo producto 3℞ facit 4℞ quæ æquales esse debent 7. atque ita 1℞ erit $\frac{7}{4}$ Et quia 1℞. cum suo quadrato, id est, cum 1ℨ. etiam æqualis debet esse numero 7. erit æquatio inter 1ℨ+1℞. & 7. hoc est, (ablata 1℞ vtrinque) inter 1ℨ. & 7—1℞. inuenieturq; 1℞. esse $\sqrt{ℨ}\,\frac{29}{4}-\frac{1}{2}$. quæ à priori valde differt. Immo si tam 4℞. quam 1ℨ+1℞. æquales sunt 7. erũt bis 7. id est, 14. æquales 1ℨ+5℞. hoc est, æquatio constituetur inter 1ℨ. & 14—5℞ eritq; 1℞ 2. quæ ab vtraque superiori longe etiam differt. Denique si tam 4℞. quam 1ℨ+1℞. æquales sunt 7. erit etiam æqualitas inter 4℞ & 1ℨ+1℞. ablataque vtrinque 1℞. erunt 3℞ æquales 1ℨ. Pretium ergo 1℞. erit 3. Quocirca cum tam variæ æstimationes 1℞. inueniantur, quæstio solui non poterit, præsertim cum per nullam radicum inuentarum quæstioni satisfiat, nisi priori eius parti per radicem 3.

6. *Quæratur numerus, cuius quadratus cum numero 40. æqualis sit 12. radicibus eiusdem quadrati.* 6. quæstio impossibilis.

PONATVR numerus esse 1℞. Eius quadratus erit 1ℨ. Igitur 1ℨ+40 æqualia sunt 12℞. hoc est, 1ℨ, æqualis erit 12℞—40. Sumatur semissis numeri radicum, nimirum 6. Et quia ab huius semissis quadrato, id est, ex 36. numerus 40. detrahi non potest, erit quæstio impossibilis.

7. IAM vero si quando accidat, æquationem inuentam esse inter duos numeros Cossicos æquales, eiusdemque denominationis, quæstio solui poterit per quemuis numerum. 7 quæstio possibilis quidem, sed nugatoria.

Vt si

*Quando quæstio per quemuis numerum solui possit.*

*Vt si quæratur numerus, quo multiplicato per 2. & producto in seipsum ducto, faciat numerum æqualem ei, qui ex numero in seipsum ducto producitur, & ex producto in 4.*

PONATVR numerus esse 1℞. Ex 1℞. in 2. fiunt 2℞ & ex 2℞ in se fiunt 4ʒ. Et quia 1℞ ducta in se giguit 1ʒ. & ex 1ʒ. in 4. fiunt 4ʒ inuenta erit æquatio inter 4ʒ. & 4ʒ. quæ nugatoria est & inepta. Quæstio igitur exerceri poterit in omni numero. Nam V.g. ex 10. in 2. fiunt 20. & ex 20. in se fiunt 400. quantum videlicet fit ex 10. in se, & ex producto 100. in 4.

*8 quæstio possibilis, sed nugatoria.*

8. *Item numerus 10. diuidendus sit in tales duas partes, vt numerus, qui fit ex vna parte in totum numerum, æqualis sit quadrato eiusdem partis, vna cum numero, qui ex eadem parte in alteram ducta procreatur.*

PONATVR prima pars esse 1℞ ideoq; altera 10 — 1℞. Et quia ex priori parte, id est, ex 1℞. in totum numerum 10. fiunt 10℞: Ex eadem autem parte in se fit 1ʒ. & ex 1℞ in 10 — 1℞ fiunt 10℞ — 1ʒ. quæ addita ad 1ʒ, fiunt 10℞. quia vt 1ʒ addatur ad — 1ʒ. debet fieri subtractio, vt in additione dictum est. Igitur inuenta est æquatio inter 10℞. & 10℞ quæ similiter nugatoria est: fierique potest, quod proponitur, in quolibet numero, quomodocunque in duas partes distributo, vt demonstratum est ab Euclid. lib. 2. propos. 3. Quod si altera pars 10 — 1℞ ducatur in totum numerũ 10. fiunt 100 — 10℞. Si vero eadem pars in se ducatur, fiunt 100 — 20℞ + 1ʒ. & duæ partes 1℞. & 10 — 1℞ inter se multiplicatæ faciunt 10℞ — 1ʒ. quæ cum 100 — 20℞ + 1ʒ. faciũt 100 — 0℞. quæ æqualia esse debent 100 — 10℞. producto scilicet secundæ partis in 10. quæ æquatio nugatoria quoque est.

*9. quæstio nugatoria, quamuis possibilis.*

9. *Sit rursum diuidendus numerus 10. in tales duas partes, vt producti ex toto numero 10. in ipsas partes sint simul æquales quadrato totius numeri.*

PONATVR vna pars 1℞. ideoque altera 10 — 1℞. Ex toto numero 10. in 1℞. & 10 — 1℞ fiunt 10℞. & 100 — 10℞ qui numeri simul efficiunt 100. vt ex regula additionis patet. Et quoniam ex 10. in se fiunt quoque 100. erit æquatio inter 100. & 100. quod est ineptum. Quæstio ergo soluitur per quemcunque numerum in quascunque duas partes diuisum, vt ab Eucl. lib 2. propos. 2. ostensum est.

LIQVET igitur, ex ipsa operatione cognosci posse, num proposita quæstio solui possit, nec ne; an vero sit vana, ac nugatoria, quæ videlicet in omnem numerum conueniat.

---

## DE SECVNDIS RADICIBVS.

## CAPVT XV.

*Cur excogitata sint secundæ radices.*

QVÆRVNTVR non raro duo, vel tres, aut etiam plures numeri sub incerta proportione: ideirco postquam pro primo numero posita est 1℞. non videtur commodum pro secundo numero ponere iterum 1℞: & pro tertio etiam 1℞. &c. quia cum 1℞ primo loco posita diuersum plerumque valorem habeat à radice secundo loco posita, itemque à radice tertio loco posita; facile eueniret, vt in operatione exempli radices inter se confunderentur, nisi diuersis characteribus designentur. Quam ob rem excogitatæ sunt radices secundæ, quas Cardanus Quantitates surdas, Petrus Nonius, & alij Quantitates simplices, aut absolutas appellant, notantque hoc modo. 1q. 2q. &c. hoc est, vna quantitas, duæ quantitates, &c. Nos cum alijs appellabimus radices secundas, notabimusque hoc modo, 1A. hoc est, 1℞ secunda distincta ab ea, quæ primo loco posita est. 1B, id est, 1℞ secunda distincta à duabus, quæ primo & secundo loco positæ sunt. & sic deinceps. Hac enim ratione facilius secundarum radicum algorithmus explicabitur.

IN numeratione quando numerus duo signa habet, intelligitur numerus cum priore signo ductus in vnitatem posterioris signi. Vt 1℞A, significat 1℞. ductam in 1A. & 3℞A, significat 3℞. ductas in 1A. Sic 1ʒAʒ, indicat 1ʒ. ductum in 1Aʒ. &c.

*Additio secundarum radicum.*

ADDITIO vero perficitur, si numeri inter se addantur, & character idem secundæ radicis apponatur: quando videlicet secundæ radices sunt eiusdem generis. Vt ex 3A. & 4A, fiunt 7A, atque ex 3B, & 4B, fiunt 7B, &c. Quando vero secundæ radires non sunt eiusdem generis, fit additio per signum additorum +. Vt ex 3A, & 4B, fiunt 3A + 4B. Item ex 3℞. & 4. A, fiunt 3℞ + 4A. &c.

*Subtractio secundarũ radicum.*

SVBTRACTIO quoque, quando secundæ radices sunt eiusdem generis, fit, si numerus à numero subtrahatur, & reliquo numero idem character secundæ radicis apponatur. Vt 3A, ex 7A, relinquunt 4A. & 3B, ex 7B, relinquunt 4B, &c. Quando autem secundæ radices sunt diuersæ, fit subtractio per signum subtractorum —. Vt 3A, ex 4B, relinquunt 4B — 3A.

*Multiplicatio secundarum radicum.*

MVLTIPLICATIONES autem ita fiunt. Quando numerus radicis primæ multiplicandus est cum numero radicis secundæ signatæ solum litera A, vel B, &c. multiplicantur numeri inter se, & eadem signa apponuntur. Vt ex 2℞. in 2A. fiunt 4℞A. id est, 4℞ multiplicatæ in 1A. Similiter ex 2A, in 2℞. fiunt 4A℞, hoc est, 4A, multiplicatæ in 1℞. Sic etiam ex 3ʒ in 4B, fiunt 12ʒB, id est, 12ʒ. multiplicati in 1B. &c. Sic etiam ex 1℞ in 1A, fit 1℞A, id est, 1℞ multiplicata in 1A. Et ex 1ʒ. in 1Aʒ. fit 1ʒAʒ. hoc est, 1ʒ. ductus in 1Aʒ.

QVAN-

QVANDO numerus absolutus in numerum secundæ radicis ducitur, fit numerus secundæ radicis. Vt ex 6. in 3 C, fiunt 18 C. Et ex 7. in 4 B, fiunt 28 B, &c.

QVANDO numerus secundæ radicis ducitur in numerum secundæ radicis diuersæ literæ, ducitur numerus in numerum, productoque eædem literæ apponuntur. Vt ex 3 A, in 9 B, fiunt 27 AB, hoc est, 27 A, multiplicatæ in 1 B.

QVANDO numerus secundæ radicis ducitur in numerũ secundæ radicis eiusdem literæ, producitur character ȝ, præposita tamen eadem litera. Vt ex 3 A, in 4 A, fiunt 12 Aȝ.

QVANDO numerus secundæ radicis ducitur in se quadrate, vel cubice, &c. producitur character ȝ, vel ce, &c. præposita eadẽ litera. Vt 1 A, in se quadrate, facit 1 Aȝ. hoc est, 1. quadratum secundæ radicis. Rursus ex 1℞A, in 1℞A, fit 1ȝAȝ. id est, 1ȝ primæ radicis ductus in 1ȝ. secundæ radicis. Item 3 B, in se quadrate faciunt 9 Bȝ. Sic 3 B, in se cubice, faciunt 27 Bce.

QVANDO numerus secundæ radicis ducitur in alium numerum eiusdem radicis secundæ, quæ etiam habet characterem Cossicum, intelligitur primus numerus habere etiam signum Cossicum ℞. Vt ex 1 A, in 1 Aȝ fit 1 Ace. Et ex 3 B, in 4 Bce, fiunt 12 Bȝȝ.

QVANDO numerus Cossicus simplex, absque litera secundæ radicis, multiplicatur in numerum signatum litera, & signo Cossico, ducitur numerus in numerum, & producto eadem signa apponuntur. Vt ex 2 ce. in 4 Aȝ. fiunt 8 ceAȝ. hoc est, 8 ce multiplicati in 1 Aȝ. Item ex 1 ce in 1℞Aȝ. fit 1ȝȝAȝ. id est, 1ȝȝ. ductus in 1 Aȝ. Tantum quoque fit ex 1 ȝA, in se quadratè. Nam ex 1 ȝ. in se fit 1 ȝȝ. & ex 1 A, in se fit 1 Aȝ.

QVANDO numerus post literam secundæ radicis signum Cossicum gerens ducitur in numerum, qui post eandem literam secundæ radicis gerit quoque signum Cossicum; producitur numerus cum charactere Cossico, quem exponentes characterum dant, cui præponenda insuper est litera eadem secundæ radicis. Vt ex 2 Aȝ, in 5 Ace fiunt 10 Aß. Item ex 3 Bȝ. in 4 Bce. fiunt 12 Bß.

QVANDO numerus post literam secundæ radicis characterem Cossicum gerens ducitur in numerum, qui post characterem Cossicum literam quoque secundæ radicis habet, producitur numerus cum posteriore charactere Cossico, quem insequitur litera secundæ radicis, deinde apponitur character Cossicus productus ex priore charactere Cossico in literam secundæ radicis, ac si haberet signum hoc ℞. Vt ex 1 Ace, in 1ȝA, fit 1 ȝAȝȝ. Tantundem quoque fit ex 1℞Aȝ. in se quadratè. Item ex 3 Aȝ, in 4 ceA, fiunt 12 ceAce, id est, 12 ce multiplicati in 1 Ace.

In diuisione secundarum radicum, fit prius reductio signorum Cossicorum, per subtractionem similium signorum. Vt ex diuisione 8 ceAȝ, per 4 Aȝ, reductis signis, diuiduntur 8 ce per 4. fitque Quotiens 2 ce. Sic 8 ceAȝ, per 4 ce, fit Quotiens 2 Aȝ. *Diuisio secundarum radicum.*

QVANDO autem diuiditur numerus ℞, per numerum secundarum radicum, fit minutia in Quotiẽte. Vt 2℞ per 4 A, fit 2℞/4A.

IN extractione radicum, eruitur radix ex numero, si habet, eique apponitur litera secundæ radicis, reiecto charactere Cossico. Vt radix quadrata numeri 25 Aȝ. est 5 A. Item radix cubica numeri 27 Ace. est 3 A. Et radix zensizensica numeri 16 Dȝȝ. est 2 D. *Extractio radicũ ex secundis radicibus.*

QVANDO verò numerus non habet talem radicem, vel character Cossicus non est eiusdem appellationis cum radice extrahenda, præponitur toti numero cum litera, & charactere, signum radicale. Vt radix cubica numeri 3 Aȝ. est √ce 3 Aȝ. Item radix quadrata numeri 4 Ace. est √ȝ 4 Ace.

PROBANTVR prædictæ multiplicationes, diuisionesque per progressiones Geometricas ab 1. incipientes. Claritatis autem gratia progressionem duplarum proportionum ascribemus primis radicibus, & progressionem triplarum radicibus secundis. cuiusmodi sunt hæ. *Examen operationũ radicum secundarũ.*

| N | ℞ | ȝ | ce | ȝȝ | ß | ȝce | Bß | ȝȝȝ | Cce | ȝß | &c. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 | &c. |
| 1 | 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | 2187 | 6561 | 19683 | 59049 | &c. |

Itaque vt videas, ex 2℞ in 2A. fieri 4℞A, id est, 4℞. ductas in 1A. resolutæ 2℞. faciunt 4 & 2 A, faciunt 6. at 4. in 6. efficiunt 24. quantum videlicet faciunt 4℞. id est, 8 ductæ in 1 A, id est, in 3.

DEINDE ex 2A, in 2℞ diximus fieri 4A℞, hoc est, 4A, ductas in 1℞. Et quia 2A, sunt 6 & 2℞, sunt 4. fiunt autem 24. ex 6. in 4. quantum nimirum faciunt 4 A, id est 12. in 1. ℞, videlicet in 2.

PRÆTEREA ex 1. ℞ in 1 A, producitur 1℞A. quia 1℞ est 2. & 1 A est 3. fiunt autem 6. ex 2. in 3. quantum nimirum fit ex 1℞ id est, ex 2. in 1 A, id est in 3.

SIC etiam ex 1ȝ in Aȝ, fit 1ȝAȝ, nimirum 1ȝ. ductus in 1 Aȝ. Et quia 1ȝ est 4. & 1 Aȝ, est 9. fiunt autem 36. ex 4. in 9. quantum nimirum fit ex 1ȝ. id est ex 4. in 1 Aȝ, id est in 9.

RVRSVS ex 3 ȝ. in 4 B, facti sunt 12 ȝB. hoc est, 12 ȝ. ducti in 1 B. Nam 3 ȝ. sunt 12. & 4 B, sunt etiam 12. fiunt autem 144. ex 12. in 12. quantum nimirum fit ex 12 ȝ. id est, ex 48 in 1 B. id est, in 3.

ITEM ex 6. in 3 C. fiunt 18 C, hoc est, ex 6. in 9. fiunt 54. hoc est, 18 C. Sic ex 7. in 4 B. factæ sunt 28 B, nimirum 84 quantum nimirum fit ex 7. in 4 B, id est, in 12.

EX 3 A, in 9 B, procreatæ sunt 27 AB, id est, 27 A, multiplicatæ in 1 B. Nam 3 A, sunt 9. & 9 B, sunt 27. Fiũt autem 243. ex 9. in 27. quantum nimirum fit ex 27 A, id est, ex 81. in 1 B, id est, in 3.

ITEM ex 3 A, in 4 A, fiunt 12 Aȝ hoc est, 12 ȝ. secundæ radicis. Nam 3 A, sunt 9 & 4 A, sunt 12. Fiunt autem 108. ex 9. in 12. quantum nimirum faciunt 12ȝ. secundæ radicis.

PRÆTEREA ex 1 A, in se quadrate fit 1 A ȝ. hoc est, 1ȝ secundæ radicis. Item 3B, in se quadrate faciunt 9Bȝ. id est, 9ȝ. secundæ radicis. Nam 3B, sunt 9. at ex 9. in 9. fiunt 81. nimirum 9ȝ. secundæ radicis. Item ex 1℞A, in 1℞A, fit 1ȝAȝ, id est, 1ȝ. primæ radicis ductus in 1ȝ. secundæ radicis. Nam 1℞A, significat 1℞. primam ductam in 1. radicem secundam, id est, 2. ducta in 3. hoc est, 6. Fit autem ex 6. in 6. numerus 36. quantum

nimirum fit ex 1ℨ. primæ radicis, id est, ex 4. in 1. quadratum secundæ radicis, nimirum in 9. Sic 3B, in se cubice faciunt 27 Bℭ, id est, 27ℭ secundæ radicis. Quia 3B, sunt 9. & 9. in se cubice faciunt 729. quantum videlicet faciunt 27ℭ secundæ radicis.

POST hæc, ex 1A, in 1Aℨ, fit 1Aℭ, hoc est, cubus secundæ radicis, nimirum 27. Nam 1A, valet 3, & 1ℨ. secundæ radicis 9. Liquet autem ex 3. in 9. gigni 27.

ITA quoque ex 3B, in 4Bℭ. fiunt 12Bℨℨ. hoc est, 12ℨℨ. secundæ radicis. Nam 3B, sunt 9. & 4ℭ secundæ radicis 108. Fiunt autem 972. ex 9. in 108. quantum videlicet faciunt 12ℨℨ. secundæ radicis.

AMPLIVS ex 2ℭ in 4Aℨ. fiunt 8ℭAℨ, hoc est, 8ℭ multiplicati in 1ℨ secundæ radicis. Nam 2ℭ sunt 16 & 4ℨ secundæ radicis 36. Fiunt autem 576. ex 16. in 36. quantum nimirum faciunt 8ℭ, id est, 64. multiplicati in 1ℨ. secundæ radicis, videlicet in 9. Item ex 1ℭ. in 12ℭAℨ fit 1ℨℨAℨ. id est, 1ℨℨ. ductus in 1ℨ secundæ radicis. Nam 1ℭ. est 8. & 12ℭAℨ. id est, 12ℭ ducta in 1ℨ secundæ radicis, est 18: Fiunt autem 144. ex 8. in 18. quantum scilicet facit 1ℨℨ, nimirum 16. ductus in 1ℨ. secundæ radicis, id est, in 9.

ITEM ex 2Aℨ, in 5Aℭ. fiunt 10Aß. Nam 2ℨ. secundæ radicis sunt 18. & 5ℭ secundæ radicis sunt 135. Fiunt autem 2430. ex 18. in 135. quantum scilicet faciunt 10ß secundæ radicis. Item ex 3Bℨ. in 4Bℭ, fiunt 12Bß. Nam 3ℨ secundæ radicis faciunt 27. & 4ℭ secundæ radicis faciunt 108. Fiunt autem 2916. ex 27. in 108. ac tantundem faciunt 12ß. secundæ radicis.

POSTREMO ex 1Aℭ. in 1ℨA, fit 1ℨAℨℨ. hoc est, 1ℨ. ductus in 1ℨℨ. secundæ radicis. Nam 1ℭ secundæ radicis est 27. & 1ℨ est 4. Fiunt autem 108. ex 27. in 4. & ex 108. in 12ℭ secundam, id est, in 3. fiunt 324. ac tantundem fit ex 1ℨ. in 1ℨℨ. secundæ radicis, hoc est, ex 4. in 81. Quod autem ex 12ℭAℨ, in se quadrate fiat quoque 1ℨAℨℨ sic perspicuum fiet. Numerus 12ℭAℨ. significat 12ℭ primam, id est, 2. ductam in 1ℨ. secundæ radicis, id est, in 9. quæ multiplicatio facit 18. At ex 18 in 18. fit numerus 324. qui æquiualet numero 1ℨAℨℨ. hoc est, numero producto ex 1ℨ. id est, ex 4. in 1ℨℨ. secundæ radicis, hoc est, in 81. Similiter ex 3Aℨ, in 4ℭA, fiunt 12ℭAℭ. Nam 3ℨ. secundæ radicis sunt 27. & 4ℭA, (id est, 4ℭ ducti in 1A, vel in radicem secundam, hoc est, ex 32. in 3.) faciunt 96. Fiunt autem 2592. ex 27. in 96. Ac tantundem faciunt 12ℭAℭ. hoc est, 12ℭ multiplicati in 1ℭ secundæ radicis, nimirum ex 96. in 27.

IAM vero ex diuisione 8ℭAℨ. per 4Aℨ, produci Quotientem 2ℭ. eodem modo probabimus. Nam 8ℭAℨ. (id est, 8ℭ multiplicati per 1Aℨ, hoc est, 64. per 9.) faciunt 576. qui numerus diuisus per 4ℨ secundæ radicis, nimirum per 36. facit Quotientem 16. hoc est, 2ℭ. Item ex diuisione 8ℭAℨ. per 4ℭ. gigni Quotientem 2Aℨ. perspicuum etiam est. Nam 8ℭAℨ (id est. 8ℭ. ducti in 1Aℨ, videlicet 64. in 9.) sunt 576. qui numerus diuisus per 4ℭ, id est, per 32. facit Quotientem 18. nimirum 2ℨ. secundæ radicis.

PARI ratione, numeri 25Aℨ. radicem quadratam esse 5A. manifestum quoque est. Nam 5A, sunt 15. at ex 15. in 15. fit numerus 225. cui æquales sunt 25ℨ secundæ radicis. Non aliter ostendemus, 3A, esse radicem cubicam numeri 27Aℭ. Nam 3A, sunt 9. at ex 9. in se cubice fiunt 729. videlicet 27ℭ secundæ radicis. Ita quoque numeri 16Dℨℨ. radix Zensizensica erit 2D. quia 2D, sunt 6. & ex 6. in se Zensizensice fiunt 1296. nimirum 16ℨℨ secundæ radicis.

LIBVIT omnes has operationes secundarum radicum examinare per progressiones Geometricas, vt earum veritas omnibus constaret: quia de illis fortasse non nemo dubitare posset, cum earum ratio sit paulo obscurior, quam illa operationum numerorum Cossicorum. Vsus porro secundarum radicum explicabitur in ænigmatibus per regulam Algebræ dissoluendis.

## *DE NVMERIS IRRATIONALIBUS, siue surdis.*

## CAPVT XVI.

*Irrationales numeri, siue surdi, qui.*

NVMERI irrationales, siue surdi sunt radices numerorum, quæ exprimi non possunt numeris, ac proinde neque audiri, ob quam causam radices surdæ sunt appellatæ, signanturque hoc modo. √ℨ. √ℭ. √ℨℨ. √ß. √ℨℭ. &c. vt ad finem cap. 3. declarauimus. Vt √ℨ10. hoc est, radix quadrata numeri 10. dicitur surda, vel irrationalis, quia nullus numerus dari potest, siue integer sit, siue integer cum fracto, qui in se quadrate multiplicatus producat 10. De integro manifestum est. Nam 3. in se ductus producit 9. numerum minorem quam 10. At 4. in se multiplicatus gignit 16. numerum maiorem, quam 10. atque idcirco neque 3. neque 4. ideoque neque vllus numerus minor quam 3. neque maior quam 4. radix quadrata esse potest numeri 10. De integro cum fracto res etiam clara est. Radix enim illa deberet esse inter 3. & 4. Sed quamuis inter 3. & 4. infiniti sint fracti, qui cum 3. constituant integrum cum fractis, vt $3\frac{1}{2}$. $3\frac{1}{4}$. $3\frac{1}{7}$. $3\frac{5}{7}$. $3\frac{1}{11}$. &c. nullus tamen eorum in se ductus quadrate producere potest 10. numerum integrum, vt in Lemmate ad finem defin. 8. lib. 5. Euclid. demonstrauimus. Sic etiam √ℭ10 irrationalis est, & √ℨℭ100. &c.

DE hisce numeris nunc agendum est, vt plurimæ quæstiones, in quibus numeri irrationales interueniunt, queant explicari. Res quidem est non paucis difficultatibus inuoluta, sed quæ tamen plane intelligatur, si modo vehemens, ardensque studium adhibeatur. Quod si quis ad hanc rem perfecte intelligendam minus idoneus reperiatur, is ne desperet omnino: quippe cum sine hac cognitione innumerabiles pene quæstiones per Algebræ regulam enodari queant. Quocirca, omissa ad breue tempus tractatione hac numerorum irrationalium, quæ 13. capitibus continetur, conferre se poterit ad cap. 29. & 30. vbi innumerabilia pene ænigmata scitu iucundissima, sine cognitione numerorum irrationalium, enodata inueniet. Deinde postquam se aliquamdiu in Algebræ quæstionibus exercuerit, regredi poterit ad tractationem hanc numerorum irrationalium perdiscendam.

SOLET ante omnia à nonnullis disputari, an numeri irrationales vere dicendi sint numeri, nec ne. Cum enim neque integri numeri sint, neque fracti, vt paulo ante diximus, neque certam proportionem, quæ numeris exprimi possit, habeant ad integros numeros, aut fractos, non videntur esse numeri dicendi, Quia tamen sub regulam cadunt, censendi erunt aliquo modo esse numeri. Nam √ȝ10. in se multiplicata gignit numerum 10. sicut radix quadrata numeri 9. producit 9. Item √ȝ3. in √ȝ12. procreat √ȝ36. hoc est, 6. quemadmodum idem numerus 6. fit ex 2. in 3. vt ex algorithmo numerorum irrationaliũ, de quo mox agemus, constabit. Habent autem numeri irrationales cum numeris fractis quandam affinitatem. Quemadmodum enim inter quosuis duos numeros integros cadunt infiniti numeri fracti, vt hic apparet, vbi inter 2. & 3. cadunt omnes hi numeri fracti.

*Verum radices surdæ sint numeri, nec ne.*

$2\frac{1}{2}$. $2\frac{1}{3}$. $2\frac{2}{3}$. $2\frac{1}{4}$. $2\frac{3}{4}$. $2\frac{1}{5}$. $2\frac{2}{5}$. $2\frac{3}{5}$. $2\frac{4}{5}$. $2\frac{1}{6}$. $2\frac{5}{6}$. &c.

ita quoque inter quoslibet duos numeros integros cadunt infiniti numeri irrationales. Vt inter 2. & 3. cadunt omnes hi.

√ȝ5. √ȝ6. √ȝ7. √ȝ8. √ce9. √ce10. √ce11. √ce12. √ce13. √ce14. √ce15. √ce16. √ce17. √ce18. √ce19. √ce20. √ce21. √ce22. √ce23. √ce24. √ce25. √ce26. √ȝȝ17. √ȝȝ18. √ȝȝ19. √ȝȝ20. √ȝȝ21. √ȝȝ22. √ȝȝ23. &c.

Tam enim singuli illi fracti, quam hi surdi singuli maiores sunt quam 2. minores autem quam 3. vt liquet.

AFFERVNTVR ab auctoribus duo genera radicum surdarum. Quædam enim sunt simplices, vt √ȝ. alicuius numeri non quadrati. √ce alicuius numeri non cubi. √ȝȝ numeri alicuius non zensizensi. √ß alicuius numeri non surdesolidi, atque ita de aliis radicibus numerorũ progressionis Geometricæ ab 1. incipientis, quorum radices numeris exprimi non possunt, atque has radices simplices vocant nonnulli numeros mediales, propterea quod per illos reperiuntur media proportionalia inter duos numeros, vt cap. 21. dicemus. Aliæ radices surdæ sunt compositæ per interposita signa +. & −. quarum duo item genera ab auctoribus describuntur. In primo continentur illæ, quas dicunt Ligatas, quando nimirum intelligimus summam ex pluribus radicibus; vel ex vna radice, pluribusue, atque ex numero aliquo, vel ex numero Cossico, aut pluribus collectã. Vt cum per hunc numerum √ȝ9+√ȝ4. intelligimus 5. vnitates, summam videlicet ex 3. radice zensica numeri 9. & ex 2. radice zensica numeri 4. collectam, dicitur numerus ille radix Ligata, quæ æquiualet numero 5. Sic etiam Ligata radix erit √ȝ7+√ȝ4+3. quæ æquiualebit huic √ȝ7+5. Significamus enim ad √ȝ7. additum esse numerum 5. Eodem modo radix Ligata erit, √ȝ3+22℮. Denotamus enim 22℮ esse additas ad √ȝ3. Denique Ligata radix erit √ȝ49−√ce27. Item √ce100−√ȝ9. In priori namque intelligimus ex √ȝ49. hoc est, ex 7. ablatam esse √ce27. id est, 3. atque ita pretium eius erit 4. In posteriori autem volumus ex √ce100. subtrahi √ȝ9. nimirum 3. Sed nos hasce radices Ligatas nominabimus deinceps numeros irrationales compositos, vel diminutos. Immo, vt breuitati consulamus, appellabimus deinceps etiam numeros diminutos, plerumque compositos. Alterum genus compositarum radicum complectitur radices surdas, quæ Vniuersales dicuntur: quando videlicet intelligitur radix alicuius radicis Ligatæ, vel numeri compositi, diminutiue. Vt huius numeri compositi, 22+√ȝ9. radix Vniuersalis est 5. Est enim sensus, vt ad 22. addatur radix zensica 9. quæ est 3. & aggregati 25. radix sumatur, quæ est 5. Eodem pacto, si inuertantur particulæ numeri eiusdem, vt fiat numerus √ȝ9+22. erit eius radix Vniuersalis eadem, nimirum 5. Nos radices has Vniuersales vocabimus simpliciter radices numerorum irrationalium compositorum, aut diminutorum, ac propterea huiusmodi numeris præfigemus signum radicale √ȝ. vel √ce atque vt significemus, illud ad totum numerum compositum referri, includemus numerum compositum inter duas parentheses, hoc modo. √ȝ(22+√ȝ9.) vel sic, quod idem est, √ȝ(√ȝ9+22.) Alia exempla huiusmodi radicum sume hæc. √ȝ(√ȝ5+12℮.) Item √ȝ(4ȝ+12℮.) Item √ȝ(√ȝ9+√ȝ4)+√ȝ(11+√ȝ25.) Est enim sensus huius posterioris radicis, vt sumatur summa conflata ex √ȝ9 & √ȝ4 nimirum ex 3 & 2. quæ est 5. & ad hanc summam adiiciatur radix aggregati ex 11. & √ȝ25. hoc est, aggregati 16. quæ est 4. vt tota summa fiat 9. eiusque radix 3. Quod si inuertantur duo illi numeri compositi hoc modo. √ȝ(11+√ȝ25.)+√ȝ(√ȝ9+√ȝ4) variabitur sensus, quia signum radicale √ȝ. in principio positum videtur referendum esse ad totum illud, quod sequitur: ita vt 11. sumantur cum 5. radice 25. vt fiant 16. quibus addantur √ȝ9. & √ȝ4. nimirum 5. vt fiat tota summa 21. eiusque radix √ȝ21. quæ multum à priori, quæ erat 3. differt. Denique huius numeri √ȝ(7+√ȝ48) radix erit 2+√ȝ3. Nam hic numerus in se ductus producit 7+√ȝ48. vt ex sequentibus patebit. Est & aliud genus radicis apud scriptores nonnullos, quam Distinctam dicunt, in qua videlicet particulæ seorsum accipiuntur, nõ autem earũ summa. Vt hæc radix, √ȝ16+√ȝ9. quando particulæ per se sumuntur, vt 4. & 3. non autem coniunctim, vt 7. quia sic esset radix Ligata, quam nos simpliciter numerum irrationalem compositum nominauimus, dicitur radix Distincta: & multum differt à Ligata. Nam si accipiatur, tanquam Ligata, & in se ducatur, fiet numerus 49. At vt Distincta, fient numeri 16. & 9. qui simul efficiunt 25. duntaxat. Verum propriis in locis declarabimus, quisnam sensus sit harum radicum. Varie enim hac de re auctores loquuntur. Et de eisdem plura inuenies in cap. 24.

*Duo genera radicũ surdarum, simplex, & composita.*

*Numeri mediales qui.*

*Radix ligata quæ.*

*Numerus irrationalis compositus, vel diminutus qui.*

*Radix Vniuersalis, quæ.*

*Radix totius numeri compositi, diminutiue, quæ.*

*Radix Distincta, quæ.*

## *DE REDVCTIONE RADICVM SIMplicium ad eandem denominationem.*

## CAPVT XVII.

VT radices surdæ simplices inter se possint multiplicari, ac diuidi, necesse est illas, si diuersæ sint denominationis, ad eandem denominationem reducere, quæ reductio eodem fere modo fit, quo minutiæ diuersorum denominatorum ad eundem denominatorem reuocantur. Positis enim signis radicalibus sub numeris, ad quos pertinent, multiplicandi sunt ipsi numeri in signa radicalia per crucem, vt noui numeri procreentur: Deinde signa ipsa inter se addenda, hoc est,

*Qua ratione diuersæ radices ad eandẽ denominationem reducantur.*

eorum exponentes inter se multiplicandi quoque, vt signum commune, vel exponens signi communis producatur. V.g. hæ duæ radices √ʒ5. & √ce4. ita ad idem signum radicale reuocabuntur. Positis numeris, ac signis vt dictum est, & figura indicat, multiplicandus est nnmerus 5. cubice, propter signum ce, vt fiat nouus nnmerus 125. At numerus 4. zensice propter signum ʒ, vt gignatur nouus numerus 16. Deinde addendum signum ʒ. ad ce, vt fiat signum ʒce. cnius nimirum exponens est 6. procreatus ex ductu 2. exponentis ʒ in 3. exponentem ce, vt cap. 2. docuimus. quod signum productum ʒce. vtrique numero prius producto præfigendum est: ita vt √ʒ5. & √ce4. reducta sint ad √ʒce125. & √ʒce16. Quo facto, erit √ʒce125. æqualis √ʒ5. & √ʒce16. æqualis √ce4. Nam √ʒ5. est √ʒce numeri 125. propterea quod √ʒ5. in se quadrate efficit 5. & 5. in se cubice facit 125. Eadem ratione √ce4. est √ʒce numeri 16. propterea quod √ce4. in se cubice facit 4. & 4. in se quadrate facit 16. qnod etiam inde patet. Quoniam √ce, multiplicans √ʒ. & 5. produxit √ʒce. & 125.[a] erit eadem proportio √ʒce, ad 125. quæ √ʒ, ad 5. Sic quoque, cum √ʒ, multiplicans √ce. & 4. faciat √ʒce, & 16. erit eadem proportio √ʒce, ad 16. quæ √ce. ad 4. ac proinde √ʒ5. æqualis erit √ʒce125 & √ce4. æqualis √ʒce16.

125     16
5 X 4
√ʒ   √ce
2 — 3
6

*17. sept.* [a]

*Demonstratio reductionis.*

VERUM prædicto modo recte reduci radices ad eandem denominationem, hoc est, in dato exemplo, √ʒ5. esse √ʒce125. & √ce4. æquiualere √ʒce16. ita quoque Geometrice ostendemus.

| | C. 2. | | | | F. 3. | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | G | | D | E | H. |
| 1. | √ʒ5. | 5. | 125 | 1. | √ce4. | 4. | 16. |

K. 6.

Sit A, radix Zensica numeri B, cuius radicis exponens sit C. Item D, sit radix cubica numeri E, cuius exponens sit F. Dncatur B, quadratus huius numeri √ʒ5. in se cubice, propter exponentem F, vel signum ce. (ita enim fiet multiplicatio per crucem) vt fiat numerus 125. ita vt B, sit √ce, numeri producti 125. cuius exponens F. Item ducatur E, cubus huius nnmeri √ce4. in se quadrate, propter signum ʒ, vel exponentem C, vt fiat nnmerus 16. ita vt E, sit √ʒ numeri producti 16. cuius exponens C. Postremo ducatur exponens C, in exponentem F, fiatque numerus K. Dico A, esse √ʒce numeri G, nimirum à 6. denominatam. Et D, √ʒce esse numeri H, ab eodem numero K, denominatam. Cum enim A, sit radix ipsius B, denominata à C, erunt inter B, & vnitatem tot proportiones æqnales proportioni A, ad vnitatem, quot Vnitates sunt in C, nimirum duæ, vt cap. 2. explicatum est, & hic perspicuum est, 1. √ʒ5. 5. Item quia B, radix est ipsius G, denominata ab F, erunt eandem ob causam inter G, & vnitatem tot proportiones æquales proportioni B, ad vnitatem, quot sunt vnitates in F, nimirum tres, vt hic etiam patet. 1. 5. 25. 125. hoc est, inter G, & B, erunt duæ proportiones æquales proportioni B, ad vnitatem: quandoquidem inter G, & vnitatem sunt tres proportiones æquales proportioni B, ad vnitatem. Cum ergo inter B, & vnitatem sint duæ proportiones æquales proportioni A, ad vnitatem; erunt sex huiusmodi proportiones inter G, & vnitatem, quot videlicet vnitates sunt in K, qui numerus proportionum gignitur ex multiplicatione duarum proportionum inter B, & vnitatem, in tres proportiones inter G, & vnitatem, hoc est, ex C, in F. ac proinde G, erit zensicubus, cuius exponens est 6. hoc est, A, erit √ʒce. numeri G. Non aliter demonstrabimus, D, esse √ʒce. numeri H. Eademque ratio est de alijs, vt in hoc altero exemplo numerorum rationalium.

| | C. 3. | | | | F. 4. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | G | | D | E | H |
| 1. | 2. | 8. | 4096 | 1 | 3. | 81. | 531441 |

K. 12.

A, est √ce. numeri B, denominata à C. At vero D, est √ʒʒ, numeri E, denominata ab F. Ex B, in se zensizensice, propter exponentem F, fiat G, ita vt B. sit √ʒʒ. numeri 4096. Item ex E, in se cubice, propter exponentem C, fiat H, ita vt E, sit √ce. numeri H. Ac tandem ex C, in F, fiat K. Dico A, esse √ʒʒce. numeri G, denominatam à K, id est, à numero 12. Et D, esse √ʒʒce. numeri H, denominatam ab eodem numero 12. Cum enim A, sit radix ipsius B, denominata à C; erunt inter B, & vnitatem tot proportiones æquales proportioni A, ad vnitatem, quot vnitates sunt in C, nimitum tres, vt hic patet, 1. 2. 4. 8. Item quia B, radix est ipsius G, denominata ab F; erunt tot proporiones inter G, & vnitatem, quarum quælibet æqualis est proportioni B, ad vnitatem, quot vnitates sunt in F, nimirum quatuor, vt hic patet, 1. 8. 64. 512 4096. hoc est, inter G, & B, erunt tres proportiones æquales proportioni B, ad vnitatem: quandoquidem inter G, & vnitatem sunt quatnor proportiones æquales proportioni B, ad vnitatem. Cum ergo inter B, & vnitatem sint tres proportiones æqnales proportioni A, ad vnitatem; erunt inter G, & vnitatem duodecim proportiones æquales proportioni A, ad vnitatem: qnot videlicet sunt vnitates in numero K, nimirum 12. qui numerus proportionum gignitur ex multiplicatione trium proportionum inter B, & vnitatem, in quatuor proportiones inter G, & vnitatem, hoc est, ex C, in F: ac proinde G, erit ʒʒce, cuius exponens est 12. id est, A, erit √ʒʒce. numeri G. Eademque ratione D, erit √ʒʒce numeri H.

*Quo pacto numerus absolutus, & radix reducatur ad eandem denominationem.*

1296     12
6 X 12
√0   √ʒʒ
4

SINT rursus reuocandi duo numeri 6. id est, √06. (quod exponens numeri absoluti sit 0.) & √ʒʒ12. Dncantur 6. in se zensizensice, vt fiat 1296. Sed 12. ducenda non sunt in √0. propter exponentem 0. neq; 4. exponens ʒʒ. in 0, eandem ob causam. Quare 6. & √ʒʒ12. reducentur ad √ʒʒ1296. & √ʒʒ12. Atque ita, quando proponitur numerus absolntus, & radix aliqua, multiplicandus est tantummodo numerus absolutus in se, prout exigit character radicis. Vt in proximo exemplo numerus absolutus 6. ductus est in se zensizensice, factaque est reductio ad √ʒʒ1296. & √ʒʒ12.

COM-

COMPENDIOSE interdum fieri possunt huiusmodi reductiones, per abiectionem signi radicalis, quando nimirum vterque numerus habet radicem, quam signum radicale indicat. Tunc enim extrahitur illa radix, signumque eius radicale deletur. Vt si duæ hæ radices, √ʒce27. & √ʒʒ25. reuocandæ sint ad eandem denominationem, extraho ex 25. radicem zensicam 5. cui præpono reliquum signum ʒ, hoc modo. √ʒ5. Deinde ex 27. extraho radicem cubicam 3. quam multiplico zensice, vt fiat √ʒ9. Erunt ergo datæ duæ radices reductæ ad has √ʒ9. & √ʒ5. Si prius extrahetur radix cubica ex 27. nimirum 3. deleto signo √ce, remanet numerus absolutus 3. Extracta deinde radice zensica ex 25. quæ est 5. præpono ei reliquum signum ʒ. hoc modo √ʒ5. Quia vero prius inuentus est numerus absolutus 3. ducendus est in se zensice, vt fiat √ʒ9. atque ita rursus facta est reductio ad √ʒ9. & √ʒ5. vt prius. Sine compendio reducerentur ad has duas, √ʒʒce531441. & √ʒʒce15625. quæ tandem reducentur ad √ʒ9 & √ʒ5. hoc modo. Extraho ex 531441. radicem cubicam 81. & ex hac radicem zenſizensicam 3. cui nullum signum radicale præpono, quia numerus habuit √ʒʒce. Deinde ex 15625. eruo radicem cubicam 25. & ex hac radicem zensicam 5. cui præfigo signum ʒ. quod reliquum est, hoc modo √ʒ5. quia numerus 5. non habet √ʒ. Quoniam vero prius inuentus est numerus absolutus 3. ducatur 3. in se zensice, vt fiat √ʒ9. atque ita reductio facta erit ad √ʒ9 & √ʒ5. vt prius. Sic etiam si reducendę sint √ʒʒ1024. & √ʒce216. Extraho ex 1024. radicem surdesolidam 4. deletoque charactere ʃ. manet √ʒ4. Extracta autem radice zensica ex 4. habebimus 2. Item ex 216. eruo radicem cubicam 6. cui præpono signum ʒ. Sed quia prius habuimus numerum absolutum 2. ducemus 2. in se zensice, vt fiat √ʒ4. Erunt igitur dictę radices reductę ad √ʒ4. & √ʒ6. Atque hoc modo fit compendium per abiectionem alicuius signi radicalis.

*Compendium reductionis.*

| 531441 | | 15625 |
|---|---|---|
| 27 | X | 25 |
| √ce | | √ʒʒ |

NONNVNQVAM fieri etiam potest compendium per assumptionem alicuius signi radicalis. Vt si reducendę sint √ce2 & √ʒce6. duco 2. in se zensice, propter signum ʒ. quod præter ce reperitur in altera radice, facioque 4. cui præpono ʒ. eritq; facta reductio ad √ʒce4 & √ʒce6. Sine compendio fieret reductio, vt hic vides, ad √ʒcece64. & √ʒcece216. Et si ex his numeris eruantur radices cubicæ 4. & 6. deleanturque signa ce singula ex singulis, facta erit reductio ad √ʒce4. & √ʒce6. vt prius. Sic etiam reducentur √ce 2. & √ʒce 8. ad √ʒce4. & √ʒce8. si nimirum 2. ducatur in se zensice, & producto addatur idem signum radicale ce, præposito insuper signo ʒ.

| 64 | | 216 |
|---|---|---|
| 2 | X | 6 |
| √ce | | √ʒce |

DENIQVE vt alia adhuc exempla ob oculos ponam, quotiescunque in vtraque radice idem character reperitur, reducentur illæ radices facile ad eandem denominationem, si numerus minoris denominationis multiplicetur in se secundum exigentiam alterius characteris; qui in maiore denominatione reperitur, & producto addatur character ille, secundum quem facta est multiplicatio. Vt √ʒʒ9. & √ʒ4. reducentur ad √ʒʒ9 & √ʒʒ16. si nimirum numerus 4. minoris denominationis ducatur in se zensice, propter characterem ʒ qui in maiore denominatione pręter ʒ. reperitur.

*Regula reductionis quarundã radicum facilis.*

ITEM √ʒce8 & √ʒ9. reducentur ad √ʒce8. & √ʒce729. si nimirum numerus 9. minoris denominationis ducatur in se cubice, propter characterem ce, qui præter ʒ. in maiore denominatione continetur.

SIC etiam √ʒʒce20. & √ʒ10. reducentur ad √ʒʒce20. & √ʒʒce1000000. si nimirum numerus 10. minoris denominationis ducatur in se zensicubice, propter characterem √ce. qui præter ʒ. reperitur in maiore denominatione: hoc est, vel prius in se zensice, & productus 100. in se cubice: vel prius in se cubice, & productus 1000. in se zensice. Vtroque enim modo producitur numerus 1000000.

ITA quoque √ʒce30. & √ce15. reducentur ad √ʒce30. & √ʒce225. si videlicet numerus 15. minoris denominationis ducatur in se zensice, & producto 225. præter characterem ce. apponatur quoque character ʒ. & sic de alijs.

ITAQVE maior character semper manet intactus, & solum minor motatur, assumendo alium characterem pręter illum, quem habet; characterem inquam, secundum cuius exigentiam multiplicatus fuit numerus minoris denominationis, & qui in maiore denominatione reperitur vltra minoris denominationis characterem.

---

## *DE MVLTIPLICATIONE AC DIVISIONE radicum simplicium.*

## CAPVT XVIII.

VT doctrinę ordo seruetur, agendum erit de multiplicatione diuisioneque radicum simplicium ante additionem, subtractionemque, quia sine multiplicatione additio, subtractioq; radicum absolui non potest. Quando ergo duæ radices multiplicandæ, aut diuidenndæ sunt eiusdem generis, multiplicantur earum numeri inter se, aut diuiduntur, & producto numero idem signum radicale præponitur.

*Multiplicatio, ac diuisio radicum simplicium, quo pacto fiat.*

Vt ex ducto √ʒ7. in √ʒ10. fit √ʒ70.
Ex √ʒ3. in √ʒ12. fit √ʒ36. id est, 6.
Ex √ʒ$2\frac{1}{4}$. in √ʒ8. fit √ʒ18.
Ex √ce24. in √ce10. fit √ce240.
Ex √ce4. in √ce16. fit √ce64. hoc est, 4.

Ex √ȝȝ9. in √ȝȝ8. fit √ȝȝ72.
Ex √ß4. in √ß8. fit √ß32. id est, 2.
Item ex diuisione √ȝ70. per √ȝ7. fit √ȝ10.
Ex √ȝ36. per √ȝ12. fit √ȝ3.
Ex √ȝ18. per √ȝ8. fit √ȝ$2\frac{1}{4}$. hoc est, $\frac{3}{2}$.
Ex √ce240. per √ce24. fit √ce10.
Ex √ce64. per √ce4. fit √ce16.
Ex √ȝȝ72. per √ȝȝ.8. fit √ȝȝ9.
Ex √ß32. per √ß8. fit √ß4.

QVANDO autem propositæ duæ radices non sunt eiusdem naturæ, reducendæ sunt ad eandem denominationem: deinde multiplicatio, aut diuisio instituenda vt prius.

VT ex ductu √ȝ8. in $1\frac{1}{2}$. fit √ȝ18. Nam numerus $1\frac{1}{2}$. Zensice in se ductus facit √ȝ$2\frac{1}{4}$. hoc est, √ȝ$\frac{9}{4}$. atque ita ex √ȝ8. in √ȝ$\frac{9}{4}$. fit √ȝ$\frac{72}{4}$ hoc est, √ȝ18.

EX √ce2. in √ȝce6. fit √ȝce24. Duæ namque illæ radices reducuntur ad has duas √ȝce4. & √ȝce6.

EX √ȝ5 in √ce4. fit √ȝce 2000. Nam datæ duæ radices reuocantur ad has, √ȝce125. & √ȝce16.

ITEM ex diuisione √ȝ18. per $1\frac{1}{2}$ fit √ȝ8. Numerus enim $1\frac{1}{2}$. ductus in se quadrate facit $2\frac{1}{4}$. cui præponendum est signum ȝ. vt fiat √ȝ$2\frac{1}{4}$. atque ita diuisa √ȝ18. per √ȝ$2\frac{1}{4}$ hoc est, per √ȝ$\frac{9}{4}$. fit Quotiens √ȝ8.

EX √ȝce24. per √ce2. fit Quotiens √ȝce6. Nam duæ illæ radices reducuntur ad has √ȝce24. & √ȝce4. si nimirum numerus 2, ducatur in se quadrate, & producto 4. præter signum ce, apponatur etiam signum ȝ, vt fiat √ȝce4. atque ita diuisa √ȝce24. per √ȝce4. fit Quotiens √ȝce6.

EX √ȝce2000. per √ȝ5 fit Quotiens √ce4. Duæ namq; illæ radices reducũtur ad √ȝȝce4000000. & √ȝȝce15625. Nam 2000. in se quadrate faciunt 4000000. & 5 in se Zensicubice faciũt 15625. quibus productis præponitur commune signum ȝȝce. cuius exponens 12. gignitur ex 6. exponente signi ȝce. in 2. exponentem signi ȝ. atque ita si diuides √ȝȝce 4000000. per √ȝȝce15625. facies Quotientem √ȝȝce256. hoc est, √ce4 Nam √ȝȝ numeri 256. est 4 cuius √ce, est √ce4.

EX √ȝ$\frac{1}{4}$ per √ȝ$\frac{7}{8}$. fit Quotiens √ȝ$\frac{8}{28}$ id est, √ȝ$\frac{2}{7}$. Nam ex ductu Quotientis √ȝ$\frac{2}{7}$ in diuisorem √ȝ$\frac{7}{8}$. fit √ȝ$\frac{14}{56}$ hoc est, √ȝ$\frac{1}{4}$. numerus diuisus.

*Multiplicatio radicum in se quadrate, cubice, Zenzizensice, &c.*

QVANDO radix aliqua multiplicatur in se quadrate vel cubice, secundum exigentiam alterius signi radicalis, quod gerit, sumendus est ipsemet numerus pro numero producto, deleto signo radicali.

VT √ȝ4. in se quadrate facit 4. Nam √ȝ4. in √ȝ4. facit √ȝ16. hoc est, 4.

EX √ȝ18. in se quadrate facit 18. id est, √ȝ324. quæ est 18.

EX √ce4. in se cubice facit 4. Nam √ce4. in √ce4 facit √ce16. & ex √ce4. in √ce16. facit √ce64. hoc est, 4. atque radix cubica huius producti est √ce4.

SIC √ȝȝ16. in se zenzizensice facit 16. Nam ex √ȝȝ16. in √ȝȝ16 fit √ȝȝ256. & ex √ȝȝ256. in se fit √ȝȝ65536. nimirum 16. quia radix quadrata numeri 65536. est 256. & huius radix quadrata est 16.

AT quando radix aliqua multiplicatur in se secundum exigentiam alterius signi radicalis, ducendus est numerus in se secundum exigentiam alterius huius signi radicalis, ac producto signum radicale numeri multiplicati præponendum.

VT ex √ȝ6. in se cubice fit √ȝ216. Vnde radix cubica huius producti erit √ȝ6. Nam ex √ȝ6. in se fit √ȝ36. & ex √ȝ6. in √ȝ36. fit √ȝ216.

EX √ce8. in se quadrate fit √ce64. id est, 4. Vnde radix quadrata numeri √ce64. est √ce8. hoc est, 2.

EX √ce6. in se quadrate fit √ce36. Atque ita radix quadrata numeri √ce36. est √ce6.

EX √ȝce6. in se quadrate fit √ȝce36. hoc est, √ce6. Nam radix Zensica numeri 36. est 6. & huius radix cubica est √ce6. Vnde radix quadrata numeri √ȝce36. vel √ce6. est √ȝce6.

EX √ȝce6. in se cubice fit √ȝce216. vel √ȝ6. quia huius numeri 216. radix cubica est 6 & huius radix quadrata est √ȝ6. Itaque radix cubica numeri √ȝce216. vel √ȝ6. est √ȝce6.

*Facilis inuentio quadrati radicis Zenzizensicæ.*

EX √ȝȝ6. in se quadrate fit √ȝȝ36. hoc est, √ȝ6. quia radix quadrata numeri 36. est 6. & huius radix quadrata est √ȝ6 Ex quo fit, radicem quadratam numeri √ȝȝ36 vel √ȝ6. esse √ȝȝ6. Itaque vt habeatur quadratum alicuius radicis zenzizensicæ, satis est, amouere vnum signũ ȝ. Vt in dato exemplo quadratum √ȝȝ6. fuit √ȝ6. Sic etiam quadratum √ȝȝ8. est √ȝ8. & sic de cæteris.

*Quo modo radix duplicetur, vel tripletur, &c.*

ITAQVE si radix quadrata aliqua surda duplanda est, multiplicandus est eius numerus per 4. Producti namque √ȝ. est dupla radicis datæ. Vt duplum √ȝ3. erit √ȝ12. Nam vt √ȝ3. ducatur in 2. reducendæ sunt numeri √ȝ3. & 2. ad eandem denominationem √ȝ3. & √ȝ4. &c.

SIC etiam si duplanda sit √ce10. multiplicanda erit per √ce8. fietque eius duplum √ce80. Duo namque numeri √ce10. & 2. reuocandi sunt ad eandem denominationem, √ce10. & √ce8.

NON aliter radix quæcunque multiplicabitur per 3. 4. 5 &c. si dicti numeri multiplicentur zensice, vel cubice, vel zenzizensice, secundum conditionem nimirum radicis multiplicandæ. Vt √ß9. triplicabitur, si ducatur in √ß243. vt gignatur √ß2187. Quadruplicabitur autem, si multiplicetur per √ß1024. vt fiat √ß9216. quæ quadrupla est √ß9. &c.

*Summa quotcunque radicum æqualium.*

HINC facile cognoscemus summam quotcunque radicum surdarum æqualium. Si enim vna illarum radicum multiplicetur per tot vnitates, quot sunt radices propositæ, gignetur earum summa. Vt quinque √ȝ7. faciunt √ȝ175. Item quatuor √ce8. faciunt √ce512. hoc est, 8. Sic decem √ȝce4. faciunt √ȝce4000000. Nam redigere quotlibet numeros æquales in vnam summam, nihil est aliud, nisi vnum illorum numerorum ducere in ipsorum multitudinem. Vt summa trium horum numerorum æqualium 12. 12. 12. æqualis est numero producto ex 12. in 3. &c.

*[illegible]*

RECTE autem fieri multiplicationem radicis in radicẽ, vt diximus, sic demonstrabimus in radicibus quadratis. Sint duæ lineæ, AB, √ȝ3. & BC, √ȝ12. Dico √ȝ36. hoc est, radicem quadratam numeri 36. qui fit

qui fit ex quadrato 3. lineæ AB, in quadratum 12. lineæ BC. esse numerum productum ex linea AB, id est, ex √ʒ 3. in lineam BC, hoc est, in √ʒ 12. Quoniam enim ex Lemmate propos. 54. lib. 10. Eucl. rectangulum sub AB, BC, medio loco proportionale est inter quadrata rectarum AB, BC, [a] erit id, quod fit ex 3. quadrato rectæ AB, in 12. quadratum rectæ BC, æquale ei, quod fit ex rectangulo sub AB, BC, in se multiplicato: ideoque productum ex AB, in BC, radix quadrata erit producti ex 3. quadrato rectæ AB, in 12. quadratum rectæ BC, quod erat demonstrandum. *radicum quadratarum.* [a] *20. sept.*




IN alijs autem omnibus radicibus, etiam non quadratis, idem hoc modo demonstrabimus. Sit A, √ʒ. numeri B: & C, √ʒ numeri D: atque ex A, in B, fiat cubus E, vt A sit √cc numeri E: Et ex C, in D, fiat cubus F, vt C, sit √cc numeri F. Item ex A, in E, fiat zensizensus G, vt A, sit √ʒʒ numeri G: Et ex C, in F, fiat zensizensus H, vt C, sit √ʒʒ, numeri H. Ac tandem ex A, in C, fiat I: Et ex quadrato B, in quadratum D, fiat quadratus K: Et ex cubo E, in cubum F, fiat cubus L: Et ex Zensizenso G, in Zensizensum H, fiat Zensizensus M. Dico numerum I, productum ex A, √ʒ B, in C, √ʒ D, esse √ʒ numeri K, producti ex ʒ B, in ʒ D. Item eundem numerum I, productum ex A, √cc E, in C, √cc F; esse √cc numeri L, producti ex cc E, in cc F. Denique eundem numerum I, productum ex A, √ʒʒ G, in C, √ʒʒ H, esse √ʒʒ numeri M. producti ex ʒʒ G, in ʒʒ H. *Demonstratio generalis multiplicationis omnium radicum.*

| | | |
|---|---|---|
| | M, 1296. | |
| G 16 | | H 81 |
| | L, 216 | |
| E 8 | | F 27 |
| | K, 36 | |
| B 4 | | D 9 |
| | I, 6 | |
| A 2 | | C 3 |

Atq; ita deinceps, si A. & C, in G & H, ducantur, vt fiant Surdesolidi; & deinde Zensicubi, &c. Quoniam enim A, multiplicans A, & C, fecit B, & I; [b] erit B, ad I, vt A, ad C. Item quia C, multiplicans A, & C, fecit I, & D; [c] erit quoq; I, ad D. vt A, ad C, hoc est, vt B. ad I: ac proinde B, I, D, continue sunt proportionales. [d] Igitur idem numerus fiet ex B, in D, qui ex I, in se. Fit autẽ K, ex B, in D, Igitur idem K, fiet ex I, in se; hoc est, I, erit √ʒ numeri K. [b] *17. sept.* [c] *17. sept.* [d] *20. sept.*

DEINDE quia B, multiplicans A, & D, fecit E, & K; [e] erit E, ad K, vt A, ad D. Item quia C, multiplicans A, & D, fecit I, & F; [f] erit quoque I, ad F, vt A, ad D, hoc est, vt E, ad K: ac proinde quatuor numeri E, K, I, F, proportionales sunt. [g] Igitur idem numerus fiet ex E, primo in F, quartum, qui ex I, tertio in K, secundum. Factus est autem L, cubus ex E, in F. Idem igitur L, fiet ex I, in K, suum quadratũ: ac proinde I, erit √cc numeri L. [e] *17. sept.* [f] *17. sept.* [g] *19. sept.*

RVRSVS quoniam E, multiplicans A, & F, fecit G, & L; [h] erit G, ad L, vt A, ad F. Item quia C, multiplicans A. & F. fecit I, & H; [i] erit quoque I, ad H, vt A, ad F, hoc est, vt G, ad L, ac proinde quatuor numeri G, L, I, H, proportionales sunt. [k] Igitur idem numerus fiet ex G, primo in H, quartum, qui ex I, tertio in L, secundum. Factus est autem M, Zensizensus ex G, in H Idem ergo M, fiet ex I, in L, suum cubum: ideoque I, erit √ʒʒ numeri M. & sic de cæteris. quod erat demonstrandum. [h] *17. sept.* [i] *17. sept.* [k] *19. sept.*

QVAMVIS autem in exemplo positi sint numeri rationales, idem tamen verum etiam est in numeris irrationalibus, vt Franciscus Maurolycus in sua Arithmetica speculatiua docuit. quod & in hac formula cernitur in qua eadem demonstratio locum habet. Nam quemadmodum propositiones lib. 7. Eucl. demonstratæ sunt in numeris fractis. ita eædem ostendentur in numeris surdis. V. g. quia A, multiplicans A, & C, fecit B, & I; erit ex defin. 15. lib. 7. tam B, ad A, quam I, ad C, vt A, ad vnitatem. quamuis proportio hæc sit irrationalis. Igitur erit B, ad A, vt I, ad C: Et permutando B, ad I, vt A, ad C; ac proinde A, multiplicans duos A, & C, fecit duos B, & I, qui eandem proportionem habent, quam multiplicati A, & C, vt vult propos. 17. lib. 7. Eademque ratio est de cæteris propositionibus lib. 7. Eucl.

| | | |
|---|---|---|
| | M, 225. vel √ʒ 50625 | |
| G, 9. vel √ʒ 81 | | H, 25. vel √ʒ 625 |
| | L, √ʒ 3375 | |
| E, √ʒ 27 | | F, √ʒ 125 |
| | K, 15. vel √ʒ 225 | |
| B, 3. vel √ʒ 9 | | D, 5. vel √ʒ 25 |
| | I, √ʒ 15 | |
| A, √ʒ 3 | | C, √ʒ 5 |

RECTE etiam diuidi radicem per radicem, si præceptum traditum seruetur, demonstratione non indiget: quippe cum Quotiens multiplicatus per diuisorem producat numerum diuisum. Vt quia √ʒ 15. diuisa per √ʒ 3. Quotientem facit √ʒ 5. Et √ʒ 5. ducta in √ʒ 3. facit √ʒ 15. vt demonstratum est, dubitandum non est, recte factam esse diuisionem.

IMMO rite fieri multiplicationem, diuisionemque radicum surdarum eo modo, quem præscripsimus abunde nos docere possunt radices rationales: quippe quæ eo modo multiplicatæ, atque diuisæ procreent veros numeros productos, ac Quotientes. Nam ex √ʒ 4. in √ʒ 49. fit √ʒ 196. hoc est 14. Et ex diuisione √ʒ 196 per √ʒ 4. fit Quotiens √ʒ 49. id est, 7. Item ex √cc 8. in √cc 27. fit √cc 216. nimirum 6. Et ex diuisione √cc 216. per √cc 8. fit Quotiens √cc 27. nimirum 3. &c.

## L E M M A.

*VTRVM duæ radices surdæ commensurabiles sint nec ne; & quam proportionem inter se habeant cognoscere.* *An duæ radices sint commensurabiles, & quam habeant proportionem quo pacto cognoscatur.*

DIVIDATVR vna radix per alteram. Si enim Quotiens fuerit rationalis, ipsæ radices commensurabiles erunt, proportionemq; habebunt inter se, quam Quotiens ad vnitatẽ. Vel si Quotiens est minutia, quam numerator minutiæ ad denominatorem. Vt quoniam si diuidatur √ʒ 12. per √ʒ. 3. fit Quotiens √ʒ 4. hoc est, 2. erunt √ʒ & 12. √ʒ 3. commensurabiles, habebuntque proportionem duplam, nimirum 2. ad 1.

SIC etiam diuisa √ℨ 3. per √ℨ 12. fit Quotiens √ℨ $\frac{3}{12}$. vel √ℨ $\frac{1}{4}$. hoc est, $\frac{1}{2}$. Sunt ergo √ℨ 3. & √ℨ 12. commensurabiles, earumque proportio eadem est, quæ $\frac{1}{2}$ ad 1. hoc est 1. ad 2 oumeratoris ad denominatorem. Nam per propos. 2. Minutiarum ad finem lib. 9. Eucl. eadem est proportio numeratoris minutiæ cuiusuis ad eiusdem denominatorem, quæ ipsius minutiæ ad vnitatem.

ITEM √ℨ 18. & √ℨ 8. commensurabiles erunt, proportionemque habebunt, quam 3. ad 2. nimirum sesquialteram. quod maiore diuisa per minorem, Quotiens fit √ℨ 2$\frac{1}{4}$. vel √ℨ $\frac{9}{4}$. hoc est, $\frac{3}{2}$. Diuisa autem √ℨ 8. per √ℨ 18. fit quotiens √ℨ $\frac{4}{9}$. hoc est $\frac{2}{3}$. Sunt ergo √ℨ 8 & √ℨ. 18. commensurabiles, proportionemque habent, quam 2. ad 3.

RVRSVS commensurabiles erunt √ℨ 75 & √ℨ 48. Nam diuisa illa per hanc, fit Quotiens √ℨ 1$\frac{9}{16}$. vel √ℨ $\frac{25}{16}$. id est, $\frac{5}{4}$. proportionem autem habebunt, quam 5. ad 4.

ITA quoque reperientur esse commeosurabiles √ℨ 9. & √ℨ 4. proportionemque habere, quam 3. ad 2.

PRÆTEREA √ce 320. & √ce 135. commensurabiles sunt: quia illa per hanc diuisa, fit Quotiens √ce 2$\frac{10}{27}$. vel √ce $\frac{64}{27}$. id est, $\frac{4}{3}$. estque earum proportio sesquitertia, nimirum 4. ad 3.

EADEM ratione commensurabiles sunt √ce 162. & √ce 2058 habentque proportionem, quam 7. ad 3. nimirum duplam sesquitertiam, si maior cum minore conferatur. Diuisa namque maiore per minorem, fit Quotiens √ce 12$\frac{19}{27}$. vel √ce $\frac{343}{27}$. hoc est, $\frac{7}{3}$.

COMMENSVRABILES quoq; sunt √ce 6000 & √ce 2058. habentque proportionem, quam 10. ad 7. Diuisa enim priore per posteriorem, fit Quotiens √ce 2$\frac{314}{343}$. vel √ce $\frac{1000}{343}$ hoc est, $\frac{10}{7}$.

NON secus commensurabiles erunt √ℨℨ 3888. & √ℨℨ 243. quia ex diuisione prioris per posteriorem fit Quotiens √ℨℨ 16. hoc est 2. Habent ergo proportiooem duplam.

EODEM modo commensurabiles erunt √ℨℨ 19683. & √ℨℨ 243. habebuntq; proportionem triplam. quia ex diuisione prioris per posteriorem prodit Quotiens √ℨℨ 81. hoc est, 3.

DENIQVE commensurabiles etiam erunt √ℨℨ 19683. & √ℨℨ 3888. proportionemque habebunt sesquialteram. quia ex diuisione fit Quotiens √ℨℨ 5$\frac{1}{16}$. vel √ℨℨ $\frac{81}{16}$. id est, $\frac{3}{2}$.

IAM vero si ex diuisione gignatur numerus surdus, vel irrationalis, radices incommensurabiles erunt, proportionemque habebunt irrationalem. Cuiusmodi sunt √ℨ 48. & √ℨ 8. quia ex diuisione oritur Quotiens √ℨ 6 irrationalis, cum 6. non habeat radicem quadratam. habent tamen proportionem, quam √ℨ. 6. ad 1.

INCOMMENSVRABILES quoque erunt √ce 32. & √ce 18. Nam ex diuisione gignitur Quotiens √ce 1$\frac{7}{9}$. vel √ce $\frac{16}{9}$. qui licet habeat radicem quadratam $\frac{4}{3}$. cubicam tamen non habet. Erit autem earum proportio eadem, quæ √ce 16. ad √ce 9. vel √ce $\frac{16}{9}$ ad 1.

QVANDO radices sunt diuersorum generum, reducendæ prius sunt ad eandem denominationem. Vt si dentur √ℨce 64. & √ce 27. Reductis ad eandem denominationem, nimirum ad √ℨce 64. & √ℨce 729. si posterior per priorem diuidatur, fit Quotiens √ℨce 11$\frac{25}{64}$. hoc est, √ℨce $\frac{729}{64}$ id est, $\frac{3}{2}$. sunt ergo √ℨce 64. & √ce 27. commensurabiles, habetque posterior ad priorem proportionem, quam 3. ad 2.

EST Lemma hoc pernecessarium ad radicum additionem, subtractionemque, de qua in duabus propositionibus sequentibus.

---

## *DE ADDITIONE RADICVM simplicium.*

## CAPVT XIX.

*Additio radicũ æqualium.*

QVANDO addendæ sunt inter se duæ, vel plures radices æquales, multiplicanda est vna earum per 2. vel 3 aut 4 &c. prout radices fuerint 2. vel 3. aut 4. &c. Productus enim numerus erit summa illarum radicum, vt cap. præcedenti diximus. Vt summa ex √ℨ 6. & √ℨ. 6. collecta est √ℨ 24. Nam √ℨ 6. duplicata, hoc est, multiplicata per √ℨ 4. facit √ℨ 24. Item √ce 6. √ce 6. √ce 6. faciunt √ce 162. propterea quod √ce 6. triplicata, id est, multiplicata per √ce 27. facit √ce 162. & sic de alijs.

*Additio radicum incommensurabilium.*

QVANDO autem duæ radices inæquales eiusdem speciei addendæ inter se sunt, experiendũ prius est, per Lemma præcedens, an sint commensurabiles an vero incommensurabiles: idemq; faciendum est, si radices sint diuersarum deominationum, postquam ad eandem deominationem fuerint reuocatæ. Et si quidẽ deprehendentur esse incommensurabiles, non poterunt in vnam summam colligi, ita vt ex illis vna radix simplex conficiatur, sed addendæ sunt per interpositioõẽ signi additorũ +. Vt ex √ℨ 6. & √ℨ 11. fit summa √ℨ 6 + √ℨ 11. Vel √ℨ 11 + √ℨ 6. Item ex 8. & √ℨ 7. fit summa 8 + √ℨ 7. vel √ℨ 7. + 8. Sic ex √ce 9 & √ce 20. fit summa √ce 9 + √ce 20.

*Additio radicum quadratarum per propos. 4 lib. 2 Eu.*

RADICES tamen quadratæ incommensurabiles addi inter se possunt, hoc etiam modo. Ad summam quadratorum addatur duplum eius, qnod fit ex vna radice in aliam. Summæ enim huius collectæ radix quadrata erit summa propositarum duarum radicum. Sint addendæ √ℨ 6 & √ℨ 11. Quadrati numeri 6. & 11. faciunt 17. Et ex √ℨ 6. in √ℨ 11. fit √ℨ 66. cuius duplum est √ℨ 264. Summa ergo ex √ℨ 6. & √ℨ 11. collecta erit radix quadrata huius aggregati 17 + √ℨ 264. nimirum √ℨ(17 + √ℨ 264.) Ratio huius operationis ex propos. 4. lib. 2. Eucl. colligitur. Nam si linea aliqua recta diuisa sit in √ℨ 6. & √ℨ 11 erunt duo quadrata harum partium 6. & 11 quibus si addatur productum ex √ℨ 6. in √ℨ 11. bis, fiet totum quadratum totius lineæ binomium hoc, 17 + √ℨ 264. Huius ergo radix quadrata, nimirum √ℨ (17 + √ℨ 264) erit summa quęsita, ex √ℨ 6. & √ℨ 11. collecta. Quo pacto autem ex binomijs radix quadrata sit extrahenda quando res exigit, & ratio postulat, c. 27. dicemus:

dicemus: quæ tamẽ hic inuenietur esse √ʒ 11 + √ʒ 6. quæ non differt à summa radicum propositarum si per signum + copulentur. Hæc autem ratio addendi in numeris rationalibus euidens quoque est. Sint enim addendæ √ʒ 4. & √ʒ 9. vbi manifestum est, summam collectam esse 5. Quadrati 4. & 9. faciunt 13 Et ex √ʒ 4. in √ʒ 9. fit √ʒ 36. cuius duplum est √ʒ 144. Summa ergo ex √ʒ 4. & √ʒ 9. collecta erit radix quadrata huius aggregati 13 + √ʒ 144. nimirum √ʒ(13 + √ʒ 144.) Constat autem, 13. cum √ʒ 144. id est cum 12. conficere 25. cuius radix quadrata est 5.

IMMO hoc etiam artificio addi possunt radices quadratæ commensurabiles, sed semper producetur radix simplex in summa. Vt si addendæ sint √ʒ 3. & √ʒ. 12 Diuisa hac per illam, fit Quotiens √ʒ 4. rationalis: ac proinde commensurabiles sunt. Ergo si earum quadrati 3. & 12. in vnam summam colligantur, fit numerus 15. Et si vna radix in alteram ducatur, fit numerus √ʒ 36. cuius duplum √ʒ 144. cum 15. facit 15 + √ʒ 144. Huius igitur radix quadrata, nimirum √ʒ(15 + √ʒ 144) hoc est, √ʒ. 27. summa erit collecta ex √ʒ 3. & √ʒ 12.

AT vero si radices cuiuscunque generis addendæ fuerint inuentæ commensurabiles, hoc est, si diuisa vna per alteram, Quotiens fuerit rationalis siue integer, siue fractus, aut integer cum fracto, & si quidem integer subscripta vnitate, vt fiat fractio: ita agemus. Quam proportionem multiplicem habet summa ex numeratore, ac denominatore collecta ad 1. eam quoque habebit summa propositarum radicum ad talem partem minoris radicis, qualis pars est 1. minoris numeri fractionis. Quare si talis pars sumatur ex minore radice, eaque multiplicetur per denominatorem proportionis illius multiplicis, procreabitur summa propositarum radicum. Item quam proportionem multiplicem habet summa ex numeratore, ac denominatore collecta ad 1. eam quoque habebit summa propositarum radicum ad talem partẽ maioris radicis, qualis pars est 1. maioris numeri fractionis Quare si talis pars ex maiore radice accipiatur, eaque ducatur in denominatorem proportionis illius multiplicis, producetur propositarum radicum summa. *Additio radicum commensurabilium.*

Vt si addendæ sint √ʒ 8. & √ʒ 18. Ex diuisione maioris per minorem fit Quotiens rationalis √ʒ 2 $\frac{1}{4}$. siue √ʒ $\frac{9}{4}$. hoc est, $\frac{3}{2}$. Quia igitur summa numerorũ fractionis $\frac{3}{2}$. nimirum 5. ad 1. semissem minoris numeri fractionis, proportionem habet quintuplam, habebit quoque quintuplam proportionem summa datarum radicum ad semissem minoris radicis. Est autem √ʒ 2. semissis minoris radicis √ʒ 8. Diuisa namq; √ʒ 8. per 2. hoc est, per √ʒ 4. fit Quotiens √ʒ 2. Quamobrem si √ʒ 2. multiplicetur per 5. denominatorem proportionis quintuplæ, hoc est, per √ʒ 25. gignetur √ʒ 50. summa ex √ʒ 8. & √ʒ 18. collecta.

ITEM quia summa numerorum fractionis $\frac{3}{2}$ id est, 5. ad 1. tertiam partẽ maioris numeri fractionis proportionem habet quintuplam, candẽ habebit summa radicum propositarũ ad tertiam partẽ maioris radicis. Est autem √ʒ 2. tertia pars maioris radicis √ʒ 18. Diuisa namque √ʒ 18. per 3. hoc est, per √ʒ 9. fit Quotiens √ʒ 2 Si igitur √ʒ 2. ducatur in 5. denominatorem quintuplæ proportionis, id est, in √ʒ 25. procreabitur eadem summa √ʒ 50.

EADEM summa conflabitur, si minor radix, √ʒ 8. diuidatur per maiorem √ʒ 18. Fiet enim Quotiens √ʒ $\frac{4}{9}$. hoc est, $\frac{2}{3}$. Ergo rursus quemadmodum 5. summa numerorum fractionis $\frac{2}{3}$. ad 1. tertiam partem maioris numeri fractionis habet proportionem quintuplam, ita quoque eandem habebit summa radicum propositarum ad tertiam partem maioris radicis, √ʒ 18. hoc est, ad √ʒ 2. Item quemadmodum 5. summa numerorum fractionis $\frac{2}{3}$. ad 1. semissem minoris numeri fractionis, proportionem habet quintuplam, ita quoque eandem habebit summa radicum √ʒ 8. & √ʒ 18. ad semissem minoris radicis, √ʒ 8. nimirum ad √ʒ 2. &c.

RVRSVS sint addendæ √ʒ 3. & √ʒ. 12. Diuisa maiore per minorem, fit Quotiens √ʒ 4. hoc est 2. Supposita ergo vnitate, vt fiat fractio $\frac{2}{1}$. quoniam summa 3. numerorum huius fractionis ad 1. proportionem habet triplam, estque 1. æqualis minori numero fractionis 1. habebit quoque summa datarum radicum ad minorem radicem √ʒ 3. proportionem triplam. Quare si √ʒ 3. minor radix ducatur in 3. denominatorem proportionis triplæ, nimirum in √ʒ 9. fiet summa √ʒ 27.

ITEM quia prædicta summa 3. numerorum fractionis $\frac{2}{1}$. ad 1. proportionem habet triplam, estq; 1. semissis maioris numeri 2. fractionis, habebit quoque summa radicum propositarum ad semissem maioris radicis √ʒ 12. hoc est, ad √ʒ 3 proportionem triplam. Si igitur √ʒ 3. semissis videlicet maioris radicis, ducatur in 3. denominatorem proportionis triplæ, id est, in √ʒ 9. producetur eadem summa √ʒ 27.

DEMONSTRATIO hujusce rei est, quod datis quatuor numeris proportionalibus, ita se habeat summa priorum duorum ad maiorem vel minorem ipsorum, vt summa duorum posteriorum ad maiorem, vel minorem ipsorum. Item ita summa priorum duorum ad quamlibet partem maioris, vel minoris, vt summa duorum posteriorum ad similem partem maioris, vel minoris. Vt datis numeris 6 4. & 18. 12. proportionalibus: erit componendo, vt 10. ad 4. ita 30 ad 12. Et per conuersionem rationis, vt 10. ad 6. ita 30. ad 18. Quia vero est quoque vt 4. ad 1. quartam partem, ita 12. ad 3. quartam partem: erit ex æquo, vt 10. ad 1. ita 30. ad 3. Item quia est quoque, vt 6. ad 1. sextam partem, ita 18. ad 3. sextam partem: erit quoque ex æquo, vt 10. ad 1. ita 30. ad 3. Cum ergo ex diuisione vnius radicis per aliam gignatur denominator proportionis vnius ad alteram, ita vt eadem proportio sit vnius ad alteram, quæ numeratoris fractionis ad denominatorem; (supposita 1. quando Quotiens est numerus integer) manifesta euadit ratio additionis radicum. Et sane admiratione dignum est, additionem fieri præcisam in ijs, quæ præcisam, & cognitam quantitatem non habent. *Demonstratio additionis radicũ commensurabilium.*

HINC fit, summam quoque ex duabus radicibus commensurabilibus colligi, si per denominatorem proportionis, quam habet summa numerorum fractionis $\frac{3}{2}$. nimirum 5. ad maiorem fractionis numerum 3. vel ad minorem 2. hoc est, per $\frac{5}{3}$. vel per $\frac{5}{2}$. multiplicetur maior radix √ʒ 18. vel minor, √ʒ 8. Ita vides ex √ʒ 18. in $\frac{5}{3}$. hoc est, in √ʒ $\frac{25}{9}$. Vel ex √ʒ 8. in $\frac{5}{2}$. id est, in √ʒ $\frac{25}{4}$. gigni √ʒ 50. vt prius.

SINT rursus addendæ √ʒ 72. & √ʒ 18. Diuisa illa per hanc, fit Quotiens √ʒ 4. hoc est, 2. & supposita 1. fit $\frac{2}{1}$. denominator proportionis duplæ. Sicut igitur summa 3. ad 1. habet proportionem triplam, ita quoq; summa duarum radicum ad minorem √ʒ 18. tripla erit. Si ergo ducatur √ʒ 18. in 3. id est, in √ʒ 9. fiet √ʒ 162. pro summa radicum √ʒ 72. & √ʒ 18. Item sicut eadem summa 3. numerorum fractionis $\frac{2}{1}$. ad 2. habet proportionem sesquialteram, cuius denominator est $\frac{3}{2}$. ita quoque summa quæsita erit ad maiorem radicem √ʒ 72. sesquialtera. Si ergo √ʒ 72. ducatur in $\frac{3}{2}$. id est, in √ʒ $\frac{9}{4}$. producetur eadem summa √ʒ 162.

POSSVNT

*Pulchra ratio addendi radices commensurabiles.*

POSSVNT etiam addi radices commensurabiles percommode per regulam auream, & in idem res recidet. Cum enim in primo exemplo sit, vt 5. summa numerorum fractionis $\frac{3}{2}$. ad minorem numerum 2. vel ad maiorem 3. ita summa radicum ad radicem minorem, vel maiorem, vt ostendimus: erit conuertendo quoque, vt 2. vel 3. ad summam 5. ita minor radix, vel maior ad radicum summam. Si ergo fiat,

Vt 2. ad 5. ita √ȝ 8. ad aliud. Vel

Vt 3. ad 5. ita √ȝ 18. ad aliud: procreabitur summa √ȝ 50. vt prius.

In postremo autem exemplo, in quo denominator proportionis fuit $\frac{2}{1}$. si fiat,

Vt 1. ad 3. ita √ȝ 18. ad aliud. Vel

Vt 2 ad 3. ita √ȝ 72. ad aliud: gignetur summa √ȝ 162. quæ prius.

SINT rursus addendæ √ȝ 2. & √ȝ 8. Ex diuisione √ȝ 8. per √ȝ 2. fit Quotiens rationalis √ȝ 4. id est, 2. & supposita 1 fit $\frac{2}{1}$. Si ergo fiat.

Vt 1. ad 3. ita √ȝ 2. ad aliud. Vel

Vt 2. ad 3. ita √ȝ 8. ad aliud: colligetur summa √ȝ 18.

Sint quoque addendæ √ℭ 162. & √ℭ 2058. Diuisa maiore radice per minorem, fit Quotiens rationalis √ℭ 12 $\frac{19}{27}$. vel √ℭ $\frac{343}{27}$. hoc est $\frac{7}{3}$. Si igitur fiat.

Vt 3. ad 10. ita √ℭ 162. ad aliud. Vel

Vt 7. ad 10. ita √ℭ 2058. ad aliud. reperietur summa √ℭ 6000.

ITEM addendæ sint √ℭ 8. & √ℭ 27. qui numeri rationales sunt. Ex diuisione √ℭ 27. per √ℭ 8 fit Quotiens rationalis √ℭ 3 $\frac{3}{8}$. vel √ℭ $\frac{27}{8}$. hoc est, $\frac{3}{2}$. Si ergo fiat,

Vt 2 ad 5. ita √ℭ 8 ad aliud. Vel

Vt 3. ad 5. ita √ℭ 27. ad aliud: prodibit summa √ℭ 125. hoc est 5.

RVRSVS addendæ sint √ȝȝ 243. & √ȝȝ 3888. Proportio est $\frac{2}{1}$. Si ergo fiat,

Vt 1 ad 3 ita √ȝȝ 243. ad aliud. Vel

Vt 2. ad 3. ita √ȝȝ 3888. ad aliud: exurget summa √ȝȝ 19683.

POSTREMO sint addendæ √ȝ 4. & √ℭ 27. qui numeri sunt rationales. Reductis hisce radicibus ad eandem denominationem, vt ad √ȝℭ 64. & √ȝℭ 729. Ex diuisione maioris per minorem fit Quotiens rationalis √ȝℭ $\frac{729}{64}$. hoc est, $\frac{3}{2}$. Si igitur fiat,

Vt 2. ad 5. ita √ȝℭ 64. ad aliud. Vel

Vt 3. ad 5. ita √ȝℭ 729 ad aliud: procreabitur summa √ȝℭ 15625. hoc est, 5.

*Alia ratio pulchra addendi radices commensurabiles.*

ADDI quoque possunt radices commensurabiles hoc modo. Diuisa maiore radice per minorem addatur Quotienti rationali vnitas. Si namque numerus conflatus ducatur in maiorem radicem, procreabitur summa quæsita. Nam si Quotiens ducatur in minorem radicem, id est, in diuisorem, producetur maior radix, quæ diuisa fuit: Et si vnitas ducatur in eundem diuisorem, id est, in minorem radicem producetur minor radix: atque adeo duo producti summam duarum radicum conficient. Cum ergo, per theor. 1. ad propos. 14. lib. 9. Eucl. quod respondet propos. 1. lib. 2. idem numerus fiat ex minore radice in summam ex Quotiente, & vnitate collectam, qui ex eadem radice minore in Quotientem, & vnitatem fiunt seorsum; producetur quoque summa duarum radicum datarum ex minore radice in summam ex Quotiente, & vnitate collectam.

SINT enim addendæ √ȝ 8 & √ȝ 18. Diuisa maiore per minorem, fit Quotiens rationalis √ȝ 2 $\frac{1}{4}$. id est, $\frac{3}{2}$ & addita 1 fit $\frac{5}{2}$. Et quoniam ex $\frac{5}{2}$. in √ȝ 8. fit √ȝ 50. erit √ȝ 50. summa duarum radicum √ȝ 8 & √ȝ 18.

ITEM sint addendæ √ℭ 162. & √ℭ 2058. Ex diuisione nascetur Quotiens rationalis $\frac{7}{3}$. & addita 1. fit numerus $\frac{10}{3}$. qui ductus in √ℭ 162. gignit √ℭ 6000. summam duarum radicum propositarum.

*Addere plures radices habentes communẽ mensuram vnam radicem eiusdem generis.*

QVANDO duæ radices, vel plures, per vnam aliquam eiusdem generis radicem diuidi possunt, ita vt Quotientes sint rationales, coniungentur in vnam summam, si summa Quotientum ducatur in communem illam radicem diuidentem. Productus enim numerus erit summa quæsita. Nam cum, per theorema proxime citatum, numerus, qui fit ex radice diuidente in Quotientum summam, æqualis sit ijs, qui ex eadem diuidente radice fiunt in singulos Quotientes, hoc est, omnibus simul radicibus propositis; liquido constat, ex radice diuidente in summam Quotientum gigni summam radicum propositarum.

Vt si addendæ sint √ȝ 8. & √ȝ 18. Si vtraque diuidatur per √ȝ 2. producentur Quotientes rationales √ȝ 4. & √ȝ 9. hoc est 2. & 3. quorum summa 5. si ducatur in communem diuisorem, id est, in √ȝ 2. procreabitur summa √ȝ 50.

ITEM sint addendæ √ȝ 8. √ȝ 50. & √ȝ 72. si diuidantur singulæ per √ȝ 2. fient Quotientes rationales, √ȝ 4. √ȝ 25 & √ȝ 36. hoc est, 2. 5. & 6. quorum summa 13. ducta in √ȝ 2. communem diuisorem, producet summam √ȝ 338.

SINT tandem addendæ √ȝ 8. √ȝ 32. & √ȝ 48. Diuidantur singulæ per √ȝ 2. fiunt Quotientes √ȝ 4. √ȝ 16. & √ȝ 24. quorum priores duo sunt rationales, nimirum 2. & 4. at posterior irrationalis, Non ergo hoc modo in vnam colligi summam poterunt, sed solum duæ priores facient summam √ȝ 72. atque ita ex omnibus tribus fiet summa √ȝ 72 + √ȝ 48.

DE

# *DE SVBTRACTIONE RADICVM simplicium.*

## CAPVT XX.

QVANDO radix aliqua à radice æquali ſubtrahitur, nihil relinquitur. Vt √ʒ.12. à √ʒ 12. *Subtractio radicis ab æquali radice.*
Item √cc 100. à √cc 100. ſubtracta relinquit √ʒ 0. vel √cc 0.

QVOD ſi radices fuerint incommenſurabiles, (quando nimirum, diuiſa maiore per minorem, Quotiens eſt irrationalis) non poterit fieri ſubtractio, niſi per ſignum ſubtractorum —. Vt √ʒ 3. ex √ʒ 10. relinquit √ʒ 10—√ʒ 3. Item √cc 20. ex √cc 50. relinquit √cc 50—√cc 20. *Subtractio radicum inæqualium.*

QVANDO tamen radices ſunt quadratæ, & incommenſurabiles, poterit minor à maiore ſubtrahi hoc etiam modo. A ſumma quadratorum ſubducatur, quod ex vna radice in aliam bis fit. Radix enim quadrata eius, quod relinquitur, erit reſiduum ſubtractionis. Sit ſubtrahenda √ʒ 12. à √ʒ 20. Quadrati numeri 12. & 20. faciunt 32. Et ex √ʒ 12. in √ʒ 20. fit √ʒ 240. cuius duplum √ʒ 960. detractum ex ſumma quadratorũ relinquit 32 —√ʒ 960. Radix ergo quadrata huius relicti nimirum √ʒ (32—√ʒ 960) erit id, quod relinquitur, detracta √ʒ 12. ex √ʒ 20. Huius operationis ratio ex propoſ. 7. lib. 2 Eucl. colligitur. Nam ſi tota aliqua linea ſit √ʒ 20. quæ ſecetur ita, vt vna pars ſit √ʒ 12. erunt duo quadrati numeri 20. & 12. nimirum 32. æquales numero √ʒ 960. qui fit bis ex √ʒ. 12 in √ʒ 20. vna cum quadrato reliquæ partis lineæ. Si ergo numerus, qui fit bis ex √ʒ 12. in √ʒ. 20 dematur ex 32. ſumma quadratorum, reliquum fiet quadratum reliquæ partis lineæ. Igitur quadratum huius partis erit 32—√ʒ 960. Ac proinde reſiduum, quod relinquitur poſt ſubtractionem √ʒ 12. ex √ʒ 20. erit √ʒ (32—√ʒ 960.) Quo pacto autem radix quadrata, quando res exigit, ex Apotomis, ſiue Reſiduis ſit extrahenda, dicemus cap. 27. quæ tamen hic erit √ʒ 20—√ʒ 12. non differens à reſiduo, ſi √ʒ 12. à √ʒ 20. ſubtrahatur per interpoſitionem ſigni —. Verum hæc ratio ſubtrahendi perſpicua quoque eſt in numeris rationalibus. Sit enim auferenda ʒ√ 4. à ʒ√ 49 vbi liquido conſtat, reſiduum eſſe 5. Quadrati 4 & 49. efficiunt 53. Et ex √ʒ 4 in ʒ√ 49. fit √ʒ 196. cuius duplum √ʒ 784. ablatum ex 53. ſumma quadratorum relinquit 53—√ʒ 784 ac proinde reſiduum quæſitum, erit √ʒ (53—√ʒ 784) Conſtat autem, 53—√ʒ 784. hoc eſt, 53—28 eſſe 25. cuius radix quadrata eſt 5. *Subtractio radicũ quadratarum per propoſ. 7 lib. 2. Eucl.*

IMMO hoc eodem artificio ſubtrahi poterit radix quadrata à radice quadrata, ſi fuerint commenſurabiles: ſed tunc reſiduum erit radix ſimplex. Vt ſi ſubducenda ſit √ʒ 3. à √ʒ 27. Diuiſa hac per illam, fit Quotiens √ʒ 9. rationalis, ac proinde commenſurabiles ſunt. Summa quadratorum 3. & 27. eſt 30 à qua ſi dematur √ʒ 324 nimirum duplum eius, quod fit ex √ʒ 3. in √ʒ 27. remanebunt 30—√ʒ 324. Igitur √ʒ (30—√ʒ 324) hoc eſt, √ʒ 12. erit reſiduum ſubtractionis.

SI autem radices cuiuſcunque generis propoſitæ fuerint commenſurabiles, hoc eſt, ſi diuiſa maiore per minorem, Quotiens fuerit rationalis, ita tamẽ, vt ſi fuerit numerus integer, ei ſupponatur vnitas, vt fiat fractio, ita agemus. Quam proportionem habet numerus, qui relinquitur, detracto denominatore fractionis ex numeratore, hoc eſt, quam habet differentia numerorum fractionis ad 1. eam quoque habebit reſiduum poſt detractionem minoris radicis ex maiore ad talem partem minoris, qualis pars eſt 1. denominatoris fractionis: vel eam quoq; proportionem habebit dictum reſiduum ad talem partẽ maioris radicis, qualis pars eſt 1. numeratoris fractionis. Quocirca ſi talis pars capiatur ex minore radice, vel maiore, eaque per denominatorem proportionis illius multiplicetur, producetur reſiduum, quod quæritur. *Subtractio radicum commenſurabilium.*

SIT ſubtrahenda √ʒ 8. ex √ʒ 50. Ex diuiſione maioris per minorem, fit Quotiens rationalis √ʒ $\frac{25}{4}$. hoc eſt, $\frac{5}{2}$. Quia ergo differentia numerorũ fractionis $\frac{5}{2}$. eſt 3. quod detracto denominatore 2. ex numeratore 5. remaneant 3. quę differentia ad 1. ſemiſſem minoris numeri fractionis, vel quintam partem maioris numeri fractionis, proportionem habet triplam: habebit quoque reſiduum, quod relinquitur, dempta √ʒ 8. ex √ʒ 50. ad ſemiſſem minoris radicis, nimirum ad √ʒ 2. vel ad quintam partem maioris radicis, videlicet ad √ʒ 2. proportionem triplam. Si igitur √ʒ 2. ducatur in 3. hoc eſt, in √ʒ 9. producetur reſiduum √ʒ 18. quod deſideratur.

IDEM reſiduum habebitur, ſi minor radix √ʒ 8. diuidatur per maiorem √ʒ 50. Fiet enim Quotiens √ʒ $\frac{4}{25}$. hoc eſt, $\frac{2}{5}$. Rurſus ergo, quemadmodum 3. differentia numerorum fractionis ad 1. ſemiſſem minoris numeri fractionis, vel ad quintam partem maioris numeri fractionis proportionem habet triplam: ita quoque differentia duarum radicum propoſitarum triplam habebit proportionem ad ſemiſſem minoris radicis, vel ad quintam partem maioris, videlicet ad √ʒ 2. Quare triplum √ʒ 2. nimirum √ʒ 18. erit differentia datarum radicum, id eſt, reſiduum poſt detractionem √ʒ 8. ex √ʒ 50. Demonſtratio eadem eſt, quæ ſupra in additione adducta eſt.

HINC fit, reſiduum quoque produci; ſi per denominatorẽ proportionis, quam habet differentia numerorum fractioois, hoc eſt, reliquus numerus, dempto mioore fractionis numero ex maiore, ad maiorem numerum fractioois, vel ad minorem, nimirum in propoſito exemplo per $\frac{3}{5}$. vel $\frac{3}{2}$. (nam $\frac{3}{5}$. eſt denominator proportionis, quam habet differentia numerorum fractionis, ad 5. maiorem numerum fractionis: At $\frac{3}{2}$. denominator eſt proportionis, quam eadem differentia 3. habet ad minorem numerũ fractioois) multiplicetur maior radix, vel minor. Ita vides ex ductu √ʒ 50. in $\frac{3}{5}$. vel ex ductu √ʒ 8. in $\frac{3}{2}$. gigni reſiduum √ʒ 18. idem quod prius. *Pulchra ratio ſubtrahendi radices commenſurabiles.*

SVBTRACTIO quoq; radicum commenſurabilium commodiſſime fieri poteſt per regulam auream. Cum enim ſit, vt differentia numerorum fractionis ad maiorem, vel minorẽ eiuſdem fractionis numerum, ita reſiduum, quod quæritur, ad radicem maiorem, vel minorem: Et conuertendo, vt maior numerus fractionis, vel minor, ad differentiam numerorum fractionis, ita maior radix, vel minor ad reſiduum ſubtractionis; Si in dato exemplo fiat;

Vt 5.

Vt 5.ad 3.ita √ȝ 50.ad aliud, Vel

Vt 2.ad 3.ita √ȝ 8.ad aliud, producetur residuum quæsitum √ȝ 18.

SIC etiam si subtrahenda sit √cc 162. ex √cc 6000. Diuisa hac per illam, fit Quotiens rationalis √cc $\frac{1000}{27}$.id est, $\frac{10}{3}$.vbi differentia numerorum fractionis est 7.Si ergo fiat,

Vt 10.ad 7. ita √cc 6000.ad aliud. Vel

Vt 3.ad 7.ita √cc 162.ad aliud, gignetur residuum desideratum √cc 2058.

*Alia ratio pulchra subtrahēdi radices commensurabiles.*

SVBTRAHI etiam potest radix à radice, si sint commensurabiles, hac ratione. Diuisa maiore per minorem, dematur vnitas ex Quotiente rationali. Si namque reliquus numerus in minorem radicem ducatur, prodibit residuum quæsitum. Nam si totus Quotiens in minorem radicem, id est, in diuisorem ducatur, producetur maior radix, quæ diuisa fuit. Cum ergo vnitas in minorem radicem faciat minorem radicem; liquido constat, si Quotiens, dempta prius vnitate, ducatur in minorem radicem, gigni eandem maiorem radicem, minus minore radice, hoc est differentiam radicum propositarum.

SIT subtrahēda √ȝȝ 3888.à √ȝȝ 19683.Ex diuisione fit Quotiens rationalis √ȝȝ $\frac{81}{16}$.hoc est, $\frac{3}{2}$.Dempta 1.remanet $\frac{1}{2}$ quæ (reuocata prius ad √ȝȝ $\frac{1}{16}$.) ducta in √ȝȝ 3888.facit √ȝȝ 243.differētiam radicū propositarū.

*Alia subtrahēdi ratio quando radices propositæ habent aliam radicem eiusdem generis communē mensuram.*

DENIQVE fieri poterit subtractio hoc alio modo. Diuidatur vtraque radix per communem aliquam radicem eiusdem generis, ita vt Quotientes sint rationales, si fieri potest. Nam subtracto vno Quotiente ex alio, si reliquus numerus ducatur in communem illum diuisorem, procreabitur radix residua. Vt si demenda sit √ȝ 27.à √ȝ 75.Diuisa vtraque per √ȝ 3.fiunt Quotientes rationales √ȝ 9.& √ȝ 25. hoc est, 3.& 5. Quorum differentia 2.ducta in communem diuisorem √ȝ 3. facit √ȝ 12. pro residuo subtractionis. Ratio huius operationis hæc est. Sint duo numeri 10. & 30.quorū differentia 20.diuidanturque per communem diuisorem 5.Habebunt ergo Quotientes 6 & 2.eandem proportionem, quam 30.& 10. Ac proinde per conuersionem rationis, erit 30. ad 20. excessum, quo antecedens 30, superat consequentem 10. vt 6. ad 4.excessum, quo antecedens 6.superat consequentem 2.. Et permutando erit 30.ad 6. vt 20.ad 4 Habet autem 30. ad 6 proportionem quintuplam, denominatam videlicet à communi diuisore 5.Igitur & 20. ad 4.proportionem habebit quintuplam: ideoque 20. diuisus per 5. faciet Quotientem 4.Ex quo constat si 4. differentia Quotientum 2.&6. ducatur in diuisorem communem 5 produci 20. differentiam numerorum 10.& 30.

| | | |
|---|---|---|
| | 20 | |
| 10 | | 30 |
| | 5 | |
| 2 | | 6 |
| | 4 | |

---

## *INTER DATOS DVOS NVMEROS QVOTlibet medios proportionales constituere.*

## CAPVT XXI.

*Quotuis medios proportionales inter duos numeros collocare.*

AGENDVM iam esset de Algorithmo numerorum irrationalium compositorum; sed libet prius exponere vsum quendam præclarum radicum simplicium in constituendis quotlibet medijs proportionalibus inter datos duos numeros. qui est eiusmodi. Si constituendus sit vnus medius proportionalis, assumendum erit signum radicale hoc, √ȝ. quod inter quadratum, & vnitatem cadat vnus medius proportionalis in qualibet progressione Geometrica, quę ab 1. incipiat Si duo medij, accipiendum est signum radicale √cc: si tres signum √ȝȝ: si quatuor, signum √ß. si quinque signum √ȝcc.& sic deinceps. quod facile nos docebit progressio Geometrica in cap.2. posita.

DEINDE diuiso maiore numero per minorem, instituenda est progressio Geometrica ab 1. incipiens, & per Quotientem progrediens tot terminorum, duobus amplius, quot medij proportionales desiderantur.

Tertio cuilibet termino huius progressionis præfigendum signum radicale, quod assumendum esse docuimus, pro ratione numeri mediorum.

Quarto, extractis radicibus, quas signum radicale indicat, quando extrahi possunt, delenda sunt signa radicalia, quorum radices extractæ sunt.

Quinto ac vltimo pro extremis progressionis vltimæ ponendi sunt numeri dati, ac per minorem singuli termini medij multiplicandi.

V.g. si inter 5.& 20.statuendus sit vnus numerus medius, asciscendum est signum hoc radicale √ȝ.

DEINDE diuiso maiore numero 20.per minorem 5.constituenda progressio hæc trium terminorum 1.4.16 per Quotientem 4. progrediens.

Tertio cuilibet termino præfigendum signum √ȝ hoc modo, √ȝ 1.√ȝ 4.√ȝ 16.eruntque hi termini continuè quoque proportionales, cum sint radices quadratæ numerorum 1. 4. 16. continuè proportionalium.

Quarto extractis radicibus quadratis, sic stabit progressio. 1. 2. 4.

*a Schol. 18. septimi.*

Quinto, huius progressionis termini singuli per numerum minorem 5. multiplicandi sunt. Vnde sic stabit progressio 5.10.20.inuentusque erit medius terminus proportionalis 10. [a] quia 5. 10. 20.easdem habent proportiones, quas 1. 2. 4.cum hos numeros idem numerus 5 multiplicans illos produxerit.

SIN T rursus inter 6.& 18.inueniendi quinq; medij proportionales. Hic asciscendū est signum √ȝcc.

DEINDE diuiso maiore numero 18.per minorem 6. instituenda est progressio septem terminorum per Quotientem 3.progrediens, hoc modo.

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729.

Tertio cuilibet termino præponendum signum √ȝcc.vt hic.

√ȝcc 1. √ȝcc 3. √ȝcc 9. √ȝcc 27. √ȝcc 81. √ȝcc 243. √ȝcc 729.

erunt-

eruntque hi termini continue quoque proportionales, cum sint radices Zensicubicæ numerorum 1. 3. 9. &c. continue proportionalium.

Quarto extractis radicibus, quæ extrahi possunt, & deletis signis, quorum radices extractæ sunt, sic stabit progressio.

1. √ℨCℭ 3. √Cℭ 3. √ℨ 3. √Cℭ 9. √ℨCℭ 243. 3.

Quinto, ac vltimo, multiplicatis singulis huius progressionis terminis per 6. minorem numerum ex duobus propositis, constitues sequentem progressionem cum quinque medijs terminis proportionalibus.

6. √ℨCℭ 139968. √Cℭ 648. √ℨ 108. √Cℭ 1944. √ℨCℭ 11337408. 18.

eruntque [a] hi termini continue proportionales, cum sint producti ex eodem numero 6. in numeros 1. √ℨCℭ 3. √Cℭ 3. &c. continue proportionales. [a] *Schol. 18. septimi.*

QVOD autem hi termini sint continue proportionales, probari experiendo etiam potest. Nam sumptis quibuslibet tribus proximis, tantum fit ex primo in tertium, quantum ex medio in se, vt vult propos. 20. lib. 7. Eucl. Vt sumptis hisce tribus √Cℭ 648. √ℨ 108. √Cℭ. 1944 tam ex primo in tertium, quam ex medio in se, gignitur numerus 108. Nam ex √ℨ 108 in se fit numerus 108. & ex √Cℭ 648. in √Cℭ 1944. fit √Cℭ 1259712. hoc est, 108 Item acceptis tribus hisce, 6. √ℨCℭ 139968. √Cℭ 648. Ex medio in se quadrate fit √ℨCℭ 19591041024. hoc est extracta radice quadrata 139968. productus numerus est √Cℭ 139968. (quia 139968. radicem cubicam non habet.) qui etiam producitur ex 6. in √Cℭ 648. vt liquet.

## SCHOLIVM.

*SOLET sæpenumero contingere, vt ex numero aliquo extrahenda sit radix quadrata, vel cubica, qui eam non habet. Ne ergo frustra tempus insumatur, traduntur a nonnullis, præsertim à Raphaele Bombello, regula quadam, quibus facile cognoscuntur numeri non quadrati, & non cubi.*

*Primum omnes numeri, qui vltimam figuram ad dexteram habent 2. vel 3. vel 7. vel 8. non sunt quadrati: quia in numeris quadratis vltima figura necessario debet esse vna ex his. 1. 4. 5. 6. 9. 0.* *Qui numeri non sint quadrati.*

*Deinde nullus numerus, ex quo reiectis 9. vt in probatione nouenaria fieri consueuit, non superest aliqua harum figurarum. 1. 4. 7. 0. quadratus est.*

*Tertio, numerus vltimam figuram habens 5. nisi eam præcedat figura 2. cum alia figura pari, vel cum 0. quadratus esse nequit. Vt hi numeri 125. 325. 67525. 89725. 100925. quadrati non sunt.*

*Quarto, numeri vltimam figuram habentes 1. vel 9. nisi eam antecedat figura par, aut 0. quadrati non sunt. Vt hi numeri 4371. 4379. 67899. 75351. quadrati non sunt.*

*Quinto, numeri habentes vltimam figuram 4. nisi eam præcedat alia figura par, vel 0. quadrati non sunt. Vt hi numeri 6934. 70014. quadrati esse nequeunt.*

*Sexto, numeri habentes figuram vltimam 6. nisi eam antecedat figura impar, quadrati non sunt. Vt numeri 5746. 7086. 34526. quadrati non sunt.*

*Septimo ac vltimo, numerus habens in fine plures figuras 0. sub numero impari, quadratus esse non potest. Vt numeri 480. 678000. 91010. quadrati non sunt.*

*QVOD vero ad cubos attinet, nullus numerus erit cubus, si reiectis 9. non remanet 1. vel 8. vel 0. Itaque 12000. non erit cubus, cum reiectis 9. remaneant 3.* *Qui numeri non sint cubi.*

*Deinde numerus, cuius vltima figura est 2. nisi proxime antecedens figura sit impar. item cuius vltima figura est 4. vel 8. si proxime antecedens figura non sit par, vel 0. non potest esse cubus. Vt numeri 34562. 456174. 1100038. non sunt cubi.*

*Tertio nullus numerus habens in fine 0. vel 00. potest esse cubus. Vt hi numeri 1230. 100. 34600. cubi non sunt.*

*Quarto & vltimo, numerus habens vltimam figuram 5. nisi proxime antecedens figura sit 2. vel 7. cubus esse non poterit. Vt hi numeri. 361035. 67895. 1120015. cubi non sunt.*

*Itaque antequam ad extractionem radicis quadratæ, vel cubicæ aggrediaris, operæpretium feceris, si prius per conditiones prædictas experiaris, an propositus numerus possit esse quadratus, aut cubus.*

---

## *DE ADDITIONE AC SVBTRActione numerorum irrationalium compositorum.*

## CAPVT XXII.

CONFICITVR Algorithmus numerorum irrationalium compositorum ex radicum simplicium Algorithmo, dummodo pro additione, & subtractione, in memoriam reducantur regulæ illæ duæ, quæ de signis + & − traditæ sunt cap. 4. videlicet.

1

*Eadem signa idem signum ponunt, nisi in subtractione, quando numeri præpostere ponuntur. Tunc enim subtrahitur superior ab inferiore, & ex + fit − & ex − fit +.* *Duæ regulæ obseruandæ in additione, & subtractione.*

2

*Diuersa signa mutant speciem operationis. Et in additione ponitur signum maioris numeri: In subtractione vero superioris, siue maioris sit, siue minor, aut æqualis.*

Quæ quidem duæ regulæ cap. 4. prædicto expositæ sunt, & ex subiectis exemplis intelligi facile possunt.

*Exempla Additionis.*

| | |
|---|---|
| 6 + √ʒ 18 | √ʒ 27 + √ʒ 8 |
| 4 + √ʒ 8 | √ʒ 12 + √ʒ 2 |
| 10 + √ʒ 50 | √ʒ 75 + √ʒ 18 |
| √ʒ 162 − 2 | √ʒʒ 243 − √ʒʒ 162 |
| √ʒ 200 − 3 | √ʒʒ 48 − √ʒʒ 32 |
| √ʒ 722 − 5 | √ʒʒ 1875 − √ʒʒ 1250 |

*Exempla Subtractionis.*

| | |
|---|---|
| √ʒʒ 1875 + √ʒʒ 1250 | √ʒ 50 − 5 |
| √ʒʒ 243 + √ʒʒ 162 | √ʒ 8 − 2 |
| √ʒʒ 48 + √ʒʒ 32 | √ʒ 18 − 3 |

*Exempla exceptionis in subtractione pro prima regula.*

| | |
|---|---|
| √ʒ 50 + 2 | √ʒ 50 − 2 |
| √ʒ 18 + 4 | √ʒ 18 − 4 |
| √ʒ 8 − 2 | √ʒ 8 + 2 |
| √ʒ 50 + 6 | √ʒ 72 + 2 |
| √ʒ 72 + 2 | 6 + √ʒ 18 |
| 4 − √ʒ 2 | √ʒ 18 − 4 |

*Exempla exceptionis in additione pro regula secunda.*

| | |
|---|---|
| √ʒ 50 + 3 | √ʒ 50 − 3 |
| √ʒ 32 − 5 | √ʒ 32 + 5 |
| √ʒ 162 − 2 | √ʒ 162 + 2 |

*Exempla exceptionis in subtractione pro regula secunda.*

| | |
|---|---|
| √ʒ 162 + 2 | √ʒ 162 − 2 |
| √ʒ 50 − 3 | √ʒ 50 + 3 |
| √ʒ 32 + 5 | √ʒ 32 − 5 |

*Alia exempla additionis.*

| | |
|---|---|
| 8 − √ʒ 50 | √ʒ 50 + 6 |
| √ʒ 242 − 12 | 24 − √ʒ 242 |
| √ʒ 72 − 4 | 30 − √ʒ 72 |

*Alia exempla subtractionis.*

| | |
|---|---|
| √ʒ 72 − 4 | 30 − √ʒ 72 |
| 8 − √ʒ 50 | √ʒ 50 + 6 |
| √ʒ 242 − 12 | 24 − √ʒ 242 |

*Alia Exempla subtractionis.*

| | |
|---|---|
| √ʒ 0 + 16 | √ʒ 180 + 0 |
| √ʒ 320 − 8 | √ʒ 320 − 8 |
| 24 − √ʒ 320 | 8 − √ʒ 20 |

*Obseruanda in nonnullis subtractionibus.*

Hic in priori exemplo quoniam numerus √ʒ 320. non habet respondentem in superiori numero, positus est numerus √ʒ 0. cum signo +. Item quia in posteriori exemplo numerus 8. in superiori numero non habet respondentem, positus quoque est numerus 0. cum signo +. quod semper in subtractione obseruandum est, vt superiores duæ regulæ locum habeant.

VERVM

VERUM in huiusmodi exemplis fiet hoc etiam modo subtractio. Post numerum, à quo debet fieri subtractio, ponatur numerus subtrahendus, commutatis tamen singulis signis eius in signa contraria, ponendo — pro +. & contra. Deinde fiat reductio per additionem. Ut si subtractio fieri debeat √ȝ320 − 8. à numero 16. sic stabit exemplum.

16 − √ȝ 320 + 8

Si ergo addantur 16 ad 8. fiunt 24. & dempta √ȝ320. erit residuum 24 − √ȝ320.

Item si fiat subtractio √ȝ320 − 8. à √ȝ180. sic stabit exemplum. √ȝ180 − √ȝ320 + 8. Si ergo addantur √ȝ180. & − √ȝ320 hoc est, mutata specie operationis, propter diuersa signa + & −. detracta √ȝ180. de √ȝ320. erit residuum 8 − √ȝ20.

Rursus sit facienda subtractio √ȝ180 − 8. de √ȝ320. sic stabit exemplum. √ȝ320 − √ȝ180 + 8. Si ergo addantur simul √ȝ320 − √ȝ180. hoc est, mutata specie operationis, propter diuersa signa + & − dempta √ȝ180 de √ȝ320. erit residuum 8 + √ȝ20.

Sit præterea facienda subtractio 8 − √ȝ12. de √ȝ72 − 4. Sic stabit exemplum. √ȝ72 − 4 − 8 + √ȝ12. Si ergo addantur inter se √ȝ72. √ȝ12. & − 4 − 8. erit residuum √ȝ72 + √ȝ12 − 12. quia radices illę sunt incommensurabiles. Quod si addantur per propos. 4. lib. 2. Eucl. facient √ȝ (84 + √ȝ3456.) atque adeo residuum totum erit √ȝ(84 + √ȝ3456) − 12.

Hoc autem modo recte fieri subtractionem, liquido constat in numeris rationalibus. Sit enim facienda subtractio √ȝ49 − 3. de 8 + √ȝ9. hoc est, 4. de 11. vbi residuum est 7. Secundum præceptum traditum sic stabit exemplum. 8 + √ȝ9 − √ȝ49 + 3. Iam ex 8. & 3. fiunt 11. & ex √ȝ9. & − √ȝ49. fit numerus − 4. Ergo residuum est 11 − 4. hoc est, 7. vt ratio postulat.

SED vt totum hoc negotium additionis, subtractionisque planius intelligatur, subiungemus alia nonnulla exempla. *Alia exempla additionis, & subtractionis.* Sint ergo addenda 7 + √ȝ5. ad 4 + √ȝ3. Ex 7. & 4. fiunt 11. & ex √ȝ5. ac √ȝ3. per propos. 4. lib. 2. Euclid. fit √ȝ (8 + √ȝ60.) Igitur summa est 11 + √ȝ(8 + √ȝ60.)

7 + √ȝ 5
4 + √ȝ 3
11 + √ȝ(8 + √ȝ 60)

RURSUS sint addenda √ȝ5 + 3. ad √ȝ20 − 4. Ex √ȝ5. & √ȝ20. quia commensurabiles sunt, fit √ȝ45. & ex + 3. ac − 4. fit − 1. Tota ergo summa est √ȝ45 − 1. Eadem summa conflabitur, si √ȝ5. ad √ȝ20. addantur per propos 4. lib. 2. Eucl. vt ad initium cap. 19. docuimus. Fiet enim √ȝ(25 + √ȝ400.) hoc est, √ȝ45. atque ita rursus erit tota summa √ȝ45 − 1.

√ȝ 5 + 3
√ȝ 20 − 4
√ȝ 45 − 1

PRÆTEREA sint addenda √ȝ5 + 7. ad √ȝ6 − 7. Ex √ȝ5. & √ȝ6. fit √ȝ(11 + √ȝ120. & ex + 7. & − 7. fit 0. Summa ergo collecta erit √ȝ(11 + √ȝ120.)

√ȝ 5 + 7
√ȝ 6 − 7
√ȝ(11 + √ȝ 120)

AMPLIUS sint addenda √ȝ7 + 3. ad √ȝ20 — 4. Ex √ȝ7. & √ȝ20. fit √ȝ. (27 + √ȝ560) & ex + 3. & — 4. fit — 1. Tota ergo summa erit √ȝ (27 + √ȝ560) — 1.

√ȝ 7 + 3
√ȝ 20 − 4
√ȝ(27 + √ȝ 560)

SINT quoque addenda √ȝ5 + 7. ad √ȝ6 − 2. Ex √ȝ5. & √ȝ6. fit √ȝ. (11 + √ȝ120.) at ex + 7. & − 2. fit + 5. Tota ergo summa erit √ȝ(11 + √ȝ120) + 5. Vel 5 + √ȝ(11 + √ȝ120.)

√ȝ 5 + 7
√ȝ 6 − 2
√ȝ(11 + √7 120) + 5

ITEM sint addenda 7 + √ȝ5. ad 4 − √ȝ3. Summa erit 11 + √ȝ5 − √ȝ3. Vel secundum regulam 2. subtrahemus per propos. 7. lib. 2. Eucl. √ȝ3. à √ȝ5. propter diuersa signa +. & −. hoc modo. Quadrati numeri 5. & 3. faciunt 8. & ex + √ȝ5. in − √ȝ3. fit − √ȝ15. cuius duplum − √ȝ60. ex aggregato quadratorum 8. auferatur, remanebuntque 8 — √ȝ60. Radix ergo huius relicti est id, quod relinquitur post detractionem √ȝ3. ex √ȝ5. cui radici præfigendum est signum +, maioris numeri. Tota ergo summa est 11 + √ȝ(8 — √ȝ60.)

7 + √ȝ 5
4 − √ȝ 3
11 + √ȝ 5 − √ȝ 3

ITEM sint addenda 8 — √ȝ7. ad 10 — √ȝ7. Ex 8. & 10. fiunt 18. at ex — √ȝ7. & — √ȝ7. fit — √ȝ28. Tota ergo summa erit 18 — √ȝ28.

8 — √ȝ 7
10 — √ȝ 7
18 — √ȝ 28

ITEM sint addenda 10 + √ȝ49. ad 7 — √ȝ4. Vbi manifestum est summam esse 22. ex 10. & 7. fiunt 17. Et subtracta √ȝ4. à √ȝ49. per propos. 7. lib. 2. Eucl. propter signa +. & — diuersa, remanent √ȝ (53 — √ȝ784.) cui præponendum est signum + maioris numeri. Tota ergo summa est 17 + √ȝ (53 — √ȝ784.)

10 + √ȝ 49
7 — √ȝ 4
17 + √ȝ(53 — √ȝ784)

Cum ergo radix quadrata huius numeri 53 — √ȝ784. sit 5. (Nam 28. radix numeri 784. dempta ex 53. relinquit 25. cuius radix quadrata est 5.) erit tota summa 17 + 5. hoc est, 22.

| | | |
|---|---|---|
| 10 | — | √ʒ 49 |
| 7 | + | √ʒ 4. |
| 17 | — | √ʒ(53 — √ʒ 784) |

ITEM sint addenda 10 — √ʒ 49. ad 7 + √ʒ 4. vbi etiam liquet, summam esse 12. Ex 10. & 7. fiunt 17. Et subtracta √ʒ 4. à √ʒ 49. propos. 7. lib. 2. Euclid. propter diuersa signa — & +. remanet √ʒ. (53 — 784) cui præfigendum est signum — maioris numeri. Tota ergo summa collecta est 17 — √ʒ(53 — √ʒ 784.) Cum ergo radix quadrata huius numeri 53 — √ʒ 784. sit 5. erit tota summa 17 — 5. hoc est, 12.

ITEM sint addenda 6. ad √ʒ 24. + 3. Fiet summa √ʒ 24 + 9 Vel 9 + √ʒ 24.

| | | |
|---|---|---|
| √ʒ 24 | + | 3 |
| √ʒ 0 | + | 6 |
| √ʒ 24 | + | 9 |

| | | |
|---|---|---|
| √ʒ 24 | — | 3 |
| √ʒ 0 | + | 6 |
| √ʒ 24 | + | 3 |

ITEM sint addenda 6. ad √ʒ 24 — 3. Fiet summa √ʒ 24 + 3.

ITEM sit addenda √ʒ 6. ad √ʒ 24 + 3. Ex radicibus, quia commensurabiles sunt, fit √ʒ 54. At ex — 3 & + 0. fit — 3. Summa igitur est √ʒ 54 — 3.

| | | |
|---|---|---|
| √ʒ 24 | — | 3 |
| √ʒ 6 | + | 0 |
| √ʒ 54 | — | 3 |

ITEM sit addenda √ʒ 8. ad √ʒ 32 + √ʒ 18. Ex √ʒ 8. & √ʒ 32. quia commensurabiles sunt, fit √ʒ 72. Fit ergo summa √ʒ 72 + √ʒ 18. Atque ex his duabus radicibus, cum commensurabiles sint, fit √ʒ 162. summa quæsita. Vel quia commensurabiles etiam sunt √ʒ 8. & √ʒ 18. fiet ex illis √ʒ 50. ita vt tota summa sit √ʒ 50 + √ʒ 32. Atque ex his duabus radicibus, cum sint commensurabiles, fit √ʒ 162. summa quæsita, vt prius. Itaque hi numeri √ʒ 72 + √ʒ 18 & √ʒ 50 + √ʒ 32. æquales sunt, cum vterque æqualis sit √ʒ 162. vt patuit.

| | | |
|---|---|---|
| √ʒ 8 | + | √ʒ 0 |
| √ʒ 32 | + | √ʒ 18 |
| √ʒ 72 | + | √ʒ 18 |

ITEM sit addenda √ce 216 — √ʒʒ 405. ad √ce 64 — √ʒʒ 80. Ex √ce 216. & √ce 64. quia commensurabiles sunt, fit √ce 1000. hoc est, 10. At ex √ʒʒ 405. & √ʒʒ 80. quia commensurabiles quoque sunt, fit √ʒʒ 3125. Tota ergo summa est 10 — √ʒʒ 3125.

| | | |
|---|---|---|
| √ce 216 | — | √ʒʒ 405 |
| √ce 64 | — | √ʒʒ 80 |
| 10 | — | √ʒʒ 3125 |

ITEM sit addenda √ʒʒ 256 — √ce 27 ad √ʒʒ 81 + √ce 8. Ex √ʒʒ 256. & √ʒʒ 81. fit √ʒʒ 2401. hoc est, 7. at ex — √ce 27. & + √ce 8. fit — √ce 1. hoc est, — 1. Summa ergo tota est 7 — 1. hoc est 6. Quod ita esse, liquet. Nam √ʒʒ 256. est 4. a qua si tollatur √ce 27. hoc est, 3. remanet 1. cui si addatur √ʒʒ 81. id est 3. & insuper √ce 8. id est 2. fiet summa 6. vt prius.

| | | |
|---|---|---|
| √ʒʒ 256 | — | √ce 27 |
| √ʒʒ 81 | + | √ce 8 |
| 7 | — | 1 |

SINT denique addendæ √ʒ(5 + √ʒ 6.) & √ʒ(10 — √ʒ 11.) Huiusmodi radices, quas supra appellauimus radices numerorum irrationalium compositorum, diminutorumue, & quas alij radices Vniuersales, dicunt, non possunt commodius in vnam summam redigi, quam per signum +, hoc modo √ʒ(5 + √ʒ 6.) + √ʒ(10 — √ʒ 11.) Sic etiam, si prior à posteriori sit subtrahenda, erit residuum √ʒ(10 — √ʒ 11) — √ʒ(5 + √ʒ 6.) Sed de huiusmodi radicibus plura cap. 24. dicemus.

SIT subtrahenda √ʒʒ 256 — √ce 27. à √ʒʒ 2401 — √ce 1. Vbi manifestum est, residuum esse 5. Quoniam √ʒʒ 2401. & √ʒʒ 256. commensurabiles sunt, si hæc ab illa dematur, relinquetur √ʒʒ 81. hoc est, 3. Et si — √ce 27. à — √ce 1. subtrahatur, cum sint etiam commensurabiles, remanebit + √ce 8. hoc est, 2. Liquet autem 3. & 2. efficere 5. vt ratio postulat.

| | | |
|---|---|---|
| √ʒʒ 2401 | — | √ce 1 |
| √ʒʒ 256 | — | √ce 27 |
| √ʒʒ 81 | + | √ce 8 |

ITEM sint subtrahenda 9 — √ʒ 50. à √ʒ 72 — 3. Quoniam + √ʒ 72. & — √ʒ 50. habent dissimilia signa, mutabitur species operationis, hoc est, inter se addendæ sunt, fietque earum summa √ʒ 242. Item quia — 3. & + 9. habent signa diuersa, fiet etiam additio, & summa 12. recipiet signum — superioris numeri. Residuum ergo quod quæritur, erit √ʒ 242 — 12.

| | | |
|---|---|---|
| √ʒ 72 | — | 3 |
| 9 | — | √ʒ 50 |
| √ʒ 242 | — | 12 |

ITEM sit subtrahendus à √ce 1000 + √ʒʒ 3125. numerus hic √ce 216 — √ʒʒ 405. Quia √ce 1000. & √ce 216. commensurabiles sunt, detracta hac ex illa, remanet √ce 64. hoc est, 4. At ex √ʒʒ 3125. & √ʒʒ 405. quæ etiam commensurabiles sunt, fit summa √ʒʒ 20480. Hæ enim inter se addendæ sunt, iuxta 2. regulam, propter signa dissimilia: eique summæ præfigendum signum + superioris numeri.

| | | |
|---|---|---|
| √ce 1000 | + | √ʒʒ 3125 |
| √ce 216 | — | √ʒʒ 405 |
| 4 | + | √ʒʒ 20480 |

DENI-

DENIQVE sit subtrahenda √ce 216 — √ȝȝ 405. à √ce 1000 — √ȝȝ 3125. Residuum erit id, quod in hac formula descriptum est. Nam √ce 216 detracta ex √ce 1000. reliquam facit √ce 64. hoc est, 4. &c.

√ce 1000 — √ȝȝ 3125
√ce 216 — √ȝȝ 405
4 — √ȝȝ 80

*Compendiosa additio, subtractioque compositorum & diminutorum numerorum similium.*

CÆTERVM quando duæ particulæ numeri compositi sunt omnino æquales duabus particulis numeri diminuti, breuissime vnus numerus ad alterum additur, vel diminutus à composito demitur, hac ratione.

Additio peracta erit, si prior particula alterutrius numeri duplicetur. Vt ex additione 15 + √ȝ 8. ad 15 — √ȝ 8. fit summa 30. Item ex additione √ȝ 20 + 6. ad √ȝ 20 — 6. fit summa √ȝ 80. Sic etiam ex √ȝ 20 + √ȝ 6. ad √ȝ 20 — √ȝ 6. fit summa √ȝ 80. Ratio est, quod posteriores particulæ se mutuo interimant, propter signa +. & —.

Subtractio vero absoluta erit, si posterior particula alterutrius numeri duplicetur. Vt 10 — √ȝ 4. ex 10 + √ȝ 4. relinquunt √ȝ 16. id est 4. Item √ȝ 12 — 5. ex √ȝ 12 + 5. relinquunt 10. Item √ȝ 12 — √ȝ 5. ex √ȝ 12 + √ȝ 5. relinquunt √ȝ 20. Ratio est, quod priores particulæ ex subtractione nil relinquant, & posteriores addendæ sint, quemadmodum regula 2. præcipit, propter diuersa signa — & +.

---

# *DE MVLTIPLICATIONE, AC DIVISIONE numerorum irrationalium Compositorum, & Diminutorum.*

## CAPVT XXIII.

HIC etiam in memoriam reuocanda est regula illa, quam cap. 5. de signis + & — præscripsimus. Videlicet.

*EADEM signa ponunt signum Additorum: Diuersa vero signa ponunt signum Subtractorum.*

*Regula in multiplicatione, ac diuisione obseruanda.*

Siue igitur plus in plus, siue minus in minus multiplicetur, semper producitur plus. Et siue plus in minus, siue minus in plus ducatur, semper procreatur minus. Posito igitur ex duobus numeris vno sub altero, fit multiplicatio, vt in numeris absolutis, dummodo obserues ea, quæ cap. 18. de multiplicatione radicum simplicium, & cap 19. de earundem radicum additione, subtractioneq; tradita sunt. id quod exempla infrascripta docebunt. In sequenti exemplo, ex — √ȝ 45. in — √ȝ 20. fit + √ȝ 900. hoc est, + 30. Et ex — √ȝ 45. in + 6. id est, in + √ȝ 36. fit — √ȝ 1620. Et ex — √ȝ 20. in + 8. hoc est, in + √ȝ 64. fit — √ȝ 1280. Ac denique ex + 8. in + 6. fit + 48. Eritque totus numerus productus 48 — √ȝ 1280 — √ȝ 1620 + 30. qui, si fiat reductio per additionem, & subtractionem, erit 78 — √ȝ 5780. Nam ex + 48. & + 30. fiunt + 78. Et ex — √ȝ 1280. & — √ȝ 1620. quia commensurabiles sunt, fit — √ȝ 5780.

6 — √ȝ 20
8 — √ȝ 45
48 — √ȝ 1280 — √ȝ 1620 + 30
Per reductionem erit, 78 — √ȝ 5780

IN hoc altero exemplo, ex — √ȝȝ 162. in — √ȝȝ 648. fit + √ȝȝ 104976. hoc est, + 18. Et ex — √ȝȝ 162. in + √ȝȝ 288. fit — √ȝȝ 46656. hoc est, √ȝ 216. Et ex — √ȝȝ 648. in + √ȝȝ 128. fit — √ȝȝ 82944. id est, — √ȝ 288. ac tandem ex + √ȝȝ 128. in + √ȝȝ 288. fit + √ȝȝ 36864 id est, √ȝ 192. Eritque totus numerus productus √ȝ 192 — √ȝ 288 — √ȝ 216 + 18. Vel, vt maiores semper numeri præcedant. 18 + √ȝ 192 — √ȝ 288 — √ȝ 216. vt in formula vides.

√ȝȝ 288 — √ȝȝ 648
√ȝȝ 128 — √ȝȝ 162
Productus. √ȝ 192 — √ȝ 288 — √ȝ 216 + 18
Vel 18 + √ȝ 192 — √ȝ 288 — √ȝ 216

*Alia exempla multiplicationis.*

√ce 7 + √ß 6
√ȝ 3
√ȝce 1323 + √ȝß 8748

√ȝ 7 + √ce 3
√ȝ 2
√ȝ 14 + √ȝce 72

IN priori exemplo reduximus √ß 6. & √ȝ 3. ad eandem denominationem, videlicet ad √ȝß 36. & √ȝß 243. atque ita ex multiplicatione facta est √ȝß 8748. Deinde √ȝ 3. & √ce 7. reductæ sunt ad √ȝce. 27. & √ȝce 49. eiusdem denominationis, procreataque est ex multiplicatione √ȝce 1323.

IN exemplo posteriori reductæ sunt √ʒ 2. & √ce 3. ad √ʒce 8. & √ʒce 9. & ex multiplicatione facta est √ʒce 72. atque ex √ʒ 2. in √ʒ 7. facta est √ʒ 14.

*Aliud exemplum in numeris rationalibus.*

√ʒ 9 + √ce 27
√ʒ 4
———
√ʒ 36 + √ʒce 46656
hoc est, 6 + 6

IN hoc exemplo reducuntur √ce 27. & √ʒ 4. ad √ʒce 729. & √ʒce 64. quarum multiplicatio facit √ʒce 46656. hoc est, 6. Deinde ex √ʒ 4. in √ʒ 9. fit √ʒ 36. id est, 6. ita vt totus numerus productus sit 6 + 6. hoc est, 12.

*Alia duo exempla.*

7 + √ʒ 5
7 + √ʒ 5
———
49 + √ʒ 245 + √ʒ 245 + 5.

7 − √ʒ 5
7 − √ʒ 5
———
49 − √ʒ 245 − √ʒ 245 + 5

IN priori exemplo ex numero composito in se fit productus 49 + √ʒ 245 + √ʒ 245 + 5. hoc est, 54 + √ʒ 980 quod ex 49. & + 5. fiant 54. & ex √ʒ 245. & √ʒ 245. hoc est, ex duplo √ʒ 245. fiat √ʒ 980. In posteriori ex numero diminuto in se fit productus 49 − √ʒ 245 − √ʒ 245 + 5. hoc est, 54 − √ʒ 980.

*Compendiosa multiplicatio numeri compositi, vel diminuti in se.*

IMMO vt ducatur numerus compositus in seipsum, vel in alium æqualem, satis est, vt quadrata particularum simul addantur, & huic summæ adijciatur duplum eius, quod fit ex vna particula in aliam, vt in duobus proximis exemplis patet. Nam quadrata particularum conficiunt 54. Et ex vna particula in aliam fit in priori exemplo √ʒ 245. in posteriori autem − √ʒ 245. cuius duplum est √ʒ 980. vel − √ʒ 980. Igitur in exemplo priori producetur numerus 54 + √ʒ 980. In posteriori vero hic, 54 − √ʒ 980. veluti prius.

*Alia duo exempla in numeris rationalibus.*

5 + √ʒ 4
5 + √ʒ 4
———
25 + √ʒ 100 + √ʒ 100 + 4

5 − √ʒ 4
5 − √ʒ 4
———
25 − √ʒ 100 − √ʒ 100 + 4

IN Priori ducuntur 7. in se, fitque productus 49. In posteriori vero ducuntur 3. in se, fitque productus 9. vt liquet. Quæ multiplicationes per compendium proxime traditum ita fient. Quadrata particularum conficiunt 29. Et ex vna particula in aliam, fit, in priori quidem exemplo, √ʒ 100. in posteriori vero − √ʒ 100. cuius duplum est √ʒ 400. vel − √ʒ 400. In priori ergo exemplo productus numerus erit 29 + √ʒ 400. hoc est, 49. In posteriori vero 29 − √ʒ 400. id est, 9.

*Alia duo exempla.*

6 + √ʒ 8
6 − √ʒ 8
———
36 + √ʒ 288 − √ʒ 288 − 8

√ʒ 10 + √ʒ 2
√ʒ 10 − √ʒ 2
———
10 + √ʒ 20 − √ʒ 20 − 2

*Compendiosa multiplicatio numeri compositi quadratarum radicum per similem numerum diminutum.*

IN his duobus exemplis radicum quadratarum, ac similibus, in quibus ducitur numerus compositus in similem diminutum, aut contra, perficietur breuissime multiplicatio, si in alterutro numerorum ex quadrato particulæ prioris dematur quadratum posterioris particulæ, siue posterior particula minor sit priore, siue maior. Vt in priori exemplo, si 8. quadratus numerus posterioris particulæ √ʒ 8. dematur ex 36. numero quadrato prioris particulæ 6. reliquus fiet productus numerus 28. In posteriori autem exemplo, si 2. quadratus numerus posterioris particulæ √ʒ 2. detrahatur à 10. quadrato numero prioris particulæ √ʒ 10. telinquetur productus numerus 8.

ATQVE ita quotiescunque numerus compositus, ac diminntus radicum quadratarum irrationalis, si similes sint, inter se multiplicantur, producitur semper vnicus numerus, & is rationalis. quod quidem Eucl. lib. 10. ptopos. 115. demonstrauit. quia huiusmodi numeri sunt Binomium, ac Residuum, vt ex cap. 27. constabit.

2 + √ʒ 16
2 − √ʒ 16
———
4 − 16

QVANDO posterior particula maior est, producitur numerus diminutus, vt in hoc apposito exemplo apparet. Nam si 16. quadratus numerus posterioris particulæ dematur ex 4. quadrato numero particulæ prioris, remanent 4 − 16.

Atque

Atque hoc ita esse, docet hæc alterã formula multiplicationis. Et quoniam 2 + √ℨ16. faciunt 6. & 2 — √ℨ16. faciunt 2 — 4. si 2 — 4. ducantur in 6. fit productus numerus 12 — 24. Necesse igitur est, hosce duos numeros 4 — 16. & 12 — 24. esse æquales, vt vere sunt, cum vnus ab altero detractus relinquat 0. vt subscriptæ duæ formulæ subtractionum demonstrant: quia 8 — 8. æquiualent nihilo. quod etiam ex eo patet, quod tam ex 4. ad — 16. quam ex 12. ad — 24. semper summa fiat — 12. iuxta regulam 2. additionis.

| | | |
|---|---|---|
| 2 | + √ℨ 64 [√ℨ 16] | |

2 + √ℨ 16
2 — √ℨ 16
— √ℨ 64 — 16
4 + √ℨ 64
4 — 16

2 — 4
6
12 — 24

4 — 16 | 12 — 24
12 — 24 | 4 — 16
— 8 + 8 | 8 — 8

PORRO de multiplicatione radicum numerorum compositorum, vel diminutorum, quas Vniuersales dicunt, agemus cap. 24. quod sequitur.

*Exempla Diuisionis.*

*Diuisio numeri compositi diminutiue per radicem simplicem.*

√ℭ 28 + √ℭ 20 ( √ℭ 7 + √ℭ 5
per √ℭ 4 √ℭ 4

√ℭ 28 + √ℭ 20 ( √ℭ 4 + √ℭ 2 $\frac{6}{7}$
per √ℭ 7 √ℭ 7

*Alia Exempla Diuisionis.*

√ℨ 20 — √ℭ 10 ( √ℨ 2 $\frac{2}{9}$ — √ℭ $\frac{10}{27}$
per 3

√ℨℨ 8 + √ß 3 ( √ℨℨ 2 + √ℨß $\frac{9}{32}$
per √ℨ 2

IN priori exemplo, diuisa √ℨ20. per 3 id est, per √ℨ9. fit Quotiens √ℨ2 $\frac{2}{9}$. Diuisa vero — √ℭ10. per + 3. id est, per + √ℭ27. fit Quotiens — √ℭ $\frac{10}{27}$. In posteriori autem exemplo, reducendæ sunt √ℨℨ8. & √ℨ2. ad √ℨℨℨ64. & √ℨℨℨ16. eiusdem denominationis, diuisaque illa per hanc, fit Quotieus √ℨℨℨ4. hoc est, √ℨℨ2. Eodem modo √ß3. & √ℨ2. reducendæ sunt ad √ℨß9. & √ℨß32. diuisaque illa per hanc, fit Quotiens √ℨß $\frac{9}{32}$. Quoniam autem multiplicatio probat diuisionem, si posterior Quotiens multiplicetur per √ℨ2. diuisorem, producetur numerus diuisus √ℨℨ8 + √ß3. Nam √ℨß $\frac{9}{32}$. & √ℨ2. reducuntur ad √ℨℨß $\frac{81}{1024}$. & √ℨℨß1024. quæ inter se multiplicatæ gignunt √ℨℨß $\frac{82944}{1024}$. hoc est, √ℨℨß81. siue √ß3. Item √ℨℨ2. & √ℨ2. reducuntur ad √ℨℨℨ4. & √ℨℨℨ16. quæ inter se multiplicatæ faciunt √ℨℨℨ64. hoc est, √ℨℨ8. Item si sit diuidendus numerus √ℨℨ23328 — √ℨℨ10368. per 6. hoc est, per √ℨℨ1296. fit Quotiens √ℨℨ18 — √ℨℨ8. hoc est 18 — 9. nimirum 9.

*Diuisio per numerum radicum quadratarum, vel Zensizensicarum compositũ, aut diminutũ.*

QVANDO diuisor est numerus radicum quadratarum, vel zensizensicarum compositus, aut diminutus, oportet illum multiplicare per numerum similem, mutato signo + in —, & signo — in +. vt gignatur nnmerus vnicus rationalis, vt paulo ante dictum est, pro diuisore. Deinde per eundem hunc numerum ita transmutatum multiplicandus est numerus diuidendus, vt producatur nouus numerus per diuisorem inuentum diuidendus. [a] Nam hic numerus diuidendus nouus ad diuisorem nouum inuentum habet eandem proportionem, quam propositus numerus diuidendus ad diuisorem propositum: propterea quod idem numerus ille transmutatus multiplicans vtrumque horum illos produxit: ac proinde idem Quotiens fiet, siue diuidendus propositus per propositum diuisorem, siue nouus diuidendus inuentus per nouum diuisorem diuidatur. Quemadmodum quia ita se habent 12. ad 3. vt 48. ad 12. semper Quotiens 4. procreatur; siue 12. per 3. siue 48. per 12. diuidantur.

*[a] 17 sept.*

SINT diuidendã 42. per √ℨ25 + √ℨ4. hoc est, per 7. vbi Quotiens est 6. si multiplicetur diuisor per √ℨ25 — √ℨ4. gignetur nouus diuisor 21. qui nimirum remanet, si 4. quadratum posterioris particulæ ex 25. quadrato prioris particulæ dematur, vt paulo ante dictum est. Et si diuidendus numerus 42. hoc est, √ℨ1764. per eundem numerum √ℨ25 — √ℨ4. multiplicetur, producetur nouus numerus diuidendus √ℨ44100 — √ℨ7056. quo diuiso per inuentum diuisorem 21. hoc est, per √ℨ441. fit Quotiens 6. Nam √ℨ100. nimirum 10 — √ℨ16. id est, — 4. facit 6. vt manifestum est.

25
364
√ℨ 44100 — √ℨ 7056 ( √ℨ100 — √ℨ16
√ℨ 441 √ℨ 441
44

SINT rursus diuidenda 54. per 2 + √ℨ16. hoc est, per 6. vbi Quotiens est 9. Si diuisor ducatur in 2 — √ℨ16. producetur numerus diminutus 4 — 16. quia posterior particula priore maior est. Quare inuertendæ sunt particulæ diuisoris hoc modo √ℨ16 + 2, vt ex ductu √ℨ16 — 2. fiat numerus simplex 12. pro diuisore. Quod si diuidendus numerus 54. ducatur in eundem numerum √ℨ16 — 2. fiet nouus diuidendus √ℨ46656 — 108. quo diuiso per 12. nimirum √ℨ46656. per √ℨ144. & — 108. per 12. fit Quotiens √ℨ324 — 9. hoc est, 18 — 9. nimirum 9.

ITEM sint diuidenda 6. per √ȝ12 + √ȝ6. Ducto vtroque numero in √ȝ12 — √ȝ6. fiunt √ȝ432 — √ȝ216. & 6. Ex diuisione autem √ȝ432 — √ȝ216. per 6. hoc est, per √ȝ36. fit Quotiens √ȝ12 — √ȝ6. Probatur. Nam ex Quotiente √ȝ12 — √ȝ6. in diuisorem √ȝ12 + √ȝ6. fit numerus diuisus 6.

ITEM diuidendus sit numerus 66 — √ȝ2000 per 8 — √ȝ45. Si vterque numerus ducatur in 8 + √ȝ45 fit nouus diuidendus 528 — √ȝ128000 + √ȝ196020 — √ȝ90000. hoc est, 228 + √ȝ7220. (Nam detracta √ȝ90000. id est, 300. ex 528. reliquus fit numerus 228. & √ȝ128000. detracta ex √ȝ196020. cum hi numeri sint commensurabiles, relinquit √ȝ7220.) atq; nouus diuisor 19. Fit autem ex diuisione Quotiens 12 + √ȝ20. Nam ex hoc Quotiente in diuisorem 8 — √ȝ45. fit numerus 96 + √ȝ1280 — √ȝ6480 — √ȝ900. qui æqualis est numero diuiso 66 — √ȝ2000. quia √ȝ900. hoc est, 30. ex 96. relinquit 66. & — √ȝ6480. ex + √ȝ1280. hoc est, ex additione vnius ad alterum propter signa diuersa, cum sint commensurabiles, fit numerus — √ȝ2000.

SINT quoque diuidenda 20. per √ȝȝ16 + ȝȝ81. hoc est, per 5. vbi Quotiens est 4. Inuertatur diuisor sic, √ȝȝ81 + √ȝȝ16. vt posterior particula minor sit priore, multipliceturque tam diuidendus 20. quam diuisor √ȝȝ81 + √ȝȝ16. per √ȝȝ81 — √ȝȝ16. fietque nouus diuidendus √ȝȝ12960000 — √ȝȝ2560000. & nouus diuisor √ȝȝ6561 — √ȝȝ256. hoc est 9 — 4. videlicet 5. Diuiso ergo illo diuidendo per 5. hoc est, per √ȝȝ625. fit Quotiens √ȝȝ20736 — √ȝȝ4096. hoc est, 12 — 8. nimirum 4. vt par est. Adduxi hoc exemplum in numeris rationalibus, vt intelligeres, eandem esse rationem in radicibus zensizensicis, quæ est in radicibus zensicis.

SINT rursus diuidenda 10. per √ȝȝ5 + √ȝȝ3. Multiplicetur vterque numerus per √ȝȝ5 — √ȝȝ3. fietque nouus diuidendus √ȝȝ50000 — √ȝȝ30000. & nouus diuisor √ȝȝ25 — √ȝȝ9. hoc est, √ȝ5 — √ȝ3. Et quoniam hic diuisor non est numerus vnicus rationalis, multiplicabimus tam nouum diuidendum inuentum, quam nouum diuisorem, per √ȝ5 + √ȝ3. fietq; alius nouus diuidendus √ȝȝ1250000 — √ȝȝ750000 + √ȝȝ450000 — √ȝȝ270000. & alius diuisor nouus 5 — 3. hoc est, 2. Si ergo illum diuidendum per hunc diuisorem diuidemus, id est, per √ȝȝ16. faciemus Quotientem √ȝȝ78125 — √ȝȝ46875 + √ȝȝ28125 — √ȝȝ16875. Quod probatur. Si namque hic Quotiens ducatur in diuisorem propositum, nimirum in √ȝȝ5 + √ȝȝ3. producetur numerus diuisus 10. vt hic patet.

√ȝȝ78125 — √ȝȝ46875 + √ȝȝ28125 — √ȝȝ16875<br>
√ȝȝ5 + √ȝȝ3<br>
+ √ȝȝ234375 — √ȝȝ140625 + √ȝȝ84375 — √ȝȝ50625<br>
√ȝȝ390625 — √ȝȝ234375 + √ȝȝ140625 — √ȝȝ84375

Quoniam enim numeri intermedij, quorum bini æquales sunt, & diuersorum signorum, se mutuo tollunt, relinquetur productus √ȝȝ390625 — √ȝȝ50625. hoc est, 25 — 15. videlicet 10.

*Diuisio per numerum radicum quadratarum compositũ triũ particularum vel plurium.*

PRÆTEREA sint diuidenda 100. per √ȝ3 + √ȝ5 + √ȝ6. Hic quia diuisor habet tres particulas affectas signo +. vt inueniatur diuisor simplex, multiplicandus est diuisor in similem numerum, mutata vltima particula +. in —. vt hic vides. Producetur enim numerus duarum particularum √ȝ60 + 2 pro nouo diuisore, qui etiam habebitur hoc modo. Priores duæ particulæ inter se multiplicentur. Nam si productus numerus √ȝ15. duplicetur, proueniet √ȝ60. pro priore particula. Et si vltimæ particulæ numerus 6. dematur ex 8. summa numerorum 3. & 5. priorum duarum particularum, remanebit numerus + 2. pro particula posteriore.

√ȝ3 + √ȝ5 + √ȝ6<br>
√ȝ3 + √ȝ5 — √ȝ6<br>
— √ȝ18 — √ȝ30 — 6<br>
+ √ȝ15 + 5 + √ȝ30<br>
+ 3 + √ȝ15 + √ȝ18<br>
√ȝ60 + 2

Quod si numerus diuidendus 100. per eundem numerum √ȝ3 + √ȝ5 — √ȝ6. multiplicetur, gignetur nouus numerus diuidendus √ȝ30000 + √ȝ50000 — √ȝ60000. [a] qui ad nouum diuisorem inuentum eandem proportionem habebit, quam numerus diuidendus propositus 100. ad propositum diuisorem √ȝ3 + √ȝ5 + √ȝ6.

*[a] 17. sept.*

Sed quoniam inuentus nouus diuisor nondum est simplex, ducemus eum in diminutum similem, nimirum in √ȝ60 — 2. efficiemusq; 60 — 4. hoc est, 56. pro nouo diuisore. Et si nouus diuidendus √ȝ30000 + √ȝ50000 — √ȝ60000. ducatur in eundem numerum √ȝ60 — 2. procreabitur nouus numerus diuidẽdus √ȝ1800000 + √ȝ3000000 + √ȝ240000 — √ȝ120000 — √ȝ200000 — √ȝ3600000 quo diuiso per diuisorem inuentum 56 prodibit idem Quotiens, qui proueniret, si datus numerus 100. per datum diuisorem √ȝ3 + √ȝ5 + √ȝ6. diuideretur.

QVOD si diuisorem datum √ȝ3 + √ȝ5 + √ȝ6. & numerum diuidendum 100. multiplicaremus per √ȝ3 — √ȝ5 + √ȝ6. (Nam quando omnes tres particulæ habent signum +. poterit quælibet earum mutari in —) produceremus nouum diuisorem √ȝȝ72 + 4. & nouum diuidendum √ȝ30000 — √ȝ50000 + √ȝ60000. Et si tam hic diuidendus, quam ille diuisor √ȝ72 + 4 ducatur in √ȝ72 — 4. producetur nouus alius diuidendus, & nouus diuisor simplex 56. [b] ad quem diuidendus nouus eandem proportionem habebit, quam datus numerus diuidendus 100 ad datum diuisorem √ȝ3 + √ȝ5 + √ȝ6.

*[b] 17 sept.*

SI vero diuisor habuerit vnam particulam cum signo —. vertendum erit signum — in +. vt fiat multiplicatio.

ATQVE hoc eodem modo, si diuisor habuerit plures particulas radicum quadratarum, quam tres, mutabis semper vnam ex +, in —, vel contra. Nam ex prima multiplicatione gignetur numerus totidem particularum, minus vna, & in secunda totidem quoque, minus duabus, & sic deinceps procedendum erit, donec fiat numerus simplex pro diuisore nouo. Diuidendus quoque numerus ducendus est in primum numerum multiplicantem: Deinde productus numerus in secundum, &c. ita vt tot fiant multiplicationes, quot factæ sunt, vt diuisor simplex inueniretur.

*Diuisio per numerum radicum cubicarum compositũ.*

QVANDO diuisor habet duas particulas radicum cubicarum, inueniendus etiam est diuisor simplex. quod ita fiet. Sint V.g. diuidenda 10. per $\sqrt{ce}\,5+\sqrt{ce}\,3$. Per doctrinam propos. 2. lib. 8 Eucl. reperiantur tres numeri continue proportionales (propter 3. exponentem cubi) in proportione particularum diuisoris, nimirum $\sqrt{ce}\,5$. ad $\sqrt{ce}\,3$. hac methodo. Primum ducatur $\sqrt{ce}\,5$. in se, fietque primus numerus $\sqrt{ce}\,25$. Deinde ducatur $\sqrt{ce}\,5$. in $\sqrt{ce}\,3$. gigneturque secundus numerus $\sqrt{ce}\,15$. Tertio ducatur quoque $\sqrt{ce}\,3$. in se, proueniet que tertius numerus $\sqrt{ce}\,9$. atque ita hi tres numeri producti. $\sqrt{ce}\,25$. & $\sqrt{ce}\,15$. & $\sqrt{ce}\,9$. erunt continue proportionales in proportione $\sqrt{ce}\,5$. ad $\sqrt{ce}\,3$. vt in dicta propos. 2. lib. 8. ab Euclide demonstratum fuit. Quod etiam experiri licebit per multiplicationem. Nam positis tribus numeris $\sqrt{ce}\,25$. $\sqrt{ce}\,15$. $\sqrt{ce}\,9$. tantum fit ex primo in tertium, quantum ex medio in se. Item positis quatuor numeris $\sqrt{ce}\,5$. $\sqrt{ce}\,3$. $\sqrt{ce}\,25$. $\sqrt{ce}\,15$. tantum fit ex primo in quartum, quantum ex secundo in tertium. quod etiam in his quatuor $\sqrt{ce}\,5$. $\sqrt{ce}\,3$. $\sqrt{ce}\,15$. $\sqrt{ce}\,9$. cernitur. Extremi duo numeri afficiantur signo +, & medius signo —. hoc modo $\sqrt{ce}\,25-\sqrt{ce}\,15+\sqrt{ce}\,9$. Per hunc communem numerum multiplicantem si multiplicetur tam numerus 10. diuidendus, quam diuisor $\sqrt{ce}\,5+\sqrt{ce}\,3$. fiet nouus diuidendus $\sqrt{ce}\,25000-\sqrt{ce}\,15000+\sqrt{ce}\,9000$. & nouus diuisor $\sqrt{ce}\,125+\sqrt{ce}\,27$. id est, 8. vt in subiecta formula liquet. qui diuisor simplex habetur, (vt auctores docent, & quod est obseruatione dignum) si numeri particularum diuisoris 5. & 3. simul addãtur, etiam si nulla fiat multiplicatio.

$$
\begin{array}{lrrrr}
 & \sqrt{ce}\,25 & -\sqrt{ce}\,15 & +\sqrt{ce}\,9 & \\
 & & \sqrt{ce}\,5 & +\sqrt{ce}\,3 & \\
\hline
 & & +\sqrt{ce}\,75 & -\sqrt{ce}\,45 & +\sqrt{ce}\,27 \\
+\sqrt{ce}\,125 & -\sqrt{ce}\,75 & +\sqrt{ce}\,45 & & \\
\hline
\text{Summa.} & \sqrt{ce}\,125 & +\sqrt{ce}\,27 & &
\end{array}
$$

*Diuisio per numerum radicum zensizensicarum, surdesolidarũ, &c. compositũ.*

EADEM via tenẽda est in diuisore composito duarum radicum zensizensicarum, surdesolidarum, zensicubicarum, &c. dummodo tot numeri continue proportionales, secundum doctrinam propos. 2. lib. 8. Eucl. reperiantur in proportione particularum diuisoris, quot vnitates sunt in exponente zz. ß. zce. &c. nimirum quatuor in diuisore radicum zensizensicarum, & quinque pro diuisore radicum surdesolidarum, & sex pro zensicubicis, &c. Quibus inuentis, tribuatur primo numero signum +. secundo signum —. tertio iterum signum +. & quarto iterum signum —. atque ita alternatim procedendo, vt numeri in locis imparibus gerant signum +, & in locis paribus signũ —. Exemplum ponam in diuisione 10. per $\sqrt{zz}\,5+\sqrt{zz}\,3$. quam supra alio modo expediuimus. Quouiam exponens zz. est 4. inuenientur hi quatuor numeri proportionales $\sqrt{zz}\,125$. $\sqrt{zz}\,75$. $\sqrt{zz}\,45$. $\sqrt{zz}\,27$. iuxta

$$
\begin{array}{c}
\sqrt{zz}\,5+\sqrt{zz}\,3. \\
\sqrt{zz}\,25.\quad \sqrt{zz}\,15.\quad \sqrt{zz}\,9 \\
\sqrt{zz}\,125-\sqrt{zz}\,75+\sqrt{zz}\,45-\sqrt{zz}\,27
\end{array}
$$

doctrinam propos. 2. lib. 8. Euclid. vt hic cernis: vbi apposuimus signum + numeris locorum imparium, numeris autem locorum parium signum — vt diximus faciendum esse. Iam si per hunc numerum quatuor particularum multiplicetur tam numerus 10. diuidendus, quam diuisor $\sqrt{zz}\,5+\sqrt{zz}\,3$. reperietur nouus numerus diuidendus $\sqrt{zz}\,1250000-\sqrt{zz}\,750000+\sqrt{zz}\,450000.-\sqrt{zz}\,270000$. & nouus diuisor $\sqrt{zz}\,625-\sqrt{zz}\,81$. hoc est, 2. iidem omnino, qui supra ante diuisionem per numerum radicum quadratarũ compositum trium particularum. Atq; hic diuisor, sine multiplicatione, habetur, vt auctores docent, si minoris particulæ numerus in diuisore dematur ex numero particulæ maioris, videlicet 3. ex 5. vt hæ formulæ indicant.

*Inuentio numeri diuidendi.*

$$
\begin{array}{c}
10,\ \text{hoc est},\ \sqrt{zz}\,10000 \\
\sqrt{zz}\,125-\sqrt{zz}\,75+\sqrt{zz}\,45-\sqrt{zz}\,27 \\
\hline
\sqrt{zz}\,1250000-\sqrt{zz}\,750000+\sqrt{zz}\,450000-\sqrt{zz}\,270000
\end{array}
$$

*Inuentio diuisoris.*

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & \sqrt{zz}\,125 & -\sqrt{zz}\,75 & +\sqrt{zz}\,45 & -\sqrt{zz}\,27 \\
 & & & \sqrt{zz}\,5 & +\sqrt{zz}\,3 \\
\hline
 & +\sqrt{zz}\,375 & -\sqrt{zz}\,225 & +\sqrt{zz}\,135 & -\sqrt{zz}\,81 \\
+\sqrt{zz}\,625 & -\sqrt{zz}\,375 & +\sqrt{zz}\,225 & -\sqrt{zz}\,135 & \\
\hline
 & & & \sqrt{zz}\,625 & -\sqrt{zz}\,81
\end{array}
$$

EADEM ratio est de cæteris. Sed quando numerus exponens radicum est par, vt $\sqrt{z}$. $\sqrt{zz}$ &c. diuisor simplex habetur, si (vt auctores docent) numerus particulæ minoris in dato diuisore ex numero maioris particulæ subducatur: at vero, quando exponens numerus est impar, vt $\sqrt{ce}$. $\sqrt{ß}$. &c. simplex diuisor habetur, si numeri particularum diuisoris dati in vnam colligantur summam. id quod in superioribus obseruatum esse vides.

*Diuisio per numerum compositũ diuersarũ radicum.*

SED neque hoc omittendum est, quando diuisor est duarum radicum diuersarum, eas ad eandem denominationem esse reducendas, antequam operationem auspiceris.

DENIQVE quando diuisor est plurium particularum, ac diuersarum radicum, ita vt non facile reduci possit ad simplicem diuisorem, constituenda erit fractio, cuius numerator sit numerus diuidendus, & denominator ipsemet diuisor: non secus ac in numeris absolutis fieri solet, quando minor numerus per maiorem diuidendus proponitur, vt 3. per 4. Fit enim fractio $\frac{3}{4}$. Verbi gratia, si numerus $\sqrt{z}\,48+\sqrt{ce}\,3$. diuidendus sit per $\sqrt{z}\,15+\sqrt{ce}\,6.-\sqrt{z}\,3$. fiet hæc fractio.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Numerator.} & \sqrt{z}\,48+\sqrt{ce}\,3 \\
\hline
\text{Denominator.} & \sqrt{z}\,15+\sqrt{ce}\,6-\sqrt{z}\,3
\end{array}
$$

SCHO-

## SCHOLIVM.

*Vter duorũ numerorũ compositorum maior sit.*

*ACCIDIT non raro, vt inter duos numeros irrationales compositos ambigatur, vter eorum maior sit. quæ ambiguitas ita tolletur. Sint propositi duo numeri, 4 + √ȝ 7. & 20 — √ȝ 180. Auferatur vtrobique numerus 4. remanebitque ex vna parte, √ȝ 7. & ex altera, 16 — √ȝ 180. Certum autem est, si duo numeri dati sint æquales, residua etiam æqualia esse: Et si inæquales, residua eodem modo esse inæqualia. Quadretur vtrumque residuum, eritque prioris residui quadratum 7. posterioris vero, 436 — √ȝ 184320. Certum quoque est, si residua sint æqualia, eorum quadrata quoque æqualia esse: Et si illa sint inæqualia, hæc etiam esse inæqualia. Addatur vtrique quadrato diminutum hoc — √ȝ 184320. fientque numeri 7 + √ȝ 184320. & 436. Auferantur vtrinque 7. eruntque reliqui numeri √ȝ 184320. & 429. qui quadrentur, vt fiant 184320. & 184041. Et quia illud quadratum maius est, quam hoc, pronunciabis numerum 4 — √ȝ 7. maiorem esse numero 20 — √ȝ 180. Eodem pacto cum alijs numeris procedes. Hoc etiam per extractiones radicum constat. Nam radix propinqua numeri 7 est $2\frac{2}{3}$. quæ cum 4. facit $6\frac{2}{3}$. At radix propinqua numeri 180. est $13\frac{11}{27}$. quæ dempta ex 20. relinquit $\frac{16}{27}$. Constat autem $\frac{2}{3}$. esse numerum maiorem, quam $\frac{16}{27}$. Atque ita habes aliam rationem tollendi ambiguitatem. Sed prior ratio est magis accurata.*

---

## *DE RADICIBVS NVMERORVM IRRATIONALIUM compositorum, vel diminutorum: quas alij Vniuersales dicunt: & de earundem Algorithmo.*

## CAPVT XXIV.

*Variæ radices numerorũ compositorum.*

HÆ radices oriuntur plerunque ex additione, ac subtractione radicum irrationalium simplicium incommensurabilium, vt in cap. 19. ac 20. patuit: quas hoc loco paulo diligentius explicare proponimus. quod exequemur, expositis varijs radicibus numerorum compositorum, vna cum earum Algorithmo. Si igitur ex hoc numero composito, 10 + √ȝ 7. extrahenda sit radix quadrata; erit ea √ȝ (10 + √ȝ 7.) cuius sensus est, vt radice quadrata numeri 7. si haberi posset, addita ad 10. totius numeri radix quadrata sumatur. In hac vero altera radice. √ℭ (10 + √ȝ 7.) intelligimus radicem cubicam numeri ex 10. & √ȝ 7. compositi Et vt res planius percipiatur, proferemus exempla in numeris rationalibus. Vt √ȝ (10 + √ȝ 16 + 3 + √ȝ 64) nihil aliud significat, quam 5. Nam √ȝ 16 est 4. quæ addita ad 3. facit 7. & 7. cum √ȝ 64. id est, cum 8. faciunt 15. quibus si addantur 10. fiunt 25. pretium totius numeri compositi, cuius radix quadrata est 5. Item √ℭ (√ȝ 25 + √ȝ 9) erit 2. Est enim sensus, vt sumptis radicibus quadratis numerorũ 25 & 9. quæ sunt 5. & 3. efficientes 8. extrahatur ex hac summa radix cubica, quæ est 2. Hæc vero radix, √ȝ (10 + √ȝ 36) + √ȝ (70 + √ȝ 121.) valebit 13. Significatur enim radicem quadratam compositi 10 + √ȝ 36. quod est 16. nimirum √ȝ 16. quæ est 4. addi ad 9 radicem quadratam compositi 70 + √ȝ 121. quod est 81.

*Quadrata & cubi radicum numerorum compositorum.*

QVEMADMODVM autem quadratum radicis quadrati cuiusuis surdæ simplicis est ipse numerus, deleto signo radicali √ȝ. Et cubus radicis cubicæ simplicis, ipse numerus, deleto signo radicali √ℭ. Vt quadratum √ȝ 5. est 5. & quadratum √ȝ 25. est 25. Cubus vero √ℭ 12. est 12. & cubus √ℭ 27. est 27. propterea quod radix qualibet quadrata ducta in se quadrate producit eius radicis quadratum, ducta vero in se cubice gignit cubum eiusdem radicis: Ita quoque quadratum radicis quadratæ numeri cuiuslibet compositi est ipsemet numerus compositus, deleto signo √ȝ. Et cubus radicis cubicæ numeri compositi cuiusuis est ipsemet numerus, deleto signo √ℭ. Vt quadratum √ȝ (11 + √ȝ 9 + √ȝ 4.) est 11 + √ȝ 9 + √ȝ 4. hoc est, 16. ita vt illa radix valeat 4.

Quadratum √ȝ (√ȝ 49 + √ȝ 36 — √ȝ 16) est √ȝ 49 + √ȝ 36 — √ȝ 16. hoc est, 9. ita vt radix illa valeat 3.

Quadratum √ȝ (√ȝ 64 + √ȝ 49 + √ȝ 36 — 5) est √ȝ 64 + √ȝ 49 + √ȝ 36 — 5. hoc est, 16. ita vt valor illius radicis sit 4.

Quadratum √ȝ (√ℭ 216 + √ℭ 27) est √ℭ 216 + √ℭ 27. hoc est, 9. pretiumque eius radicis est 3.

Quadratum √ȝ (√ℭ 216 — √ℭ 27.) est √ℭ 216 — √ℭ 27. hoc est, 3. valorque eius radicis est √ȝ 3.

Cubus √ℭ (√ȝ 25 + √ȝ 9) est √ȝ 25 + √ȝ 9. hoc est, 8. ita vt radix illa valeat 2.

Cubus √ℭ (√ȝ 25 — √ȝ 9) est √ȝ 25 — √ȝ 9. id est, 2. pretiumque radicis illius est √ℭ 2.

Cubus √ℭ (√ℭ 64 + √ℭ 27.) est √ℭ 64 + √ℭ 27. id est, 7. ita vt radix illa sit √ℭ 7. Idemque iudicium facies de zensizensis, ac surdesolidis, &c. radicum zensizensicarum, & surdesolidarum numerorum compositorum. Proposui autem exempla in numeris rationalibus, vt res fieret clarior. Atque hoc modo multiplicatur radix cuiuslibet numeri compositi in se; hoc est, producitur eius quadratum, vel cubus, &c.

*Multiplicatio radicis numeri compositi in se.*

*Multiplicatio radicũ numerorũ compositorum.*

AT vero radix numeri compositi in radicem simplicem, vel in numerũ compositum, vel in numerum absolutum, vel denique in aliam radicem numeri compositi, multiplicabitur hac ratione. Vterq; numerus tam multiplicandus, quam multiplicans, reducatur ad quadratum, vel cubum. Deinde fiat multiplicatio, vt supra traditum est. Nam radix totius producti erit numerus procreatus ex multiplicatione, quemadmodum ex √ȝ 5. in √ȝ 12. fit √ȝ 60. radix nimirum zensica numeri 60. ex multiplicatione quadratorum 5. & 12. producti. Item sicut ex √ℭ 9. in √ℭ 10. fit √ℭ 90. videlicet radix cubica numeri 90. qui ex multiplicatione cubi 9. in cubum 10. gignitur, vt cap. præcedenti traditum est. Hoc autem clarius ex sequentibus exemplis disces. Sit enim

multi-

multiplicanda √ʒ(7+√ʒ3.) per 2. Quadrata sunt 7+√ʒ3.& 4 Si ergo ducantur 4. in 7. fiunt 28. Et si ducatur √ʒ3. in 4. hoc est, in √ʒ16. fit √ʒ48. Totus ergo numerus productus est √ʒ(28+√ʒ48.) Rite autem hoc modo fieri multiplicationẽ, disces ex hoc altero exemplo numerorum rationalium. Sit ducenda, √ʒ(7+√ʒ4.) hoc est, 3. (nam 7. cum √ʒ4. faciunt 9. cuius √ʒ est 3.) per 2. Vbi manifestum est, numerum genitum fore 6. Quadrata sunt 7+√ʒ4. Si igitur ducãtur 4. in 7. fiunt 28. Et si √ʒ4. ducatur in 4. hoc est, in √ʒ16. fit √ʒ64. eritq; totus numerus productus √ʒ(28+√ʒ64.) hoc est, √ʒ36. nimirum 6. vt conuenit.

7 + √ʒ 3
4
------
28 + √ʒ 48

7 + √ʒ 4
4
------
28 + √ʒ 64

Sit rursus multiplicanda √ʒ(7+√ʒ4) per 3. hoc est 3. per 3. vbi productus numerus est 9. Quadrata sunt 7+√ʒ4. & 9. Ex 9. in 7. fiunt 63. & ex √ʒ4. in 9. hoc est, in √ʒ81. fit √ʒ324. Productus ergo numerus erit √ʒ(63+√ʒ324) hoc est, √ʒ81. nimirum 9.

7 + √ʒ 4
9
------
63 + √ʒ 324

ITEM sit multiplicenda √ʒ(√ʒ25+√ʒ16) hoc est, √ʒ9. siue 3. per 3. vbi etiam constat, productum numerum fore 9. Quadrata sunt √ʒ25+√ʒ16. & 9. Ex √ʒ25. in 9 hoc est, in √ʒ81. fit √ʒ2025. Et ex √ʒ16. in 9. id est, in √ʒ81. fit √ʒ1296. Procreatus ergo numerus erit √ʒ(√ʒ2025+√ʒ1296.) hoc est, √ʒ(45+36) siue √ʒ81. hoc est, 9.

√ʒ 25 + √ʒ 16
9
------
√ʒ 2025 + √ʒ 1296

SIT multiplicanda √ce(√ce64+√ce27.) hoc est, √ce7. per 2. vbi productus erit √ce56. Cubi numerorum sunt √ce64+√ce27. & 8. Ex √ce64. in 8. hoc est, in √ce512 fit √ce32768. & ex √ce27. in 8. hoc est, in √ce512 fit √ce13824. Cũ ergo √ce32768. fit 32. Et √ce13824. fit 24. erit productus numerus √ce(32+24) id est, √ce56.

√ce 64 + √ce 27
8
------
√ce 32768 + √ce 13824

SIT multiplicanda √ce(64+√ce27.) per 2. Cubi numerorum sunt 64+√ce27. & 8. Ex 64 in 8. fiunt 512. Et ex √ce27. in 8. id est, in √ce512. fit √ce13824. quæ est 24 additaque ad 512. facit 536. Est ergo productus numerus √ce536. atque ita est. Nam √ce(64+√ce27) hoc est, √ce67. ducta in 2. hoc est, in √ce8. facit √ce536.

64 + √ce 27
8
------
512 + √ce 13824

SIT ducenda √ce(√ce64+√ʒ36+3.) in 5 Cubi numerorũ sunt √ce64+√ʒ36+3. & 125. Ex √ce64. in 125. id est, in √ce1953125. fit √ce125000000. At ex √ʒ36. in 125. id est, in √ʒ15625. fit √ʒ562500. Et ex 3. in 125 fiunt 375 Cum ergo √ce125000000. fit 500. & √ʒ562500. fit 750. erit procreatus numerus √ce1625. vt ratio postulat. Nam √ce(√ce64+√ʒ36+3) hoc est, √ce13. ducta in 5. hoc est, in √ce125. facit √ce1625.

√ce 64 + √ʒ 36 + 3
125
------
√ce 125000000 + √ʒ 562500 + 375

SI numerus per 5 multiplicandus, fuisset √ce(√ce64+√ʒ36−3.) productus fuisset numerus √ce(√ce125000000+√ʒ562500−375.) hoc est, √ce(500+750−375.) hoc est, √ce875. quod verum est. Nam √ce(√ce64+√ʒ36−3.) est √ce7. quæ ducta in 5. hoc est, in √ce125. facit √ce875.

SIT multiplicanda √ʒ(12+√ʒ6) per 6. Quadrata numerorum sunt 12+√ʒ6 & 36. Ex 12. in 36. fiunt 432. Et ex √ʒ6. in 36. hoc est, in √ʒ1296. fit √ʒ7776. Productus igitur ex multiplicatione numerus est √ʒ(432+√ʒ7776.)

12 + √ʒ 6
36
------
432 + √ʒ 7776

SIT ducenda √ʒ(13+√ʒ144) hoc est, √ʒ25. id est, 5. per 6. vbi certum est, gigni 30. Quadrata numerorum sunt 13+√ʒ144. & 36. Ex 13. in 36. fiunt 468. Et ex √ʒ144. in 36. id est, in √ʒ1296. fit √ʒ186624. Numerus ergo productus est √ʒ(468+√ʒ186624) hoc est, √ʒ900. id est, 30.

13 + √ʒ 144
36
------
468 + √ʒ 186624

SIT multiplicãda √ʒ(13+√ʒ9) per √ʒ(5+√ʒ16) hoc est, √ʒ16. id est, 4 per √ʒ9. id est, per 3. vbi constat produci 12. Quadrata numerorũ sunt 13+√ʒ9 & 5+√ʒ16. Ex √ʒ9 in √ʒ16. fit √ʒ144. Et ex √ʒ16. in 13. id est, in √ʒ169. fit √ʒ2704. Deinde ex √ʒ9. in 5. hoc est in √ʒ25. fit 5ʒ225. Et ex 5. in 13. fiunt 65. Iam √ʒ144. id est, 12. cum 65. facit 77. quibus si addantur √ʒ2704. & √ʒ225. nimirum 52. & 15 fiunt 144. Igitur √ʒ144. id est, 12. est numerus productus, vt dictum est.

13 + √ʒ 9
5 + √ʒ 16
------
√ʒ 2704 + √ʒ 144
65 + √ʒ 225
------
√ʒ 2704 + √ʒ 225 + 77

SIT rursus multiplicãda √ʒ(√ʒ1800+30)−√ʒ(√ʒ450+15) per √ʒ(√ʒ450+15.) Scribantur numeri, vt hic vides Ex √ʒ(√ʒ450+15) in √ʒ(√ʒ450+15) fit eius quadratus √ʒ450+15. præposito signo −. cũ + in − ducatur. Ex √ʒ(√ʒ1800+30) in √ʒ(√ʒ450+15) fit √ʒ810000+√ʒ1620000+450. si nimirũ quadrata

√ʒ(√ʒ1800+30)−√ʒ(√ʒ450+15)
√ʒ(√ʒ 450+15) √ʒ(√ʒ450+15)
------
+√ʒ4050000+450−√ʒ450+15
√ʒ810000+√ʒ4050000
------
√ʒ 810000+√ʒ16200000+450

nume-

numerorum inter se multiplicentur: hoc est, $1350+\sqrt{1620000}$. quia $\sqrt{810000}$. æquiualet 900. qui numerus additus ad 450. facit 1350. & præposito signo $\sqrt{}$. erit productus numerus $\sqrt{(1350+\sqrt{1620000})}$. Est autem radix huius Binomij $1350+\sqrt{1620000}$. numerus $\sqrt{900}+\sqrt{450}$. vt ex cap. 28. constabit: hoc est, $30+\sqrt{450}$. ex qua si dematur prior productus $-\sqrt{450}+15$. factus ex $\sqrt{(\sqrt{450}+15)}$ in se, relinquetur numerus 15. vt in hac formula cernis. qui quidem gignitur ex multiplicatione $\sqrt{(\sqrt{1800}+30)}-\sqrt{(\sqrt{450}+15)}$ in $\sqrt{(\sqrt{450}+15)}$

$$\begin{array}{c} 30+\sqrt{450} \\ 15-\sqrt{450} \\ \hline 15 \end{array}$$

HAC ratione iure fieri multiplicationem, perspicuum fiet, hoc altero exemplo proposito. vbi fit multiplicatio 1. in 3. productusque numerus est 3. Nam ex $\sqrt{(\sqrt{9}+6)}$ in $\sqrt{(\sqrt{9}+6)}$ fit eius quadratus $\sqrt{9}+6$. præposito signo $-$, cum $+$ in $-$ ducatur. Deinde ex $\sqrt{(\sqrt{4}+14)}$ in $\sqrt{(\sqrt{9}+6)}$ fit numerus $\sqrt{144}$. id est, 12. vt in præcedenti formula vides. Nam $\sqrt{36}$. est 6. & $\sqrt{144}$. est 12. & $\sqrt{1764}$. est 42. quæ omnes cum 84. faciunt 144. & præposito signo $\sqrt{}$. fit productus $\sqrt{144}$. nimirum 12. à quo si detrahatur alter productus $\sqrt{9}+6$. nimirum 9, supererunt 3. pro toto numero producto.

$$\begin{array}{c} \sqrt{(\sqrt{4}+14)}-\sqrt{(\sqrt{9}+6)} \\ \sqrt{(\sqrt{9}+6)}\quad \sqrt{(\sqrt{9}+6)} \\ \hline +\sqrt{144}+84-\sqrt{9}+6 \\ \sqrt{36}+\sqrt{1764} \\ \hline \sqrt{144}-9 \end{array}$$

SIT quoque multiplicanda $\sqrt{(6+\sqrt{9})}$ per numerum compositum $\sqrt{4}+\sqrt{16}$. Quadratum prioris numeri est $6+\sqrt{9}$. posterioris autem $20+\sqrt{256}$. vt patet, si $\sqrt{4}+\sqrt{16}$. ducatur in $\sqrt{4}+\sqrt{16}$. Multiplicatione igitur facta, vt hic vides, erit numerus productus $\sqrt{(\sqrt{9216}+\sqrt{3600}+\sqrt{2304}+120)}$, hoc est, $\sqrt{324}$. nimirum 18.

$$\begin{array}{c} 6+\sqrt{9} \\ 20+\sqrt{256} \\ \hline \sqrt{9216}+\sqrt{2304} \\ 120+\sqrt{3600} \\ \hline \sqrt{9216}+\sqrt{3600}+\sqrt{2304}+120 \end{array}$$

MVLTIPLICETVR $\sqrt{(7+\sqrt{4})}$ hoc est $\sqrt{9}$. nimirum 3. per $\sqrt{9}$. hoc est, per 3. vbi perspicuum est, numerum gigni 9. Quadrata numerorum sunt $7+\sqrt{4}$. & 9. Ex $\sqrt{4}$ in 9. id est, in $\sqrt{81}$. fit $\sqrt{324}$. Et ex 7. in 9. fiunt 63. Igitur productus numerus erit $\sqrt{(63+\sqrt{324})}$ hoc est, $\sqrt{81}$. siue 9. vt diximus.

$$\begin{array}{c} 7+\sqrt{4} \\ 9 \\ \hline 63+\sqrt{324} \end{array}$$

MVLTIPLICETVR $\sqrt{(12+\sqrt{6})}$ per $\sqrt{12}+\sqrt{6}$. Quadrata numerorũ sunt $12+\sqrt{6}$. & $18+\sqrt{288}$. vt constat, si $\sqrt{12}+\sqrt{6}$. ducatur in se. (Producitur enim numerus iste $12+\sqrt{288}+6$. constat autem 12. & 6. facere 18.) Ex $\sqrt{288}$. in $\sqrt{6}$. fit $\sqrt{1728}$. Et ex $\sqrt{288}$. in 12. hoc est, in $\sqrt{144}$ fit $\sqrt{41472}$. Et ex $\sqrt{6}$. in 18. id est, in $\sqrt{324}$. fit $\sqrt{1944}$. Ac tandem ex 12. in 18. fiunt 216. Itaque totus numerus productus erit $\sqrt{(216+\sqrt{1944}+\sqrt{41472}+\sqrt{1728})}$

$$\begin{array}{c} 12+\sqrt{6} \\ 18+\sqrt{288} \\ \hline \sqrt{41472}+\sqrt{1728} \\ 216\ \sqrt{1944} \\ \hline 216+\sqrt{1944}+\sqrt{41472}+\sqrt{1728} \end{array}$$

*Multiplicatio radicu numeri compositi, vnà cũ radice numeri diminuti simul, in seipsam.*

CÆTERVM quando radix zensica numeri compositi, vna cum radice zensica numeri diminuti similis in seipsam multiplicanda proponitur. quod non raro in Binomijs, ac residuis (de quibus in cap. 27. & 28.) accidit, ita agemus. Sit in se multiplicanda $\sqrt{(12+\sqrt{6})}+\sqrt{(12-\sqrt{6})}$ Scribatur numerus bis, vt in multiplicatione fieri solet. Et quoniam ex propos 4. lib. 2. Eucl. quadrata partium $\sqrt{(12+\sqrt{6})}$ & $\sqrt{(12-\sqrt{6})}$ vna cum eo, quod ex vna parte $\sqrt{(12-\sqrt{6})}$ bis fit in alteram partem $\sqrt{(12+\sqrt{6})}$ æqualia sunt ei, qui fit ex numero in se: Sunt autem quadrata partium $12+\sqrt{6}$. & $12-\sqrt{6}$. quæ simul faciunt 24. (Nã $+\sqrt{6}$. & $-\sqrt{6}$. se mutuo tollunt) Et ex vna parte in alterã fit $\sqrt{138}$ (quia 6. quadratum $\sqrt{6}$. demptum ex 144. quadrato numeri 12. relinquit 138 cui numero præfigendum est signum $\sqrt{}$) cuius duplum est $\sqrt{552}$. Productus ergo numerus est $24+\sqrt{552}$. Atque radix huius producti est etiam summa duarum radicum $\sqrt{(12+\sqrt{6})}$ & $\sqrt{(12-\sqrt{6})}$ in vnam summam collectarum. Nam quando summa duorum numerorum in se ducitur, radix quadrata producti numeri est eorundem duorum numerorum summa. Ac proinde cum duæ hæ radices propositæ simul in se ductæ faciant $24+\sqrt{552}$. erit huius producti radix, nimirum $\sqrt{(24+\sqrt{552})}$ illarum duarum radicum summa.

*Summa ex radice numeri compositi, & radice numeri diminuti similis collecta.*

$$\begin{array}{c} \sqrt{(12+\sqrt{6})}+\sqrt{(12-\sqrt{6})} \\ \sqrt{(12+\sqrt{6})}+\sqrt{(12-\sqrt{6})} \\ \hline 12+\sqrt{6}\quad +\quad 12-\sqrt{6} \\ \sqrt{138} \\ \sqrt{138} \\ \hline \sqrt{552} \\ 24+\sqrt{552} \end{array}$$

ALIVD exemplum in numeris rationalibus. Sit in se multiplicanda $\sqrt{(10+\sqrt{36})}+\sqrt{(10-\sqrt{36})}$ hoc est, 6. in se: vbi numerus procreatur 36. Quadrata partium sunt $10+\sqrt{36}$. & $10-\sqrt{36}$. quæ simul additæ faciunt 20. Et ex vna parte in alteram fit $\sqrt{64}$. quæ bis sumpta facit $\sqrt{256}$. id est, 16. atque adeo productus numerus est $20+16$. hoc est, 36. vt par est. Atque radix huius numeri, nimirum 6. est summa quoq; ex duabus illis radicibus collecta, vt manifestum est.

$$\begin{array}{c} \sqrt{(10+\sqrt{36})}+\sqrt{(10-\sqrt{36})} \\ \sqrt{(10+\sqrt{36})}+\sqrt{(10-\sqrt{36})} \\ \hline 10+\sqrt{36}\quad +\quad 10-\sqrt{36} \\ \sqrt{64} \\ \sqrt{64} \\ \hline \sqrt{256} \end{array}$$

Productus $20+\sqrt{256}$. hoc est, 36.

PRÆTEREA quando multiplicandus est numerus compositus ex radice simplici, & radice compositi numeri, hoc est, ex radice simplici, & radice Vniuersali, per numerum diminutum similem: locum etiam habet compendium cap. 23. traditum ante exempla diuisionis, ad finem nimirum exemplorum multiplicationis.

Vt si

Vt si ducendus sit numerus √ȝ20 + √ȝ (20 — √ȝ5) in numerum √ȝ20 — √ȝ5) scribatur vnus numerus sub alio, vt hic vides. Nam si 20 — √ȝ5 quadratum posterioris particulæ numeri compositi, vel diminuti, detrahatur ex 20. quadrato particulæ prioris, reliquus erit numerus 0 + √ȝ5. vt in hac altera formula cernitur. quia 20. ex 20. nil relinquunt: at — √ȝ5. ex + √ȝ0. (quoniam diuersa signa mutant speciem, fitque additio) remanet + √ȝ5. vt in Subtractione radicum simplicium diximus. atque ita ex √ȝ20 + √ȝ (20 — √ȝ5.) in √ȝ (20 — √ȝ0 + √ȝ5) producitur √ȝ5.

√ȝ 20 + √ȝ (20 — √ȝ 5)
√ȝ 20 — √ȝ (20 — √ȝ 5)
√ȝ 5

20 + √ȝ 0
20 — √ȝ 5
0 + √ȝ 5

IMMO hoc compendio vti etiam licebit, quando multiplicandus est numerus compositus ex numero Cossico, & radice numeri Cossici compositi vel diminuti, per numerum diminutum similem. Vt si ducendus sit numerus 1/2 ȝ + √ȝ (1/4 ȝȝ + 1ȝ) in 1/2 ȝ — √ȝ (1/4 ȝȝ + 1ȝ.) Scripto vno numero sub alio, vt hic cernis, detrahitur quadratum 1/4 ȝȝ + 1ȝ posterioris particulæ ex 1/4 ȝȝ. quadrato particulæ prioris, vt hæc altera formula ostendit. Nam reliquus numerus 0 — 1ȝ. erit is, qui producitur ex vno numero in alium.

1/2 ȝ + √ȝ (1/4 ȝȝ + 1ȝ)
1/2 ȝ — √ȝ (1/4 ȝȝ + 1ȝ)
— 1 ȝ

1/4 ȝȝ + 0 ȝ
1/4 ȝȝ + 1 ȝ
0 — 1 ȝ

SIC etiam ex 1/2 ȝ + √ȝ (1/4 ȝȝ — 1ȝ) in 1/2 ȝ — √ȝ (1/4 ȝȝ — 1ȝ) gignetur numerus 1ȝ. vt aliæ duæ hæ appositæ formulæ docent.

1/2 ȝ + √ȝ (1/4 ȝȝ — 1 ȝ)
1/2 ȝ — √ȝ (1/4 ȝȝ — 1 ȝ)
1 ȝ

1/4 ȝȝ + 0 ȝ
1/4 ȝȝ — 1 ȝ
0 + 1 ȝ

DIVISIO radicum huiusmodi fit hoc modo. Tam numerus diuidendus, quam diuidens reducatur ad quadratum: Deinde diuisio fiat, vt supra explicatum est. Radix enim producti numeri erit Quotiens. vt exempla probabunt. quemadmodum, vt in cap. præcedenti diximus, ex diuisione √ȝ12. per √ȝ3. exit √ȝ4. radix nimirum zensica numeri 4. qui fit ex diuisione quadrati 12. per quadratum 3. Item sicut ex diuisione √ß 30. per √ß 5. fit Quotiens √ß 6. radix videlicet surdesolida numeri 6. ex diuisione surdesolidi 30. per surdesolidum 5. procreati. *Diuisio radicum numerorum compositorum.*

SIT diuidenda √ȝ (13 + √ȝ7) per √ȝ5. Quadrata numerorum sunt 13 + √ȝ7. & 5. Ex diuisione 13. per 5. exeunt 2 3/5. Et ex √ȝ7. per 5. id est, per √ȝ25. exeunt √ȝ 7/25. Totus ergo Quotiens est √ȝ (2 3/5 + √ȝ 7/25.)

13 + √ȝ 7 (2 3/5 + √ȝ 7/25
5 √ȝ 25

SIT diuidenda √ȝ (432 + √ȝ7776) per 6. Quadrata numerorum sunt 432 + √ȝ7776. & 36. Diuisis 432. per 36. exeunt 12. & diuisa √ȝ7776. per 36. id est, per √ȝ1296. exit √ȝ6. Quotiens ergo totus erit √ȝ (12 + √ȝ6.)

1
17 153
432 + √ȝ 7776 (12 + √ȝ 6.
366 1296
3

SIT diuidenda √ȝ (√ȝ588 + √ȝ34848) per √ȝ (12 + √ȝ8) Quadrata numerorum sunt 588 + √ȝ34848. & 12 + √ȝ8. Quoniam diuisor est numerus compositus, multiplicandus erit per 12 — √ȝ8. mutato signo + in —. vt supra cap. 23. dictum est: vt fiat nouus diuisor √ȝ136. Quod si per eundem numerum 12 — √ȝ8. multiplicetur diuidendus numerus, fiet nouus diuidendus √ȝ (6528 + √ȝ332928.) Fit enim numerus productus √ȝ (7065 + √ȝ5018112 — √ȝ2765952 — √ȝ278784) qui reducitur ad √ȝ (6528 + √ȝ332928) quia radix numeri 278784. est 528. quæ detracta ex 7056. relinquit 6528. Et detracta √ȝ2765952. ex √ȝ5018112. cũ sint commẽsurabiles in proportione 64/49. relinquit √ȝ332928. cui apponendum est signum + maioris numeri. Itaq; si diuidatur nouus diuidendus √ȝ (6528 + √ȝ332928) per nouum diuisorem 136. fiet Quotiens √ȝ 48 + √ȝ18.) Diuisis namq; 6528 per 136. exeunt 48 Et diuisa √ȝ 332928. per 136. hoc est, per √ȝ18496. exit √ȝ18. atq; adeo √ȝ (48 + √ȝ18) Quotiẽs erit diuisionis propositæ.

HOC exemplum quia pulchrum est, & subobscurum, libet examinare per multiplicationem. Igitur necesse est, numerum diuisum (√ȝ588 + √ȝ34848) redire, si Quotiens inuentus √ȝ (48 + √ȝ18) in diuisorem √ȝ (12 + √ȝ8) ducatur. Fit autem ex hac multiplicatione numerus (√ȝ576 + √ȝ2592 + √ȝ18432 + √ȝ144) Quod si √ȝ144. addatur ad 576. fiet summa 588. Et si simul addantur √ȝ2592. & √ȝ18432. quæ commensurabiles sunt in proportione 8/1. fiet √ȝ34848.

DIVIDATVR item √ȝ15. per √ȝ (3 + √ȝ5) Vt simplex diuisor reperiatur, ducemus √ȝ (3 + √ȝ5 in √ȝ (3 — √ȝ5.) fietq; diuisor √ȝ4. nouus. Quod si diuidendus numerus √ȝ15. ducatur quoque in √ȝ (3 — √ȝ5.) gignemus nouum diuidendum √ȝ (45 — √ȝ1125) Quadratum huius numeri diuidendi est 45 — √ȝ1125. Noui vero diuisoris Quadratũ est 4. Si ergo partiamur 45. per 4 fit Quotiens 11 1/4. Et si diuidamus — √ȝ1125. per 4. hoc est, per √ȝ16. fit Quotiens — √ȝ70 5/16. Totus igitur Quotiens est √ȝ (11 1/4 — √ȝ70 5/16)

DIVIDAMVS 20. per √ȝ(10 − √ȝ5.) Multiplicetur vterque numerus per √ȝ(10 + √ȝ5.) vt fiat nouus diuidendus √ȝ(4000 + √ȝ800000) nouus autem diuisor √ȝ95. Quadrata horum numerorum sunt 4000 + √ȝ800000. & 95. Si igitur partiamur 4000. per 95. exibunt $42\frac{2}{19}$. At ex diuisione √ȝ800000. per 95. id est, per √ȝ9025. prodit √ȝ$88\frac{224}{361}$. Quotiens ergo propositæ diuisionis est √ȝ($42\frac{2}{19}$ + √ȝ$88\frac{224}{361}$.)

DIVIDAMVS √ȝ(4 + √ȝ25) per √ȝ(1 + √ȝ9) hoc est, √ȝ9. per √ȝ4. siue 3. per 2. vbi Quotiens est $1\frac{1}{2}$. Multiplicetur tam diuidendus, quam diuisor, per √ȝ(1 − √ȝ9) vt fiat nouus diuidendus √ȝ(4 + √ȝ25 − √ȝ144 − √ȝ225.) & nouus diuisor √ȝ − 8. Quadrata horum numerorum sunt 4 + √ȝ25 − √ȝ144 − √ȝ225. & − 8. Ex diuisione 4. per − 8. fit Quotiens − $\frac{1}{2}$. Et ex diuisione √ȝ25. per − 8. id est, per √ȝ − 64. fit Quotiens √ȝ − $\frac{25}{64}$. vel (quod idem est) − √ȝ$\frac{25}{64}$. Et ex diuisione − √ȝ144. per − 8. id est, per − √ȝ64. exit √ȝ + $2\frac{16}{64}$. vel (quod idem est) + √ȝ$2\frac{16}{64}$. Et ex diuisione − √ȝ225. per − 8 hoc est, per − √ȝ64 fit Quotiens + √ȝ$3\frac{33}{64}$. Quibus Quotientibus in ordinem redactis, erit totus Quotiens √ȝ(√ȝ$3\frac{33}{64}$ + √ȝ$2\frac{16}{64}$ − √ȝ$\frac{25}{64}$ − $\frac{1}{2}$.) qui æquiualet √ȝ$2\frac{1}{4}$. hoc est, $1\frac{1}{2}$. vt diximus. Nam √ȝ$3\frac{33}{64}$. hoc est, √ȝ$\frac{225}{64}$. est $\frac{15}{8}$. & √ȝ$2\frac{16}{64}$, siue √ȝ$\frac{144}{64}$. est $\frac{12}{8}$ quæ cum priori $\frac{15}{8}$ facit $\frac{27}{8}$. Deinde √ȝ$\frac{25}{64}$. est $\frac{5}{8}$. quæ cum $\frac{1}{2}$. hoc est, cum $\frac{4}{8}$ facit $\frac{9}{8}$. atque $\frac{9}{8}$. ex $\frac{27}{8}$ relinquunt $\frac{18}{8}$. siue $2\frac{1}{4}$ atque radix huius numeri est Quotiens supra inuentus, nimirum $1\frac{1}{2}$.

IMMO ex diuisione √ȝ(4 + √ȝ25 − √ȝ144 − √ȝ225) per √ȝ − 8. prouenire $1\frac{1}{2}$. ita quoque fiet manifestum. Ex 4. & √ȝ25. fiunt 9. Et ex − √ȝ144 − √ȝ225 fiunt − 27. Faciunt autem − 27. cum + 9. numerum − 18. Igitur numerus diuidendus est √ȝ − 18. & diuisor √ȝ − 8. vbi Quotiens fit √ȝ$2\frac{1}{4}$. hoc est. $1\frac{1}{2}$.

HOC exemplum ita quoque proponi potest, vt dicamus, diuidendam esse √ȝ(4 + √ȝ25) per √ȝ(√ȝ9 + 1) vbi iterum diuiduntur 3. per 2. Et si tam diuidendus, quam diuisor multiplicetur per √ȝ(√ȝ9 − 1) fiet nouus diuidendus numerus √ȝ(√ȝ144 + √ȝ225 − 4 − √ȝ25.) & nouus diuisor √ȝ8. Quadrata horum numerorum sunt √ȝ144 + √ȝ225 − 4 − √ȝ25. & 8. Ex diuisione autem √ȝ144. per 8 id est, per √ȝ64 fit Quotiens √ȝ$2\frac{16}{64}$. Et ex diuisione √ȝ225. per 8. id est, per √ȝ64. fit Quotiens √ȝ$3\frac{33}{64}$. Et ex diuisione − 4. per 8. fit Quotiens − $\frac{1}{2}$. Et ex diuisione − √ȝ25. per 8. id est, per √ȝ64. fit Quotiens − √ȝ$\frac{25}{64}$ ita vt totus Quotiens sit idem omnino, qui prius, nimirũ √ȝ(√ȝ$3\frac{33}{64}$ + √ȝ$2\frac{16}{64}$ − √ȝ$\frac{25}{64}$ − $\frac{1}{2}$) De industria autem interdum longior sum in exemplis expediendis, vt ex ijs difficultates, quæ in radicibus numerorum compositorum occurrere solent, discas superare.

DIVIDAMVS quoque √ce(√ce32768 + √ce13824) per 2. Cubi numerorum sunt √ce32768 + √ce13824. & 8. Ex diuisione √ce32768. per 8. hoc est, per √ce512. fit Quotiens √ȝ64. Et ex diuisione √ce13824. per 8. id est. per √ce512. fit Quotiẽs √ce27. Totusq; Quotiẽs erit √ce(√ce64 + √ce27) hoc est, √ce7.

*Additio radicum numerorum compositorum.* DENIQVE sit diuidenda √ȝ(33 + √ȝ9) per √ȝ(3 + √ȝ1) hoc est, 6. per 2. vbi Quotiens est 3. Multiplicetur vterq; numerus per √ȝ(3 − √ȝ1) vt fiat nouus diuidendus √ȝ(99 + √ȝ81 − √ȝ1089 − √ȝ9) & nouus diuisor √ȝ(9 − 1.) hoc est, √ȝ8. Quadrata horum numerorum sunt 99 + √ȝ81 − √ȝ1089 − √ȝ9 & 8. Ex diuisione 99 per 8 fit Quotiens $12\frac{3}{8}$. Ex diuisione √ȝ81. per 8. id est, per √ȝ64. fit Quotiens √ȝ$1\frac{17}{64}$. Ex diuisione − √ȝ1089. per 8. id est, per √ȝ64. fit Quotiens − √ȝ$17\frac{1}{64}$. Ac tandem ex diuisione − √ȝ9. per 8. hoc est, per √ȝ64. fit Quotiens − √ȝ$\frac{9}{64}$. Eritque totus Quotiens √ȝ($12\frac{3}{8}$ + √ȝ$1\frac{17}{64}$ − √ȝ$17\frac{1}{64}$ − √ȝ$\frac{9}{64}$) hoc est, 3. Nam si ad $12\frac{3}{8}$. addatur √ȝ$1\frac{17}{64}$. hoc est, $\frac{9}{8}$. fient $12\frac{12}{8}$. ex quibus si tollantur √ȝ$17\frac{1}{64}$. & √ȝ$\frac{9}{64}$. hoc est, $\frac{33}{8}$. & $\frac{3}{8}$. relinquentur 9. Est ergo Quotiens √ȝ9. id est. 3.

ADDITIO, & subtractio radicum numerorum compositorum commode plerunque addi non possunt, vel vna ab altera subtrahi, nisi per interpositionem signi + vel −. vt cap. 22. annotauimus. Quando tamen addenda est huiusmodi radicum aliqua ad similem, mutato signo + in −. vel − in +. commodissime inter se addentur, si illæ radices per signum + connectantur, & totum illud aggregatum in se ducatur, vt paulo ante monstratum est. Nam √ȝ huius producti erit summa duarum radicum propositarum. Vt si addendæ sint hæ duæ radices, √ȝ(12 + √ȝ6) & √ȝ(12 − √ȝ6) ducemus hoc compositum √ȝ(12 + √ȝ6) + √ȝ(12 − √ȝ6) in seipsum, produceturque numerus 24 + √ȝ552. vt supra diximus. Huius ergo radix quadrata, nimirum √ȝ(24 + √ȝ552.) erit summa duarum radicum propositarum.

EODEM modo supra, harum radicum, √ȝ(10 + √ȝ36) & √ȝ(10 − √ȝ36) summa inuenta fuit, √ȝ(20 + √ȝ256) hoc est, √ȝ36. id est, 6.

ITEM sint addendæ √ȝ(8 + √ȝ32) & √ȝ(8 − √ȝ32.) Sic stabit exemplum ad multiplicationem. Si ergo producto numero præfiges signum √ȝ. erit summa duarum radicum dictarum, √ȝ(16 + √ȝ128.)

√ȝ(8 + √ȝ32) + √ȝ(8 − √ȝ32)
√ȝ(8 + √ȝ32) + √ȝ(8 − √ȝ32)
8 + √ȝ32 + 8 − √ȝ32
√ȝ32
√ȝ32
√ȝ128
Productus. 16 + √ȝ128

ITEM sit addenda √ȝ(2 + √ȝ3) ad √ȝ(2 − √ȝ3.) Sic instituetur multiplicatio. fietque productus, 4 + √ȝ4. hoc est 6. Igitur summa duarum radicum quæsita erit √ȝ6.

√ȝ(2 + √ȝ3) + √ȝ(2 − √ȝ3)
√ȝ(2 + √ȝ3) + √ȝ(2 − √ȝ3)
2 + √ȝ3 + 2 − √ȝ3
√ȝ1
√ȝ1
√ȝ4
Productus. 4 + √ȝ4. hoc est, 6.

Huiusmodi radicum additio commode etiam sic fiet. Multiplicetur quadratum vnius radicis in quadratum alterius. quod breuissime fiet, si in alterutra radice, quadratũ posterioris particulæ dematur ex quadrato particulæ prioris, & residui radix adijciatur ad priorem particulam, summaq; hæc duplicetur, id est, per 2. multiplicetur. Radix enim huius producti dabit summã quæsitã.

Vt in

Vt in primo exemplo, summa √ʒ (12 + √ʒ 6) & √ʒ (12 − √ʒ 6) ita fiet. Dempto quadrato 6 posterioris particulæ ex 144. quadrato particulæ prioris, supersunt 138. Si igitur addatur √ʒ 138. ad 12. priorem particulam, fiet summa 12 + √ʒ 138. quæ ducta in 2. faciet summam quæsitam √ʒ (24 + √ʒ 552) vt prius.

IN secundo autem exemplo, summa √ʒ (10 + √ʒ 36) & √ʒ (10 − √ʒ 36) ita nota fiet. Dempto quadrato 36. posterioris particulæ ex 100. quadrato prioris particulæ, remanent 64. Si ergo √ʒ 64. addes ad priorem particulam 10. facies 10 + √ʒ 64. quæ summa ducta in 2. faciet summam desideratam √ʒ (20 + √ʒ 256) hoc est, √ʒ 36. hoc est, 6. veluti prius.

IN tertio denique exemplo, summam radicum √ʒ (2 + √ʒ 3) & √ʒ (2 — √ʒ 3) sic cognoscemus. Dempto quadrato 3. posterioris particulæ ex 4. quadrato particulæ prioris, reliqua fit 1. Si ergo addemus √ʒ 1 ad 2. priorem particulam, faciemus 2 + √ʒ 1. hoc est, 3. Duplum est 6. Ergo √ʒ 6. est summa optata, eadem quæ prius.

QVANDO addendæ sunt duæ radices numerorum compositorum dissimilium, quorum videlicet numeri particularum non omnes æquales sunt: addi poterunt nonnunquam per propos. 4. lib. 2. Eucl. tum scilicet, cum numerus ex vna radice in alteram bis multiplicata productus reduci potest ad simplicem numerum, vel ad numerum compositum duarum particularum. hoc scilicet modo. Sit addenda √ʒ (10 + √ʒ 36) ad √ʒ (11 + √ʒ 25) hoc est, 4. ad 4. vbi summa est 8. Quadrata, duarum radicum per signum + connexa faciunt 10 + √ʒ 36 + 11 + √ʒ 25. Productus numerus ex vna radice in alteram, (hoc est, si quadratum vnius in quadratum alterius ducatur, & producto præfigatur signum √ʒ. vt in multiplicatione radicum simplicium quadratarum fieri solet) est √ʒ (110 + √ʒ 4356 + √ʒ 2500 + √ʒ 900) vt in subiecta formula apparet. cuius duplum (si nimirum per 2. multiplicetur) √ʒ (440 + √ʒ 69696 + √ʒ 40000 + √ʒ 14400) reducitur ad √ʒ 1024. hoc est, ad 32. Si igitur addantur 32. ad duo superiora quadrata, erit tota summa √ʒ (10 + √ʒ 36 + √ʒ 11 + √ʒ 25 + 32.) hoc est, √ʒ 64. siue 8. vt ratio postulat.

√ʒ (10 + √ʒ 36)
√ʒ (11 + √ʒ 25)
———————
√ʒ 2500 + √ʒ 900
110 + √ʒ 4356
———————
√ʒ (110 + √ʒ 4356 + √ʒ 2500 + √ʒ 900.)

SIT rursum addenda √ʒ (12 + √ʒ 108) ad √ʒ (2 + √ʒ 3) Summa quadratorum est 12 + √ʒ 108 + 2 + √ʒ 3. Productus numerus ex vna radice in alteram est √ʒ (42 + √ʒ 1728) quæ radix est √ʒ 24 + √ʒ 18 (vt ex cap. 27. patebit.) cuius duplum, nimirum √ʒ 96 + √ʒ 72. additum ad prædicta duo quadrata 12 + √ʒ 108 + 2 + √ʒ 3. hoc est, ad 14 + √ʒ 108 + √ʒ 3. hoc est, ad 14 + √ʒ 147. (nam √ʒ 108. & √ʒ 3. sunt commensurabiles, conficiuntque √ʒ 147) fiet tota summa √ʒ (14 + √ʒ 147 + √ʒ 96 + √ʒ 72.)

SIT quoque addenda √ʒ (√ʒ 2 + 1) ad √ʒ (√ʒ 162 + 9.) Summa quadratorum est √ʒ 2 + 1 + √ʒ 162 + 9. Ex vna radice in alteram fit √ʒ (27 + √ʒ 648) quæ radix valet 3 + √ʒ 18. (quo pacto autem ex hoc quadrato 27 + √ʒ 648. erui debeat radix, cap. 27. docebimus) cuius duplum 6 + √ʒ 72. additum ad prædictam quadratorum summam facit √ʒ 2 + 1 + √ʒ 162 + 9 + 6 + √ʒ 72 hoc est √ʒ 512 + 16. Nam √ʒ 162. & √ʒ 2. commensurabiles sunt, faciuntque √ʒ 200. Item √ʒ 200. & √ʒ 72. commensurabiles quoque sunt, faciuntque √ʒ 512. Summa ergo quæsita erit √ʒ (√ʒ 512 + 16.)

SED quando productus numerus ex vna radice in alteram non potest reduci ad numerum compositum, quando videlicet radicem, quæ sit vel radix simplex, vel numerus compositus, non habet, fieret hoc modo summa magis perplexa, & obscura. Quare commodius fiet tunc additio per signum + interpositum. V. g. si addenda sit √ʒ (2 + √ʒ 3) ad √ʒ (√ʒ 12 + 2) fit ex vna in alteram √ʒ (√ʒ 48 + √ʒ 36 + 4 + √ʒ 12) hoc est, √ʒ (√ʒ 108 + 10) propterea quod √ʒ 48. & √ʒ 12. commensurabiles sunt, conficiuntque √ʒ 108. ac √ʒ 36. & 4. efficiunt 10. Sed quia numerus quadratus √ʒ 108 + 10. radicem habet √ʒ (√ʒ 27 + √ʒ 2) + √ʒ (√ʒ 27 − √ʒ 2.) vt ex cap. 27. constabit. quæ quidem composita est ex duabus radicibus duorum numerorum compositorum. Efficiunt autem hæ duæ radices summam √ʒ (√ʒ 27 + √ʒ 2 + √ʒ 27 − √ʒ 2 + 10. vt in hac formula apparet. Atq; hæc summa reducitur ad hanc, √ʒ (√ʒ 108 + 10) erit hæc summa radix huius numeri √ʒ 108 + 10. quod patet, quia √ʒ (√ʒ 108 + 10) in se ducta facit √ʒ 108 + 10. Hæc autem radix √ʒ (√ʒ 108 + 10) duplicata, quod fiet, si eius quadratum √ʒ 108 + 10. ducatur in 4. quadratum binarij; Hæc, inquam, radix duplicata facit √ʒ (√ʒ 1728 + 40) quæ cum duobus quadratis radicum propositarum, nimirum cum 2 + √ʒ 3. & √ʒ 12 + 2. faciet radicum summam √ʒ (√ʒ 1728 + 40) + 2 + √ʒ 3 + √ʒ 12 + 2) sed quia 2 + √ʒ 3 + √ʒ 12 + 2. faciunt 4 + √ʒ 27. erit summa √ʒ (√ʒ 1728 + 40) + √ʒ 27 + 14) quæ magis intricata est, quam si summa dicatur esse √ʒ (2 + √ʒ 3) + √ʒ (√ʒ 12 + 2.) Eadem illa summa intricata facilius reperietur, sine inuentione radicis numeri √ʒ 108 + 10. cuius radix, nimirum √ʒ (√ʒ 108 + 10.) producta fuit ex vna radice proposita in alteram. Nam duplum huius numeri, √ʒ (√ʒ 1728 + 40) cum duobus quadratis radicum propositarum, conficiet ex propos. 4 lib. 2. Eucl. duarum radicum summam eandem √ʒ (√ʒ 1728 + 40) + √ʒ 27 + 14.)

√ʒ (√ʒ 27 + √ʒ 2) + √ʒ (√ʒ 27 — √ʒ 2)
√ʒ (√ʒ 27 + √ʒ 2) + √ʒ (√ʒ 27 — √ʒ 2)
———————
√ʒ 27 + √ʒ 2 + √ʒ 27 — √ʒ 2
√ʒ 25. hoc est, 5
√ʒ 25. hoc est, 5
———————
√ʒ 100. id est, 10
———————
√ʒ (√ʒ 27 + √ʒ 2 + √ʒ 27 — √ʒ 2 + 10.

QVANDO duæ huiusmodi radices sunt commensurabiles, poterunt inter se addi per regulam trium, veluti radices simplices. Vt si addenda proponatur √ʒ (2 + √ʒ 3) ad √ʒ (8 + √ʒ 48.) Diuisa hac per illam, (inuento videlicet nouo diuisore √ʒ 1. & nouo diuidendo √ʒ 4.) fit Quotiens √ʒ 4. hoc est, 2. siue $\frac{2}{1}$. Habent ergo illæ radices proportionem duplam: ac proinde si fiat, Vt 1. ad 3. ita √ʒ (2 + √ʒ 3) ad aliud, inuenietur summa √ʒ (18 + √ʒ 243.)

ITEM sit addenda √ʒ (4 + √ʒ 6) ad √ʒ (8 + √ʒ 24.) Diuisa hac per illam (inuento diuisore nouo √ʒ 10. & nouo diuidendo √ʒ 20) fit Quotiens √ʒ 2. qui licet irrationalis sit, ac proinde radices propositæ sint incommensurabiles, conabimur tamen eius beneficio illas simul addere, more radicum commensurabilium. Est

ergo proportio vnius radicis ad alteram, quæ √ʒ2. ad 1. ita vt denominator proportionis sit √ʒ2/1. Et denominator 1. huius fractionis additus ad √ʒ2. denominatorem, facit √ʒ2 + 1. Quare si fiat, Vt 1. ad √ʒ2 + 1. ita √ʒ (4 + √ʒ6) ad aliud. fit √ʒ (12 + √ʒ128 + √ʒ54 + √ʒ48) pro summa duarum radicum propositarum. Nam vt in regula trium multiplicetur √ʒ2 + 1. in √ʒ (4 + √ʒ6) reducenda est √ʒ2 + 1. ad quadratum 3 + √ʒ8. hoc est, ducenda in se, atque hoc ducendum in 4 + √ʒ6. quadratum radicis √ʒ (4 + √ʒ6.) Productoque 12 + √ʒ128 + √ʒ54 + √ʒ48. præfigendum signum √ʒ.

SIT præterea addenda √ʒ (√ʒ6 — √ʒ2) ad √ʒ (√ʒ96 — √ʒ32.) Diuisa hac per illam, (inuento scilicet nouo diuisore √ʒ4. & nouo diuidendo √ʒ16.) fit Quotiens √ʒ4. hoc est, 2. estque proportio vnius radicis ad alteram dupla, cuius denominator est 2/1. Si igitur fiat, Vt 1. ad 3. ita √ʒ (√ʒ6 — √ʒ2) ad aliud: reperietur summa quæsita √ʒ (√ʒ486 — √ʒ162.)

*Subtractio radicũ numerorum compositorum.*

IAM vero si à radice numeri compositi detrahenda sit alia radix similis numeri diminuti, (quod sæpe contingit in Binomiis, ac Residuis, eorumque radicibus) fiet id hoc modo. Sit subtrahenda V. g. √ʒ (12 — √ʒ6) à √ʒ (12 + √ʒ6) Certum est, residuum esse √ʒ (12 + √ʒ6) — √ʒ (12 √ʒ6.) Scribatur ergo hoc residuum bis, & in se multiplicetur, hoc est, iuxta propos. 4. lib. 2. Euclid. ad quadrata partium 12 + √ʒ6. & 12 — √ʒ6. addatur duplum numeri — √ʒ138 qui fit ex vna parte in alteram, videlicet — √ʒ552. fietque quadratum 24. — √ʒ552. quia duo quadrata efficiunt 24. Radix igitur huius quadrati, nimirum √ʒ (24 — √ʒ552) erit id, quod relinquitur ex detractione √ʒ (12 — √ʒ6) à √ʒ (12 + √ʒ6.) Detracto enim numero ex alio numero, si reliquus numerus ducatur in se, erit radix quadrata numeri producti, numerus ille reliquus. Ac proinde cũ in dato exemplo numerus reliquus, √ʒ (12 + √ʒ6) — √ʒ (12 — √ʒ6) in se ductus faciat 24 — √ʒ552. erit √ʒ (24 — √ʒ552) numerus, qui relinquitur ex detractione √ʒ (12 — √ʒ6) à √ʒ (12 + √ʒ6.]

```
√ʒ (12 + √ʒ6) — √ʒ (12 — √ʒ6)
√ʒ (12 + √ʒ6) — √ʒ (12 — √ʒ6)
―――――――――――――――――――――――――――――
12 + √ʒ6    +    12 — √ʒ6
          — √ʒ 138
          — √ʒ 138
―――――――――――――――――――――――――――――
24 — √ʒ 552
```

ALIVD exemplum in numeris rationalibus. Sit subtrahenda √ʒ (10 — √ʒ36) ex √ʒ (10 + √ʒ36) nimirum 2. ex 4. vbi perspicuum est, reliquum numerum esse 2. Scripto numero √ʒ (10 + 36.) — √ʒ (10 — √ʒ36) qui nimirum relinquitur post detractionem √ʒ (10 — √ʒ36) ex √ʒ (10 + √ʒ36) atque eodem ducto in se, iuxta præscriptum propos. 4 lib. 2. Euclid. fiet productus numerus 20 — √ʒ256. Ergo residuum quæsitum erit √ʒ (20 — √ʒ256) hoc est, √ʒ4. siue 2. quod est propositum.

```
√ʒ (10 + √ʒ36) — √ʒ (10 — √ʒ36)
√ʒ (10 + √ʒ36) — √ʒ (10 — √ʒ36)
―――――――――――――――――――――――――――――
10 + √ʒ36.    &    10 — √ʒ36
          — √ʒ 64
          — √ʒ 64
        ―――――――――――――
20 — √ʒ 256
```

QVANDO propositæ radices huiusmodi sunt diuersæ, poterit minor à maiore subtrahi, ex præscripto propos. 7. lib. 2 Eucl. quando videlicet numerus productus ex vna radice in aliam multiplicata bis reduci potest ad numerum simplicem, vel compositum duarum particularum, hac scilicet ratione. Sit subtrahenda √ʒ (8 — √ʒ32) ex √ʒ (8 + √ʒ32.) Quadrata duarum particularum sunt 8 — √ʒ32. & 8 + √ʒ32. quæ connexa per signum +, faciunt 8 — √ʒ32 + 8 + √ʒ32. hoc est, 16. Ex vna radice in alteram fit √ʒ32. cuius duplum √ʒ128. ablatum ex 16. summa quadratorum, relinquit 16 — √ʒ128. Huius ergo numeri radix quadrata nimirum √ʒ (16 — √ʒ128) est residuum desideratum.

```
√ʒ (8 + √ʒ32)
√ʒ (8 — √ʒ32)
―――――――――――――
     √ʒ 32
```

SIT rursus auferenda √ʒ (2 + √ʒ3) ex √ʒ (12 + √ʒ108.) Summa quadratorum est 2 + √ʒ3 + 12 + √ʒ108. hoc est, 14 + √ʒ147. Nam √ʒ108. & √ʒ3. commensurabiles sunt, efficiuntque √ʒ147. Ex vna radice in alteram fit √ʒ (42 + √ʒ1728) quæ radix, vt ex cap. 28. constabit, est √ʒ24 + √ʒ18. cuius duplum √ʒ96 + √ʒ72. demptum ex prædicta quadratorum summa 14 + √ʒ147. relinquit 14 + √ʒ147 — √ʒ96. & — √ʒ72. & pposito signo √ʒ. erit residuũ subtractionis √ʒ (14 + √ʒ147 — √ʒ96. & — √ʒ72). quod idẽ est, ac 14 + √ʒ147 — √ʒ96 + √ʒ72. quia sensus est, ex 14 + √ʒ147. detrahi aggregatum ex √ʒ96. & √ʒ72. vt recte dictum sit, residuum esse 14 + √ʒ147 — √ʒ96. & — √ʒ72. Est enim sensua, non solum subtrahi √ʒ96 sed insuper √ʒ72. subduci. Hoc autem perspicue cernitur, si numerus rationalis detrahendus sit, vt √ʒ100 + √ʒ4. ex 14 + √ʒ147. vbi certum est, subtrahi 10 + 2. hoc est, 12. residuumque esse 2 + √ʒ147. quod æquiualet huic, 14 + √ʒ147 — √ʒ100 + √ʒ4. siue huic, 14 + √ʒ147 — √ʒ100. & — √ʒ4. vt perspicuum est.

```
   12 + √ʒ 108
    2 + √ʒ 3
―――――――――――――――――――――――
    + √ 432 + √ʒ 324
 24 + √ 432
―――――――――――――――――――――――
√ʒ (42 + √ʒ 1728)
```

QVOD si productus numerus ex vna radice in alteram non habeat radicem, numerum compositum duarum particularum, facienda est subtractio per signum —. Vt si subtrahenda sit √ʒ (2 + √ʒ3) ex √ʒ (√ʒ12 + 2.) Ex ductu vnius radicis in alteram fit √ʒ (√ʒ108 + 10) quæ, vt ex cap. 28. patebit, æquiualet huic, √ʒ (√ʒ27 + √ʒ2) + √ʒ (√ʒ27 — √ʒ2.) Quare commodius dicetur residuum subtractionis esse √ʒ (√ʒ12 + 2) — √ʒ (2 — √ʒ3.)

QVANDO denique huiusmodi radices sunt commensurabiles, subtrahetur vna ab altera per regulam trium, vt de radicibus simplicibus diximus. Sit enim subtrahenda √ʒ (2 + √ʒ3.) ex √ʒ (8 + √ʒ48.) Diuisa hac per illam, (inuento nimirum nouo diuisore √ʒ1. & nouo diuidendo √ʒ4.) fit Quotiens √ʒ4. hoc est 2. ita vt proportio earũ sit dupla, cuius denominator 2/1. Si ergo fiat, vt 1 ad 1. ita √ʒ (2 + √ʒ3) ad aliud. producetur √ʒ (2 + √ʒ3) pro residuo subtractionis.

ITEM sit auferenda √ʒ (4 + √ʒ6) ex √ʒ (8 + √ʒ24.) Diuisa hac per illam, (inuento scilicet nouo diuisore √ʒ10. & nouo diuidẽdo √ʒ20.) fit Quotiẽs √ʒ2. ita vt denominator proportionis maioris ad minorem sit √ʒ2/1.

fit √ȝ 4. Si ergo fiat, vt 1. ad √ȝ 2 — 1. ita √ȝ (4 + √ȝ 6) ad aliud, prodibit residuum Subtractionis √ȝ (12 + √ȝ 54 — √ȝ 128 — √ȝ 48.) Nam vt in regula trium multiplicetur √ȝ (4 + √ȝ 6) per √ȝ 2 — 1. reducendus est prius hic numerus ad quadratum 3 — √ȝ 8 &c.

Postremo sit subducenda √ȝ (√ȝ 6 — √ȝ 2) à √ȝ (√ȝ 486 — √ȝ 162) Diuisa hac per illam, (inuento scilicet diuisore nouo √ȝ 4. nouoque diuidendo √ȝ 36) fit Quotiens √ȝ 9. hoc est, 3. ita vt radices propositæ habeant proportionem triplam, cuius denominator 3/1. Si igitur fiat, vt 1. ad 2. ita √ȝ (√ȝ 6 — √ȝ 2) ad aliud, prodibit residuum quæsitum √ȝ (√ȝ 96 — √ȝ 32.) Vt enim in regula trium secundus numerus in tertium multiplicetur, reducendi sunt ambo ad quadrata 4. & √ȝ 6 — √ȝ 2. & vnum in alterum ducendum, vt hic factũ esse vides, & producto præfigendum signum √ȝ. vt residuum fiat √ȝ (√ȝ 96 — √ȝ 32.) Item residuum reperietur, si fiat, vt 3. ad 2. ita √ȝ (√ȝ 486 — √ȝ 162) ad aliud. Nam reuocato secundo numero regulæ trium 2. & tertio √ȝ (√ȝ 486 — √ȝ 162) ad quadrata 4. & √ȝ 486 — √ȝ 162. si inter se multiplicentur, gignetur numerus √ȝ 7776 — √ȝ 2592. qui vt per 3. primum numerum regulæ trium diuidatur, reducendus erit ad quadratum 9. Si ergo √ȝ 7776. diuidatur per 9. id est, per √ȝ 81. fiet Quotiens √ȝ 96. Et si — √ȝ 2592. diuidatur per 9. hoc est, per √ȝ 81. fiet Quotiens — √ȝ 32. &c.

| | |
|---|---|
| √ȝ 6 — √ȝ 2 | |
| 4 | |
| √ȝ 96 — √ȝ 32 | |

| | |
|---|---|
| √ȝ 486 — √ȝ 162 | |
| 4 | |
| √ȝ 7776 — √ȝ 2592 | |

## *DE MINVTIIS NVMERORVM IRRATIONALIUM, ac de earundem Algorithmo.*

## CAPVT XXV.

NVMERATIO harum minutiarum facilis est. Quando enim signum radicale ponitur ante medium minutiæ, refertur signum illud ad vtrumque terminum, tam scilicet ad numeratorem, quam ad denominatorem. Vt hæc minutia √ȝ 3/4. significat √ȝ 9. diuisam esse per √ȝ 16. æquiualetque 3/4. Sic √ce 2/3. significat √ce 8. diuisam esse per √ce 27. æquiualetque 2/3. Ita quoque √ȝ 6/4 denotat, √ȝ 6. esse diuisam per √ȝ 8. *Numeratio minutiarum irrationalium.*

QVANDO signum radicale ponitur ante numerum integrum cum fractione, reducendus est totus numerus ad vnicam fractionem, vt eius valor exprimi possit. Vt √ce 1 67/125. reducitur ad √ce 192/125. significatque √ce 192. diuisam esse per √ce 125. hoc est, per 5. potestque ita repræsentari √ce 192/5. ita vt significet √ce 192. esse diuisam per 5. Quod si termini huius minutiæ √ce 192/125. multiplicentur per eundem aliquem numerum, nimirum per √ce 192. producetur minutia √ce 36864/24000. æquiualens minutiæ √ce 192/125. Et si rursus termini productæ minutiæ ducantur in eandem √ce 192. fiet minutia æquiualens √ce 7077888/4608000. hoc est, 192/√ce 4608000. significatque cubum 192. (qui videlicet producitur ex √ce 192. ducta in se cubice) diuisum esse per √ce 4608000. quia radix cubica numeratoris 7077888. est 192. Rursus minutia √ȝ 16/64. significat √ȝ 16. nimirum 4. diuisam esse per √ȝ 64. nimirum per 8. æquiualetque minutiæ 4/8. At minutia √ȝ 16/64. significat √ȝ 16. id est, 4 diuisam esse per 64. æquiualetque minutiæ 4/64. vel 1/16. Sic minutia 16/√ȝ 64. significat numerum 16 diuisum esse per √ȝ 64. id est, per 8. æquiualetque numero 2.

QVANDO eadem est proportio numeratorum ad denominatores, minutiæ æquales sunt, quemadmodum in minutijs vulgaribus. Itaque omnes hæ minutiæ √ȝ 64/4. √ȝ 64/4. 64/√ȝ 256. eiusdem sunt valoris: quia in omnibus numerator ad denominatorem proportionem seruat quadruplam, vt constat, si numeratores singuli per singulos denominatores diuidantur.

MINVTIÆ irrationales reducuntur ad minimos terminos, quando reduci possunt, vt reduci solent minutiæ vulgares. Vt hæc minutia √ȝce 4/8 reducitur ad hãc √ȝce 1/2. & √ȝ 108/36. ad √ȝ 3/1. Possunt quoque nonnunquam reduci ad minora signa radicalia. Vt √ȝce 4/8. reducitur ad √ce 2/√ȝ 2. quia numerator 4. habet radicem quadratam 2. sed hæc non habet cubicam: At denominator 8. habet radicem cubicam 2. sed hæc quadratam non habet. Esse autem has minutias √ȝce 4/8. & √ce 2/√ȝ 2. æquales probari potest ex multiplicatione in crucem. *Abbreuiatio minutiarum irrationalium.*

ADDITIO, atque subtractio fit in huc modum. Si denominator est idem, adduntur denominatores, vt supra traditum est, vel vnus ab altero subtrahitur, & summæ, vel residuo communis denominator supponitur. Vt ex additione √ȝ 4/7. ad √ȝ 9/7. fit summa √ȝ 25/7. hoc est, 5/7. At subtracta √ȝ 4/7. ex √ȝ 9/7. relinquitur √ȝ 1/7. id est 1/7. *Additio & subtractio minutiarum irrationalium.*

| Additio. | | | Subtractio. | | |
|---|---|---|---|---|---|
| √ȝ 4/7. | √ȝ 9/7. | | √ȝ 4/7. | √ȝ 9/7. | |
| √ȝ 25/7. | vel | 5/7. | √ȝ 1/7. | vel | 1/7. |

QVANDO autẽ denominatores sunt diuersi, fit reductio ad eundẽ denominatorem per multiplicationem in crucem, quemadmodũ in minutijs vulgaribus fieri consueuit. Deinde eodem modo numeratores adduntur inter se, vel vnus ab altero subtrahitur, & summæ, vel reliquo numero idem denominator communis subscribitur. Vt si addi debent √ȝ 16/49. ad √ȝ 4/9. vel illa ex hac auferenda, reducentur, vt formula apposita

| Reductio. | | Additio. | |
|---|---|---|---|
| √ȝ 144 / √ȝ 16 | √ȝ 196 / √ȝ 4 | √ȝ 144 / √ȝ 441 | √ȝ 196 / √ȝ 441 |
| √ȝ 49 | √ȝ 9 | 26/21 | |
| √ȝ 441 | | | |

monstrat, ad √ȝ 144/√ȝ 441. & √ȝ 196/√ȝ 441. fit autem ex additione summa 26/21, hoc est, 1 5/21. Nam numeratores commen-

surabiles sunt: in proportione 7/6. efficiuntque summam √ʒ676. cui supponitur denominator communis √ʒ441. vt fiat summa √ʒ676/√ʒ441. hoc est 26/21. id est, 1 5/21. At subtracta √ʒ144/√ʒ441. ex √ʒ196/√ʒ441. remanent 2/21. Nam numerator √ʒ144. subtractus à numeratore √ʒ196. relinquit √ʒ4/√ʒ441. hoc est, 2/21.

EODEM modo, si addendæ sunt (√ʒ50+√ℭ24)/5. & (√ℭ24+√ʒ8)/2. reduco eas prius ad eandem denominationem, videlicet ad (√ʒ200+√ℭ192)/10. & (√ℭ3000+√ʒ200)/10. Additis deinde numeratoribus, ac supposito eodem denominatore 10. fit summa (√ʒ800+√ℭ8232)/10. At vero ex subtractione minoris minutiæ ex maiore relinquitur √ℭ648/10. quia √ʒ200. ex √ʒ200. nihil relinquit.

ITEM si addendæ sunt √ʒ4/9. & √ʒ49/9. vel illa minutia ex hac detrahenda, non est opus reductione ad eandem denominationem. Fit autem ex numeratoribus summa √ʒ81. & supposito denominatore 9. fit summa ex duabus propositis minutijs √ʒ81/9. hoc est, 1. At detracto numeratore √ʒ4. ex numeratore √ʒ49. relinquitur √ʒ25. Est ergo residuum √ʒ25/9. hoc est, 5/9.

QVANDO numeratores sunt incommensurabiles, additio eorum fit per interpositionem signi +. subtractio autem per interiectionem signi −. Vt summa ex √ʒ 7/8. & √ʒ 5/8. fit summa √ʒ 7/8 + √ʒ 5/8. Et √ʒ 5/8. dempta ex √ʒ 7/8. reliquam facit √ʒ 7/8 − √ʒ 5/8.

*Multiplicatio ac diuisio minutiarum irrationalium.*

IN multiplicatione, ac diuisione minutiarum irrationalium solum opus est reductione ad eadem signa radicalia. Reliqua enim perficiuntur, vt in minutijs vulgaribus traditum est. Vt si ducenda sit √ʒ3/4 per √ʒ6/7. fit √ʒ18/28. At si prior per posteriorem diuidenda sit, inuersis terminis diuisoris, stabit exemplum, vt vides. Fit autem Quotiens √ʒ147/√ʒ96. hoc est √ʒ1 51/96. Nam ex √ʒ3. in 7. fit √ʒ147. & ex 4. in √ʒ6. fit √ʒ96.

| Multiplicatio | Diuisio |
|---|---|
| √ʒ3/4. per √ʒ6/7. | √ʒ3/4. per 7/√ʒ6. |

In diuisione tamen fieri potest reductio ad eandem denominationem, sed tunc relicto denominatore, facienda est diuisio numeratoris per numeratorem. Vt in dato exemplo, minutiæ √ʒ3/4. & √ʒ6/7. reducentur ad √ʒ147/28. & √ʒ96/28. Diuiso autem numeratore √ʒ147. per numeratorem √ʒ96. fit Quotiens √ʒ1 51/96. vt prius.

SINT quoque multiplicanda inter se (√ʒ800+√ℭ5184)/10. & √ℭ1536/10. Primũ reducenda sunt ad eadem signa radicalia, retento eodem denominatore communi 10. Numeratores ergo √ʒ800. & √ℭ5184. reducentur ad √ʒℭ512000000. & √ʒℭ26873856. Deinde si numerator √ℭ1536. multiplicetur zensice, reducetur ad √ʒℭ2359296. Itaque sic stabunt minutiæ reductæ. Ex √ʒℭ2359296. in √ʒℭ512000000. hoc est,

(√ʒℭ512000000+√ʒℭ26873856)/10   √ʒℭ2359296/10.

in √ʒℭ512. (Nam √ʒℭ512. & √ʒℭ512000000/10. idem prorsus sunt, cum idem numerus fiat ex √ʒℭ512. in 10. hoc est, in √ʒℭ1000000 qui ex 1. in √ʒℭ512000000) producitur √ʒℭ1207959552. Et ex √ʒℭ2359296. in √ʒℭ26873856. fit √ʒℭ63403380965376. hoc est, √ℭ7962624. cum hic numerus sit illius producti radix zensica. Et quoniam denominatores multiplicati faciunt 100. erit productus numerus

√ʒℭ1207959552/10 + √ℭ7962624/100.

AD extremum sit diuidenda (√ʒℭ512000000+√ʒℭ26873856)/10. per √ʒℭ2359296/10. Quoniam eundem habent denominatorem, satis est, diuidere numeratores. Ex diuisione √ʒℭ512000000. per √ʒℭ2359296 fit Quotiens √ʒℭ217 1/72. nimirum √ʒℭ 15625/72. hoc est, 5/√ʒℭ72. propterea quod numerator √ʒℭ15625. æquiualet numero 5 cum numeri 15625. radix Zensica sit 125. & huius radix cubica 5. Vel (quod idem est) quod numeri 15625. radix cubica sit 25. & huius radix Zensica 5. At ex diuisione √ʒℭ26873856. per √ʒℭ2359296. fit Quotiens √ʒℭ11 921600/2359296. siue √ʒℭ11 25/64. vel √ʒℭ 729/64. hoc est, 3/2. siue 1 1/2. Ex diuisione ergo proposita fit Quotiens √ʒℭ217 1/72 + 1 1/2. Vel 5/√ʒℭ72 + 1 1/2.

---

## DE NVMERIS IRRATIONALIBVS COSSICIS, *siue denominatis, vna cum eorum Algorithmo.*

## CAPVT XXVI.

*Numeri Cossici irrationales, qui.*

NVMERI Cossici, siue denominati fiunt irrationales, quando illis præfigitur signum aliquod radicale. Vt 20℞. fit irrationalis √ʒ20℞. Item √ℭ20℞. √ʒʒ20℞. &c. Sensus autem est, vt sumatur radix zensica, vel cubica, vel zensizensica 20. radicum, quæ mille modis variari potest, pro varietate valoris vnius radicis, potestque aliquando esse rationalis, & aliquando, vt plurimum, irrationalis. Nam si 1℞. est 5. erunt 20℞. numerus 100. cuius √ʒ est 10. atq; ita √ʒ20℞. est numerus rationalis, æquiualens 10. At √ℭ20℞. erit irrationalis, cum 100. non habeant radicem cubicam. Sic etiam √ʒʒ20℞. erit irrationalis, quod 100. non habeant radicem Zensizensicam: æquiualet tamen √ʒ10. quippe cum radix zensica 100. sit 10. & radix zensica 10. sit √ʒ10. Quod si 1℞. sit 50. erit valor 20℞. 1000. quæ habent radicem cubicam 10. Erit igitur √ℭ20℞. rationalis, æquiualens 10. At √ʒ20℞. erit irrationalis, sicut & √ʒʒ20℞. cum 1000. neque habeant radicem zensicam, neque zensizensicam. Vides ergo, non posse iudicari, an huiusmodi numeri sint rationales, vel irrationales, nisi prius constet æstimatio vnius radicis. Immo fieri potest, vt numerus aliquis Cossicus, sine signo radicali, inueniatur interdum esse irrationalis. Vt si æquatio reperiatur inter 1ʒ. & 20℞. & vnius zensi pretium sit 18. necessario numerus 20℞. erit irrationalis, æquiualens √ʒ7200. Nam quadrati 18. radix est √ʒ18. atque adeo 20℞. erunt √ʒ7200. qui numerus irrationalis est, cum 7200. careant radice quadrata.

ALGORITHMVS horum numerorum ex triplici Algorithmo conficitur, signorum radicalium, numerorum absolutorum, & signorum Cossicorum; neque admodum difficilis est, cum ipsa signa satis nos instruant, quid agere debeamus. Additio enim vt plurimum fit per interpositionem signi +. Subtractio vero per signum −. Vt ex additione √ℨ36℞. ad √ℨ12ℨ. fit summa √ℨ36℞ + √ℨ12ℨ. Vel √ℨ12ℨ + √ℨ36℞. At dempto 36. ex √ℨ36℞. fit reliquus numerus √ℨ36℞ − 36. & sic de alijs. *Additio, & Subtractio numerorum Cossicorum irrationalium.*

QVANDO signa Cossica sunt eadem, & numeri irrationales, semotis signis Cossicis, sunt commensurabiles, tunc signa Cossica operationem non impediunt, sed numeri irrationales adduntur, ac subtrahuntur, quemadmodum radices surdæ, vt cap. 19. & 20. monstratum est, ac post operationē idem signū Cossicum apponitur. Vt ex √ℨ82℞. ad √ℨ182℞. fit summa √ℨ502℞. quia √ℨ8. & √ℨ18. commensurabiles sunt, efficiuntque √ℨ50. quod constat ita esse, si 1℞ statuatur 2. Erunt enim 82℞ 16. cuius numeri radix est 4. Et 182℞ facient 36. cuius numeri radix est 6. Fiunt autem 10. ex 4. & 6. Liquet autem √ℨ502℞. facere etiam 10. cum 502℞ faciant 100. cuius numeri radix est 10.

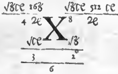
SIC ex √ℨ82℞. ad √ℨ322℞. fit √ℨ722℞. quod per resolutionem probari potest, posita 1℞ 2. Nam √ℨ8 ℞ erit 4. & √ℨ32℞. erit 8. fit autem ex 4. & 8. summa 12. Videiam, an summa collecta √ℨ722℞. faciat etiam 12. Certum autem est, 72 ℞ facere 144. cuius radix est 12.

ITEM ex √ℨ8ℨ. ad √ℨ32ℨ. fit summa √ℨ72ℨ. Et ex √ℨ16ℨ. ad √ℨ4ℨ. fit √ℨ36ℨ. Nam si 1℞. statuatur 2. vtrīq; fit 4. erunt 16ℨ 64. cuius numeri radix est 8. At 4ℨ. erunt 16. cuius numeri radix est 4. Fiunt autē 12. ex 8. & 4. quantum nimirum valet √ℨ36ℨ quippe cum 36ℨ. sint 144 cuius numeri radix est 12.

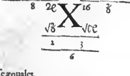
PRÆTEREA ex √ℨ8ℨ. ad √ℨ18ℨ. fit √ℨ50ℨ. quod etiam perbelle examini quadrat, posita 1℞ 2. vt 1ℨ. sit 4. Erunt enim 8ℨ 32. cuius numeri radix est √ℨ32. Et 18ℨ. sunt 72. cuius radix est √ℨ72. Fit autem ex √ℨ32. & √ℨ72. summa √ℨ200. A. tantundē facit √ℨ50ℨ. quippe cum 50ℨ. sint 200. cuius numeri radix est √ℨ200.

EADEM ratione, dempta √ℨ82℞. ex √ℨ182℞. superest √ℨ22℞. Atque subtracta √ℨ8ℨ. à √ℨ18ℨ. reliqua fit √ℨ2ℨ. Vtrumque exemplum per radicem 2. sic examinabimus. 82℞. faciunt 16. cuius numeri radix est 4. Et 182℞ faciunt 36. cuius numeri radix est 6. Demptis autem 4. ex 6. remanent 2. Ac tantundem facit √ℨ2.2℞, cum 2.2℞ faciant 4. cuius numeri radix est 2. Rursus 8ℨ. faciunt 32. cuius numeri radix est √ℨ32. Et 18ℨ. faciunt 72. cuius numeri radix est √ℨ72. Subtracta vero √ℨ32. ex √ℨ72. remanet √ℨ8. quantum nimirum facit √ℨ2ℨ. propterea quod 2ℨ faciunt 8. cuius numeri radix est √ℨ8.

VT autem numeri Cossici irrationales inter se multiplicentur, aut diuidantur, reducenda prius sunt signa radicalia ad idem signum, vt cap. 18. docuimus: si nimirum multiplicatio fiat in crucem. Vt √ℭ42℞. & √ℨ82℞. reducuntur ad √ℨℭ16ℨ. & √ℨℭ512ℭ. vt ex subiecta formula patet. Nā 42℞ ducta in se zensice, faciunt 16ℨ. & 82℞ multiplicatæ in se cubice faciunt 512ℭ. Exponentes vero signorum radicalium inter se multiplicati faciunt 6. exponentem signi √ℨℭ. Reductionem autem esse rite peractam, hoc est, √ℨℭ16ℨ. æqualem esse √ℭ42℞. & √ℨℭ512ℭ. æquivalere √ℨ82℞. perspicuum est. Nam posita 1℞ 2. erunt 42℞ 8. cuius numeri radix cubica est 2. Ac tantundem facit √ℨℭ16ℨ ad quam reducta est √ℭ42℞. Nam 16ℨ. faciunt 64. cuius numeri radix zensicubica est 2. Item 82℞. erunt 16. cuius numeri radix zensica est 4. Atque tantundem quoque facit √ℨℭ512ℭ. ad quam √ℨ82℞. reuocata est. Nam 512ℭ. faciunt 4096. cuius numeri radix zensicubica est 4. *Reductio signorum radicalium in numeris Cossicis irrationalibus.*




Eodē modo √ℨ82℞. & √ℭ16ℨ. reducētur ad √ℨℭ512ℭ & √ℨℭ256ℨℨ. vt hæc altera formula docet. Esse autem √ℨℭ 512 ℭ. æqualē √ℨ 8 2℞ & √ℨℭ256ℨℨ. æquiualere √ℨ216ℨ. facile probabimus. Nimirum √ℨ82℞. hoc est, √ℨ16. est 4. quantum videlicet facit √ℨℭ512ℭ. quippe cum 512ℭ faciant 4096 cuius numeri √ℨℭ est 4. Item √ℭ16ℨ est quoque 4. quantum nimirū facit √ℨℭ256ℨℨ. cum 256ℨℨ. faciant 4096. qui numerus radicem zenzicubicam habet 4. Ex quo constat, tam √ℨ82℞. & √ℭ16ℨ. inter se, quam √ℨℭ512ℭ. & √ℨℭ256ℨℨ. inter se esse æquales.




FACTA reductione, vt præcepimus, institui potest & multiplicatio, & diuisio. In priori ergo exemplo ex multiplicatione √ℨℭ512ℭ. in √ℨℭ16ℨ. fit √ℨℭ8192ß. quod ita probatur. √ℨℭ512ℭ. facit 4. Et √ℨℭ 16ℨ. facit 2. Atq; ex in 4. in 2. fiunt 8. quantū nimirū facit √ℨℭ8192ß. Quoniā videlicet 8192ß. faciunt 262144 cuius √ℨℭ est 8. Item ante reductionem √ℭ42℞. est 2. & √ℨ82℞. est 4. vbi rursum vides, ex 2 in 4. gigni 8. *Multiplicatio ac diuisio numerorum Cossicorum irrationalium.*

Item ex diuisione √ℨℭ512ℭ per √ℨℭ16ℨ. fit Quotiens √ℨℭ32℞. hoc est, 2. cum 32℞ faciant 64. cuius numeri √ℨℭ est 2. quod probatur. Nam √ℨℭ512ℭ. est 4. & √ℨℭ16ℨ. est 2. vbi cernis, ex diuisione 4. per 2. Quotientem fieri 2. quod etiam ante reductionem manifestum est: quippe cum √ℨ82℞. sit 4. & √ℭ42℞. sit 2. vbi iterum ex diuisione 4. per 2. fit Quotiens 2.

IN posteriori vero exemplo, ex multiplicatione √ℨℭ512ℭ. in √ℨℭ 256ℨℨ. fit √ℨℭ131072 Bß. hoc est 16. propterea quod 131072 Bß. faciunt 16777216. qui numerus radicem zensicubicam habet 16. Atque hoc ita esse, liquet. Nam tam √ℨℭ 512ℭ. quam √ℨℭ 256ℨℨ. est 4. Manifestum autem est, ex 4. in 4. fieri 16. quod etiam patet ante reductionem, cum tam √ℨ82℞. quam √ℭ16ℨ. sit 4. posita 1℞ 2. &c.

Item ex diuisione √ℨℭ 256ℨℨ. per √ℨℭ512ℭ fit Quotiens √ℨℭ½℞. hoc est, √ℨℭ1. cum ½℞ sit 1. posita 1℞ 2. ac proinde cū √ℨℭ1. sit 1. erit Quotiens 1. vt ratio postulat. Cum enim √ℨℭ256ℨℨ. & √ℨℭ 512. ℭ. æquales sint, quod quælibet earum sit 4. vt dictum est, fiet ex diuisione vnius per alteram Quotiens 1. Pari ratione ex diuisione √ℨℭ131072 Bß per √ℨℭ512ℭ. fit Quotiens √ℨℭ256ℨℨ. vt probare potes.

SIC etiam, vt 1℞ ducatur in √ℨ4. quadranda erit 1℞ & quadrato 1ℨ. præponendum signum radicale √ℨ. vt fiat √ℨ1ℨ atque ita ex √ℨ1ℨ in √ℨ4 fit numerus √ℨ4ℨ. quod probatur, si 1℞. sit 2. Nam ex 2. in √ℨ4. id est, in 2. fiunt 4. radix nimirum 4ℨ. id est, numeri 16.

Ita quoq; vt 3 ꝛ ducantur in √ȝ 16 quadrandus erit numerus 3 ꝛ vt fiant 9 ȝ. Deinde √ȝ 9 ȝ ducenda in √ȝ 16. gigneturque numerus √ȝ 144 ȝ. quod eodem modo probabitur, sumpto binario pro 1. radice. Nam 3 ꝛ facient 6. & √ȝ 16. facit 4. Fiunt autem 24. ex 6. in 4. Ac radix ȝ 144 ȝ. facit similiter 24. cum 144 ȝ faciant 576. cuius numeri radix est 24. &c.

Hi porro numeri producti √ȝ 48 ȝ. & √ȝ 144 ȝ. dicuntur numeri radicum, vt in ænigmate 12. & 28. cap. 32. constabit quia videlicet prior productus est ex 1 ꝛ. in √ȝ 4. posterior autem ex 3 ꝛ in √ȝ 16. quemadmodum numerus 4. productus ex 1. aureo in 4. Item numerus 48. productus ex 3. aureis in 16. dicitur numerus aureorum. Id quod diligenter obseruandum est.

Atque hoc perinde est, ac si ducatur 1. in √ȝ 4. vel 3. in √ȝ 16. Producti enim numeri √ȝ 4. & √ȝ 144. sunt numeri vnitatum, quæ multiplicatæ sunt. Itaque ex 1 ꝛ in √ȝ 4. fit numerus radicum √ȝ 4 ȝ. nimirum √ȝ 4 zensorum. Et ex 3 ꝛ in √ȝ 16. fit numerus radicum √ȝ 144 ȝ. id est, √ȝ 144. zensorum, atque ita de cæteris. quandoquidem in huiusmodi multiplicationibus seruata est regula multiplicationis radicum surdarum, quæ in cap. 18. tradita est. Verum hoc melius percipietur ex solutione ænigmatis 12. & 28. cap. 32.

*Quãdo post reductionẽ signa Cossica abbreuiari possint, & quãdo non.*

OBSERVANDVM autem hic est, rem non succedere, si signa Cossica, vt cap. 7. docui, abbreuientur. Nam in priori exemplo, in quo √ce 4 ꝛ. & √ȝ 8 ꝛ reductæ sunt ad √ȝce 16 ȝ. & √ȝce 512 ce. vbi ex multiplicatione procreatus est numerus 8. si signa Cossica abbreuientur, stabit reductio in his terminis √ȝce 16. & √ȝce 512 ꝛ. Sed ex multiplicatione vnius in alteram fit √ȝce 8192 ꝛ. quæ valet √ce 128. propterea quod 8192 ꝛ. faciunt 16384. cuius numeri √ȝ. est 128. & huius √ce. est √ce 128. quæ æqualis non est priori numero producto 8. Solum quando huiusmodi numeri reducti æquales sunt, abbreuiari poterunt signa Cossica. Tunc enim manet adhuc æqualitas, vt cap 12. diximus. Vt quia √ȝce 512 ce. & √ȝce 256 ȝȝ. æquales sunt cum quælibet valeat 4. si abbreuientur signa Cossica, cernetur adhuc æqualitas inter √ȝce 512. & √ȝce 256 ꝛ. quippe cum 256 ꝛ faciant 512. Constat autem √ȝce 512. & √ȝce 512. æquales esse. Hoc te monere volui, ne signa Cossica abbreuies, etiam post reductionem factam, nisi constet numerorum æqualitas.

DE minutijs porro horum numerorum non attinet quidquam dicere, cum suorum integrorum præcepta sequantur in omnibus.

*Æquatio inter numerum Cossicum Irrationalem, & numerum absolutum.*

CÆTERVM si occurrat æquatio inter numerum Cossicum Irrationalem, & numerum absolutum, reducetur ea æquatio hoc modo. quod quidem prope finem cap. 10. polliciti sumus, nos hoc loco docturos. Sit, Verbi gratia, æquatio inter √ȝ 24 ꝛ. & 12. Quo posito, erit quoque æquatio inter eorum quadrata 24 ꝛ. & 144. Diuisis ergo 144. per 24. prodibit in Quotiente vnius radicis pretium 6. quod patet. quia 24 ꝛ facient 144. cuius numeri radix quadrata est 12.

Item si sit æquatio inter √ȝ 10 ȝ & 20. erit etiam æquatio inter eorum quadrata 10 ȝ. & 400. Diuisis igitur 400 per 10. reperietur 1 ȝ. valere 40. atque idcirco 1 ꝛ. valebit √ȝ 40. Nam 10 ȝ. erunt 400. cuius numeri radix quadrata est 20.

Denique si æquatio inueniatur inter √ce 12 ȝ. & 30. erit etiam æquatio inter eorum cubos 12 ȝ. & 27000. Diuisis ergo 27000. per 12. prodibit pretium 1 ȝ. 2250. ac propterea 12 ȝ. facient 27000. cuius numeri radix cubica est 30.

*Quãdo huiusmodi æquatio impossibilis sit.*

Quod si quis proponat æquationem inter √ce 8. & 3. erit etiam æquatio inter eorum cubos 8. & 27. quod est impossibile. Itaque in hisce æquationibus, necesse est, numerum absolutum esse radicem numeri, qui gerit signum radicale. qualis est æquatio inter √ce 8. & 2. Item inter √ce 64. & 4. Item inter √ȝ 81. & 9. &c. Alioquin impossibilis erit æquatio.

---

# DE BINOMIIS ATQVE APOTOMIS, *Residuisve.*

## CAPVT XXVII.

*Binomium & Residuũ: item Trinomiũ. Quatrinomium apud scriptores quid.*

SCRIPTORES Algebræ ferme omnes, duos numeros quosuis copulatos per signum +, Binomium appellare solent, vt √ȝ 12 + √ȝ 3. & √ȝ 18 + √ȝ 8. & 6 + √ȝ 9. Copulatos vero per signũ −, Residuum, vel Apotomen, vt √ȝ 12 − √ȝ 3. & √ȝ 18 − √ȝ 8. & 6 − √ȝ 9. Plures autem numeros ita copulatos, dicere consueuerunt, trinomium, quatrinomium, &c. vt √ȝ 17 + √ȝ 10 + √ȝ 3. vel √ȝ 17 − √ȝ 10 + √ȝ 3. dicunt Trinomium: At √ȝ 17 + √ȝ 10 + √ȝ 3 + √ȝ 2. Vel √ȝ 17 − √ȝ 10 + √ȝ 3 − √ȝ 2. Quatrinomium, &c. Euclides aũt in lib. 10. propos. 37. & 74. tunc solum numeros binos copulatos per signum +. vel −, vocat Binomia, vel Residua, quando duo illi numeri copulati sunt Rationales solum potentia commensurabiles, quamuis alter eorum sit radix surda, vel vterque. Vt 6 + √ȝ 20. Itẽm √ȝ 18 + 4. Item √ȝ 24 + √ȝ 18. vocat Binomia: At 6 − √ȝ 20. Et √ȝ 18 − 4. Et √ȝ 24 − √ȝ 18. appellat Residua, vel Apotomas. Nam quilibet duo numeri copulati sunt Rationales potentia tantum commensurabiles; cum eorum quadrata commensurabilia sint quadrato cuiusuis numeri Rationalis.

*Binomium & Residuũ secundum Euclidem, quid.*

Itaque neque √ȝȝ 10 + √ȝȝ 8. Binomium erit, neque √ȝȝ 10 − √ȝȝ 8. Residuum. quia eorum particulæ sunt numeri Irrationales: quippe cum eorum quadrata √ȝ 10. & √ȝ 8. sint incommensurabilia habentia proportionem, quam √ȝ $\frac{5}{4}$. ad 1. vt ex Lemmate cap. 18. patet. Eadem ratione neque 6 + √ȝ 9. neque 20 + 6. Binomia erunt, neque 6 − √ȝ 9. neque 20 − 6. Residua: propterea quod bini quilibet numeri efficiunt vnum solum numerum rationalem, non autem duos. Nam 6 + √ȝ 9. æquiualent 9. & 20 + 6. æquiualent 26. Item 6 − √ȝ 9. æquiualent 3.

Et 20

Et 20 — 6. æquiualent 14. Ratio autem est, quod bini quilibet sunt Rationales longitudine commensurabiles, & non potentia tantum: quippe cum proportio inter quoslibet duos sit rationalis ; Proportio enim 6. ad √ʒ 9. dupla est: si namque per √ʒ 9. diuidantur 6. hoc est, √ʒ 36. exibit in Quotiente √ʒ 4 hoc est, 2. denominator proportionis. Si vero diuidantur 20. per 6. fiet Quotiens $3\frac{1}{3}$. ita vt 20. ad 6. habeant proportionem triplam sesquitertiam. Eadem ratione neque √ʒ 12 + √ʒ 3. Binomium erit, neque √ʒ 12 — √ʒ 3. Residuum, licet vterque numerus sit radix surda. quia numeri proportionem habent duplam , & priores duo efficiunt summam √ʒ 27. videlicet vnicum numerum : posteriores vero duo æquiualent √ʒ 3. vnico etiam numero. Eandemque ob causam neque √ʒ 18 + √ʒ 8. Binomium erit censendum, neque √ʒ 18 — √ʒ 8. Residuum, quamuis vterque numerus radix surda sit. quia numeri proportionem habent sesquialteram, cuius denominator est $1\frac{1}{2}$. ac priores duo conficiunt summam √ʒ 50. vnicum numerum : posteriores vero duo huic vnico numero √ʒ 8. æquiualent. Denique propositis duobus numeris rationalibus , hoc est , quorum quadrata commensurabilia sunt quadrato cuiusuis numeri rationalis , ita tamen , vt diuiso vno per alterum , Quotiens fiat rationalis, id est, numerus , qui radicem habeat, non constituetur ex illis Binomium , aut Residuum : quia eiusmodi numeri nō sunt potentia tantū commensurabiles , sed etiam longitudine ; ac proinde ex ipsis non fit numerus irrationalis, sed rationalis, licet nonnunquam efficiatur radix surda. Vt ex 3. & √ʒ 16 fit summa √ʒ 49. hoc est, 7. numerus rationalis, qui surdus non est: At ex √ʒ 8. & √ʒ 18. fit summa √ʒ 50. numerus rationalis surdus. Atque in hoc decipiuntur non pauci , putantes omnem numerum , qui gerit signum √ʒ. & radicem non habet, esse irrationalem quod verum non est, atque Euclidi manifeste repugnat. Solum quando numerus gerens signum √ʒ. refert superficiem aliquam , vel quadratum , numerus ille irrationalis est [a] qualis est superficies rectangula producta ex multiplicatione mutua duorum numerorum rationalium potentia tantum commensurabilium. Vt si √ʒ 3. ducatur in √ʒ 10. producitur superficies √ʒ 30. irrationalis, quæ Media dicitur. Radix autem eius quadrata est √ʒʒ 30. quæ vocatur linea Media. cum hæc in se quadrate ducta faciat √ʒʒ 900. hoc est, √ʒ 30. propterea quod radix zensica numeri 900. est 30. & huius radix zensica est √ʒ 30. itaque quando in superioribus numeros habentes præfixum signum √ʒ. vocauimus irrationales , id improprie dictum accipiendum est , quando numeri illi rationales sunt.

*Nō omnem numerum, qui gerit signū √ʒ. esse irrationalem.*

*a 22. deci.*

*Superficies, & linea Media.*

Potest quidem omnis numerus gerens signum √ʒ. dici numerus irrationalis , si sumatur pro superficie Media, producta ex √ʒ 1. in ipsum numerum. Vt √ʒ 3. erit superficies Media, & irrationalis, si capiatur pro producto ex √ʒ 1. in √ʒ 3. eiusque radix quadrata erit √ʒʒ 3. Nam hæc ducta in se zensice facit √ʒʒ 9. hoc est √ʒ 3. quippe cum radix zensica numeri 9. sit 3. & huius radix zensica √ʒ 3. & sic de alijs.

CONSTITVIT Euclides sex genera Binomiorum, totidemque Residuorum. Aut enim maius nomen plus potest , quam minus , quadrato , cuius radix maiori nomini est commensurabilis longitudine , vel incommensurabilis. Item vel maius nomen cōmensurabile est longitudine numero rationali exposito, vel minus, vel neutrum. Vtrumque enim nomen exposito numero rationali longitudine cōmensurabile esse nequit. [b] quia & ipsa nomina essent numeri rationales longitudine commensurabiles. quod est absurdum, cum ponantur potentia tantum commensurabiles. Quibus positis, fient sex genera Binomiorum. quæ sic definiuntur.

*Sex Binomia, ac Residua.*

*b 12. deci.*

Binomium primum est, cuius maius nomen plus potest, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini est longitudine commensurabilis , ipsumq; maius nomen exposito numero rationali est commensurabile longitudine. Vt 6 + √ʒ 27. quia quadratum maioris nominis 6. nimirum 36. superat 27. quadratum minoris nominis, quadrato 9. cuius radix 3. longitudine commensurabilis est maiori nomini 6. atque ipsum quoq; maius nomen 6. commensurabile est longitudine exposito cuiuis numero rationali.

*Binomium primum.*

Binomium secundum est, cuius maius nomen plus potest, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini est longitudine commensurabilis , ipsumque mious nomen exposito numero rationali est longitudine commensurabile. Vt √ʒ 48 + 6. quia quadratum maioris nominis, nimirum 48. superat 36. quadratum minoris nominis, quadrato 12. cuius radix, videlicet √ʒ 12. commensurabilis est longitudine maiori nomini, cum √ʒ 48. ad √ʒ 12. habeat proportionem duplam; propterea quod illa per hanc diuisa , fiat Quotiens √ʒ 4. hoc est, 2. Item minus nomen exposito cuilibet numero rationali commensurabile est longitudine.

*Binomium secundum.*

Binomium tertium est, cuius maius nomen plus potest, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini est longitudine commensurabilis, sed neutrum nomen exposito numero rationali longitudine commensurabile existit. Vt √ʒ 24 + √ʒ 18. quia maioris nominis quadratum 24. superat 18. quadratum minoris nominis, quadrato 6. cuius radix oimirum √ʒ 6. commensurabilis est longitudine maiori nomini : cum √ʒ 24. ad √ʒ 6. proportionem habeat duplam: quippe cum illa diuisa per hanc, Quotiens fiat √ʒ 4. hoc est, 2. At neutrum nomen longitudine commensurabile est exposito numero rationali.

*Binomium tertium.*

Binomium quartum est, cuius maius nomen plus potest, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini est longitudine incommensurabilis, ipsum vero maius nomē exposito numero rationali commensurabile est longitudine. Vt 4 + √ʒ 10. quia maioris nominis quadratum 16. superat 10. quadratum minoris nominis, quadrato 6. cuius radix, nimirum √ʒ 6. longitudine incommensurabilis est maiori nomini 4. quippe cū maioris nominis quadratum 16. ad 6. quadratum √ʒ 6. proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum: [c] ac propterea eorum latera longitudine sint incommensurabilia. At maius nomen 4. longitudine commensurabile est numero exposito rationali.

*Binomium quartum.*

*c 9. decim.*

Binomium quintum est, cuius maius nomen plus potest, quam minus, quadrato , cuius radix maiori nomini incommensurabilis est longitudine, nomen vero minus exposito numero rationali longitudine est commensurabile. Vt √ʒ 5 + 2. quia quadratum 5. maioris nominis superat 4. quadratum minoris nominis, quadrato 1. cuius radix, nimirum √ʒ 1. longitudine incommensurabilis est maiori nomini : quippe cum maioris nominis quadratum ad 1. quadratum √ʒ 1. proportionem non habeat , quam quadratus numerus ad numerum quadratum : [d] ac propterea latera eorum sint longitudine incommensurabilia. Est tamen minus nomen 2. longitudine commensurabile exposito numero rationali cuicunque.

*Binomium quintum.*

*d 9. decim*

Binomium deniq; sextum est, cuius maius nomen plus potest, quam minus, quadrato cuius radix maiori nomini incommensurabilis est longitudine, sed neutrum nomen exposito numero rationali commensurabile

*Binomium sextum.*

longi-

longitudine. Vt √ʒ80+√ʒ50. quia quadratum 80. maioris nominis superat 50. quadratum minoris nominis, quadrato 30 cuius radix, nimirum √ʒ30. longitudine incommensurabilis est maiori nomini. quippe cum quadratum 80. maioris nominis, & quadratum 30. proportionem non habeant, quàm quadratus numerus ad numerum quadratum; [a] ideoque eorum latera longitudine sint incommensurabilia longitudine. Neutrum quoque nomen longitudine commensurabile est exposito numero rationali.

*[a] 9. decim.*

SEX autem residua, vel Apotome eodem modo se habent; cum ex quolibet Binomio oriatur Apotome respondens, interposito signo — pro signo +. Nam ex Euclide Apotome nil aliud est, quam id, quod relinquitur, si duobus numeris rationalibus potentia tantum commensurabilibus positis, minor de maiore detrahatur quod quidem fit per interpositionem signi —.

*Sex genera Apotomarum.*

Itaque ex primo Binomio 6+√ʒ27. fit prima Apotome 6−√ʒ27.
Ex secundo Binomio √ʒ48+6. fit Apotome secunda √ʒ48−6.
Ex tertio Binomio √ʒ24+√ʒ18. fit Apotome tertia √ʒ24−√ʒ18.
Ex quarto Binomio 4+√ʒ10. fit quarta Apotome 4−√ʒ10.
Ex quinto Binomio √ʒ5+2. fit quinta Apotome √ʒ5−2.
Ex sexto denique Binomio √ʒ80+√ʒ50. fit sexta Apotome √ʒ80−√ʒ50. quæ omnia perspicua sunt ex definitionibus Apotomarum ab Euclide traditis.

QVONIAM vero intelligentia decimi libri potissimum in cognitione Binomiorum, ac Residuorum consistit, libet paulo diutius in eorum tractatione immorari. Primo autem loco docebimus, qua ratione quoduis Binomium optatum, ac proinde & Residuum (cum hoc solum signo — ab illo differat) reperiatur: Deinde, qua arte ex quouis Binomio, aut Residuo radix quadrata eliciatur, & quamnam lineam irrationalem, vel numerum cōpositum, diminutumve radix illa constituat: insistentes semper ijs, quę ab Euclide demonstrata sunt.

*Binomij primi, & Apotomæ primæ inuentio.*

SIT ergo inueniendum primum Binomium, primumque Residuum Quadratus quilibet numerus AB, nimirum 9. diuidatur in BC, quadratum numerum 4. & in AC, numerum non quadratum 5. assumaturque numerus rationalis quicunque 6. pro primo nomine. Et fiat, vt numerus 9. AB, ad numerum 5. AC, ita 36. quadratus numerus assumpti numeri 6 ad aliud: inuenieturque quadratus 20 Ergo 6+√ʒ20. erit primum Binomium. Et 6−√ʒ20. erit prima Apotome, vt constat ex propos. 49. & 86. lib. 10. Eucl.

```
 5       4
A.....C....B

6 + √ʒ 20
6 − √ʒ 20
```

*Binomij secundi, & secundæ Apotomæ inuentio.*

Binomium vero secundum, atque Apotome secunda hoc modo reperietur. Diuiso quocunque numero quadrato AB, nimirum 9. in BC, quadratum 4 & in AC, nō quadratum 5. assumatur ad libitum numerus rationalis 5. pro secundo nomine. Fiat vt numerus 5. AC, ad quadratum numerum 9. AB, ita 25. quadratus numerus numeri assumpti 5. ad aliud; inuenieturque quadratus 45. Ergo Binomium secundum est √ʒ45+5. Et √ʒ45−5. Apotome secunda, vt manifestum est ex propos. 50 & 87. lib. 10. Eucl.

```
 5       4
A.....C....B

√ʒ 45 + 5
√ʒ 45 − 5
```

*Binomij tertij, & tertiæ Apotomæ inuentio.*

Binomium tertium, & Apotomam tertiam inueniemus sic. Diuiso quolibet numero quadrato AB, videlicet 9. in BC, quadratum 4. & in AC, non quadratum 5. sumatur alius numerus D, nimirum 6. non quadratus proxime maior, quam AC, 5. differetque D, ab AC, vel sola vnitate, vel binario. Vnitate quidem, quando AC, numerus talis fuerit, vt ei vnitas addita non faciat quadratum: binario vero, quando vnitas addita ad AC, facit quadratum. Vt si AC, sit 8. erit proxime maior non quadratus differens ab 8. binario, quia vnitas addita ad 8. efficit quadratum 9. At si AC, sit 5. vt in nostro exemplo, erit non quadratus proxime maior 6. differens à 5. vnitate, quia vnitas addita ad 5. non conficit quadratum. Sumpto deinde quocunque numero rationali 12. Fiat vt numerus D. 6. ad quadratum numerum AB. 9. ita 144. quadratus numerus assumpti numeri rationalis 12. ad aliud, inuenieturque quadratus 216. cuius radix, videlicet √ʒ216. erit maius nomen. Quod si rursus fiat; vt 9. quadratus AB, ad numerum AC, 5. ita quadratus 216. inuentus ad aliud, reperietur quadratus 120. cuius radix, nimirum √ʒ120. erit minus nomen. Binomium ergo tertium inuentum est √ʒ216+√ʒ120. Et Apotome tertia √ʒ216−√ʒ120. vt ex propos. 51. & 88. lib. 10. Eucl. liquet.

```
 5       4
A..... C....B
   D......
      12
√ʒ 216 + √ʒ 120
√ʒ 216 √ʒ − 120
```

*Binomij quarti, & quartæ Apotomæ inuentio.*

Binomium quartum, & Apotomam quartam inueniemus in hunc modum. Diuiso quocunque quadrato numero AB, nimirum 9. in duos nō quadratos AC, CB, vtpote in 6. & 3. sumptoque numero quolibet rationali 6. pro maiori nomine: Fiat, vt quadratus numerus AB, videlicet 9. ad AC, 6 non quadratum, ita 36. quadratus numerus assumpti numeri rationalis 6. ad aliud; repeicturque quadratus 24. cuius radix, nimirum √ʒ24: erit minus nomen. Est ergo quartum Binomium 6+√ʒ24. Et quarta Apotome 6−√ʒ24. vt ex propos. 52. & 89. lib. 10. Eucl. colligitur.

```
 6       3
A......C...B

6 + √ʒ 24
6 − √ʒ 24
```

*Binomij quinti, & Apotomæ quintæ inuentio.*

Binomium quintum, & Apotomam quintam ita explorabimus. Diuiso quolibet numero quadrato AB, nimirum 9, in duos AC, CB, non quadratos, vt in 6. & 3. sumptoque numero quouis rationali 2. pro minori nomine: Fiat, vt AC, numerus 6. ad quadratum AB, nimirum ad 9. ita 4. quadratus assumpti numeri rationalis 2. ad aliud. inuenieturque quadratus 6. cuius radix, nimirum √ʒ6. erit maius nomen. Erit ergo binomium quintum √ʒ6.+2 & & Apotome quinta √ʒ6−2. vt Euclides propos. 53. & 90. lib. 10. concludit.

```
 6       3
A...... C...B

√ʒ 6 + 2
√ʒ 6 − 2
```

Bino-

Binomium denique ſextum, & Apotomam ſextam indagabimus hac arte. Diuiſo quolibet numero 12. non quadrato AB, in duos non quadratos AC, CB, vt in 7. & 5. ſumatur alius quadratus D, quicunque, nimirum 9. & inſuper quilibet numerus rationalis 12. Deinde fiat, vt numerus quadratus D, nimirum 9. ad numerum 12. non quadratum AB, ita 144. quadratus numerus aſſumpti numeri rationalis 12. ad aliud. Reperietur enim quadratus 192. cuius radix, nimirũ √ȝ 192. erit maius nomẽ Binomij. *Binomij ſexti, & Apotomæ ſextæ inuentio.*

```
 7          5
A.......C.....B
  D........
      12
√ȝ 192 + √ȝ 112
√ȝ 192 − √ȝ 112
```

Et ſi rurſus fiat, vt numerus 12. AB, non quadratus ad 7. numerum AC, ita quadratus proxime inuentus 192. ad aliud, reperietur quadratus numerus 112. cuius radix, nimirum √ȝ 112. erit minus nomen: ita vt Binomium ſextum ſit √ȝ 192 + √ȝ 112. Apotome autem ſexta √ȝ 192 − √ȝ 112. vt ex propoſ. 54. & 91. lib. 10. Eucl. conſtat.

IAM vero, dato quouis Binomio, vel Apotoma, inueniemus ex eo, ſine magno labore, quotuis alia Binomia, & Apotomas eiuſdem ſpeciei. Nam pro primo, ac quarto Binomio, ſi fiat, vt maius nomen ad minus, ita quiuis numerus rationalis aſſumptus pro maiori nomine noui Binomij ad aliud, producetur minus nomẽ noui Binomij primi vel quarti. Pro ſecundo vero, ac quinto, ſi fiat, vt minus nomen ad maius, ita quiuis numerus rationalis pro minori nomine noui Binomij aſſumptus ad aliud, procreabitur maius nomẽ noui Binomij ſecundi vel quinti. Pro tertio denique ac ſexto, ſi fiat, vt maius nomen ad minus, (quorum vtrumq; numerus ſurdus eſt,) ita quiuis numerus ſurdus pro maiori nomine noui Binomij aſſumptus ad aliud, proueniet minus nomen noui Binomij tertij, vel ſexti. Rationem huius rei, ſi quis deſideret, ſciat petendam eſſe ex propoſ. 15. lib. 10. Eucl. Cum enim per conſtructionem eadem ſit proportio inter nomina dati Binomij, quæ inter nomina producti Binomij: ſi maius nomen dati Binomij plus poteſt, quam minus, quadrato radicis ſibi commenſurabilis longitudine; [a] poterit quoque maius nomen noui Binomij plus, quam minus, quadrato radicis longitudine ſibi commenſurabilis: Et ſi maius nomen illius plus poteſt, quam minus, quadrato radicis ſibi longitudine incommenſurabilis; poterit quoq; maius nomen huius plus, quam minus, quadrato radicis ſibi incommenſurabilis longitudine. Nam nomina Binomiorum ſunt inſtar linearum. Atque idcirco duo illa Binomia erunt eiuſdem generis, nimirum vtrumque erit vel primum, vel ſecundum, vel tertium, &c. quippe cum vel maius nomen in vtroque, vel minus numerus ſit rationalis, vel ſurdus. *Inuentio Binomij, vel Apotomæ cuiuſuis ſpeciei, ex dato Binomio vel Apotoma eiuſdẽ ſpeciei.* *[a] 15. decim.*

Inuento porro Binomio nouo, iam noſti, fieri ex eo Reſiduũ, vel Apotomã, ſi ſignum + in − cõmutetur.

Exempli cauſa, ex Binomio primo 6 + √ȝ 27. fiet ſimile Binomium, cuius maius nomẽ ſit 400. ſi fiat, vt 6. ad √ȝ 27. ita 400. ad aliud. hoc eſt, ſi multiplicetur √ȝ 27. in 400. id eſt, in √ȝ 160000. & productus numerus √ȝ 4320000. per 6. id eſt, per √ȝ 36. diuidatur. Producetur enim √ȝ 120000. Eritque nouum Binomium primum 400 + √ȝ 120000. Et noua Apotome prima 400 − √ȝ 120000. Quadratum enim 160000. maioris nominis ſuperat quadratum 120000. minoris nominis quadrato 40000. cuius radix 200. longitudine commenſurabilis eſt maiori nomini, &c. Eademque ratio eſt de cæteris.

RVRSVS ſi vtrumque nomen dati Binomij per eundem quemuis numerum multiplicetur, aut diuidatur, producentur [b] eadem de cauſa duo nomina alterius Binomij eiuſdem ſpeciei: quę etiam nomina erunt alterius Apotomæ eiuſdem ſpeciei: [c] propterea quod duo numeri procreati eandem inter ſe proportionem habent, quam duo nomina propoſiti Binomij. V. g. Dato Binomio ſecundo √ȝ 48. + 6. ſi vtrumque nomen per 3. multiplicetur, fiet alterum Binomium ſecundum √ȝ 432 + 18. & alia Apotome √ȝ 432 − 18. Et ſi vtrumque nomen eiuſdem dati Binomij ſecundi √ȝ 48 + 6. diuidatur per numerum quemuis eundem 3. fiet iterum aliud Binomium ſecundum √ȝ 5 1/3 + 2. & alia Apotome ſecunda √ȝ 5 1/3 − 2. Quod ſi diuiſio fiat per 2. gignetur nouum Binomium ſecundum √ȝ 12 + 3. & noua Apotome ſecunda √ȝ 12 − 3 & ſic de alijs. *[b] 15. decim.* *[c] 17. ſepti.*

QVOD ſi quando iudicandum ſit de aliquo Binomio, vel reſiduo propoſito, quondam ſit ex prædictis ſex ſpeciebus, non erit id magni laboris. Nam ſi maius nomen fuerit numerus rationalis abſolutus, erit Binomium vel primum, vel quartum. Et ſi quidem, diuiſo quadrato maioris nominis per exceſſum, quo illud quadratum ſuperat quadratum nominis minoris, Quotiens fiat numerus quadratus, Binomium erit primum: Si vero Quotiens ſit numerus non quadratus, Binomium erit quartum. *Binomium vel Reſiduum propoſitum quodnam ſit ex 6 ſpeciebus iudicare.*

Si autem minus nomen fuerit abſolutus numerus rationalis, erit Binomium vel ſecundum, vel quintum Et ſi quidem, diuiſo quadrato maioris nominis per exceſſum, quo illud quadratum ſuperat quadratum minoris nominis, Quotiens gignatur numerus quadratus, Binomium erit ſecundum: Si vero Quotiens fiat numerus non quadratus, Binomium erit quintum.

Si denique neutrum nominum fuerit abſolutus numerus rationalis, ſed ſurdus, erit Binomium vel tertium, vel ſextum; Tertium quidem, quando diuiſo maioris nominis quadrato per exceſſum, quo illud quadratum ſuperat quadratum minoris nominis, Quotiens proueniat numerus quadratus: ſi vero Quotiens gignatur numerus non quadratus, Binomium erit ſextum. Idemque dices de Apotoma quacunque.

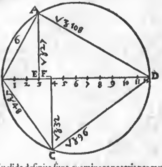
POSTREMO eſt etiam ſcitu non iniucundũ, vt Michael Stifelius aduertit, omnia ſex Binomia, ac proinde & Reſidua, vel Apotomas, reperiri in paucis lineis certo quodam artificio inter circulũ quemlibet deſcriptis. Sit enim circulus ABCD, cuius diameter BD, in tot æquales partes diſtribuatur, vt earum numerus tertiam & quartam partem habeat, nimirum in 12. Ex quarta parte diametri E, comprehendente ſcilicet BE, tres duodecimas diametri; atq; ex tertia parte diametri F, cõplectente videlicet BF, quatuor duodecimas diametri, erigãtur ad diametrum perpendiculares EA, FC, in diuerſas partes; iunganturque rectæ AB, BC, CD, DA. Harum omnium rectarum quantitates hoc modo cognoſcentur. [d] Quoniam AE, inter DE, EB, media eſt proportionalis; & CF, inter DF, FB: [e] erit tam quadratum ex AE, rectangulo ſub DE, EB, quam quadratum ex CF, rectangulo ſub DF, FB, æquale. Eſt autem rectangulum ſub DE, EB, hoc eſt, ex 9. in 3. productum 27. Igitur & quadratum ex AE, erit 27. ideoq; recta AE, √ȝ 27. Rectangulum autem ſub DF, FB, id eſt, ex 8. in 4. procreatum eſt 32. Igitur & quadratum ex CF, erit 32. & recta CF, √ȝ 32. *Qua ratione in circulo omnia 6. Binomia, & Apotomæ reperiantur.* *[d] coroll. 13. ſexti.* *[e] 17. ſexti.*

Deinde quia quadrata ex BE, EA, nimirum 9. & 27. conficiunt 36. [f] quibus æquale eſt quadratum ex AB; erit quadratum ex AB, 36. & recta ipſa AB, √ȝ 36. hoc eſt, 6. *[f] 47. primi*

Rurſus

a 47.primi Rurſus quia quadrata ex BF, FC, nimirum 16.& 32.efficiunt 48. a quibus æquale eſt quadratum ex BC: erit hoc quadratum 48.& recta ipſa BC, √ʒ48.

b 47.primi Item quadrata ex DF, FC, nimirum 64. & 32.conficiunt 96. b quibus quadratum ex CD, æquale: eſt erit hoc quadratum 96. & recta ipſa CD, √ʒ96.




c 47.primi Denique quia quadrata ex DE, EA, nimirum 81. & 27. efficiunt 108. c quibus quadratum ex DA, æquale eſt; erit hoc quadratum 108.& recta ipſa DA, √ʒ108.

IAM rectæ AB, AE, conſtituunt Binomium primum 6+√ʒ27.& Apotomam primam 6−√ʒ27.

Rectæ AD, DE, conſtituunt Binomium ſecundum √ʒ108+9.& ſecundam Apotomam √ʒ108−9.

Rectæ AD, DC, conſtituunt Binomium tertium √ʒ108+√ʒ96.& Apotomam tertiam √ʒ108−√ʒ96.

Rectæ BD, DC, conſtituunt Binomium quartum 12+√ʒ96.& quartam Apotomam 12−√ʒ96.

Rectæ DC, DF, conſtituunt Binomium quintum √ʒ96+8.& quintam Apotomam √ʒ96−8.

Rectæ denique BC, CF, conſtituunt ſextum Binomium √ʒ48+√ʒ32.& Apotomam ſextam √ʒ48−√ʒ32.

ESSE autem hæc 6. Binomia, ac Reſidua illa, quæ ab Euclide definita ſunt, examinare poteris per earum definitiones. Nam in prioribus tribus, ſi maiora nomina diuidantur per exceſſus, quibus eorum quadrata ſuperant quadrata minorum nominum, fiunt Quotientes numeri quadrati, ac proinde maiora nomina plus poſſunt, quam minora, quadratis, quorum radices maioribus nominibus longitudine ſunt commenſurabiles. Si vero in poſterioribus tribus maiora nomina diuidantur per exceſſus, quibus eorum quadrata ſuperant quadrata minorum nominum, fiunt Quotientes numeri non quadrati: ac proinde maiora nomina plus poſſunt, quam minora, quadratis, quorum radices maioribus nominibus longitudine ſunt incommenſurabiles. Cætera ex ſe manifeſta ſunt.

QVOD ſi diametrum BD, diuiſeris in alias partes, quarum numerus habeat partem tertiam, & quartam, vt in 24 vel 36. vel 48. vel 60. vel 204 vel 360. vel 480. vel 600. &c. inuenies eodem ordine alia 6. Binomia, & Apotomas.

## *DE EXTRACTIONE RADICVM EX BINOMIIS, & Apotomis. Vbi obiter de alijs lineis Irrationalibus, de quibus Euclides in lib. 10. diſputat.*

## CAPVT XXVIII.

*Cur nonnulli dicãt, non omnia Binomia habere radices.*

SVNT nonnulli, qui affirmant, ex ſolis prioribus tribus Binomijs, atque Apotomis radices quadratas elici poſſe. quod verum non eſt, & Euclidi omnino repugnat, vt mox oſtendemus: neque ſcio, quo modo excuſari poſſint, niſi dicatur, propterea eos poſteriora tria Binomia, atque Apotomas radicibus quadratis priuare, quod horum radices ſint valde perplexę & obſcuriores, quam ipſamet Binomia, atque Apotomæ: quippe cum ſint radices numerorum compoſitorum, quas Vniuerſales vocant, vt in exemplis patebit. Habere aut omnia Binomia atque Apotomas radices quadratas, quæ in ſe ductæ ipſa Binomia, atque Apotomas producant, euidenter ex propoſ. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. Item ex propoſ 92. 93. 94. 95. 96. & 97. lib. 10. Eucl. colligitur. In prioribus enim 6. propoſitionibus demonſtrat Euclides, quinam numeri in ſe multiplicati producant Binomia: (vocamus lineas Irrationales, numeros Irrationales.) in poſterioribus autem 6. propoſitionibus oſtendit, quinam numeri in ſe ducti Apotomas procreent. quod ita manifeſtum fiet. In propoſ. 55. ait, Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima: Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur. Quis autem neſcit, ſi Rationalis illa ſit vnitas, ſpatium illud comprehẽſum, eſſe Binomium primum; quippe cum vnitas multiplicans Binomium primum, producat ipſummet Binomium primũ? Numerus ergo potens Binomium primũ, hoc eſt, radix Binomij primi, eſt Binomium, ex ſententia Eucl. Eadẽ ratione ex ſequentibus quinque propoſ. infertur, radicem Binomij ſecundi eſſe lineam Irrationalem, quæ ex binis Medijs prima appellatur. Radicem autem Binomij tertij eſſe lineam Irrationalem, quæ ex binis Medijs ſecunda dicitur. Et radicem quarti Binomij lineam Irrationalem eſſe, quæ vocatur Maior. Ac radicem quinti Binomij eſſe lineam Irrationalem quæ Rationale & Medium potens appellatur. Radicem denique ſexti Binomij eſſe Irrationalem lineam, quę bina Media potens nominatur. Non aliter ex propoſ. 92. & ſequentibus quinque colligemus, radicem primæ Apotomæ eſſe Apotomen. Radicem vero Apotomæ ſecundæ eſſe Mediæ Apotomen primam. Radicem deinde tertiæ Apotomæ eſſe Mediæ Apotomen ſecundam. Et radicem Apotomæ quartæ eſſe lineam Irrationalem, quæ appellatur Minor. Radicem autem Apotomæ quintæ eſſe lineam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Denique radicem ſextæ Apotomæ lineam eſſe Irrationalem, quæ cum Medio Medium totum efficit. Non eſt igitur dubitandum, ex Euclidis ſententia omnia Binomia, omneſque Apotomas habere radices: cum tam perſpicue doceat, quo pacto cuiuſque Binomij, atque Apotomæ radix appelletur. Quod vt planius fiat, explicandæ ſunt obiter illæ lineæ Irrationales, quas demonſtrat radices eſſe Binomiorum, atque Apotomarum. Hactenus enim ſolum Binomium eiuſque ſex ſpecies, ſolamque Apotomen, eiuſque ſex genera, Item lineam Mediam, ſuperiori cap. expoſuimus.

*Omnia Binomia ſecundum Eucl. habere radices.*

*Radices 6. Binomiorũ quales lineæ, vel numeri Irrationales ſint.*

*Radices 6 Apotomarum, quales lineæ Irrationales, vel numeri ſint.*

QVEMAD-

QVEMADMODVM ergo [a] Binomium apud Eucl. est linea Irrationalis ex duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus composita: [b] ita si duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ rationale contineant, (Has lineas docuit inuenire propos. 27.) erit tota linea Irrationalis, quæ ex binis Medijs prima vocatur. Hanc nobis exhibebit radix Binomij secundi. [a] 37. deci. [b] 38. deci. *Ex binis Medijs prima.*

Et [c] si duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Medium contineant; (quæ quo pacto reperiantur, docuit propos. 29.) erit tota linea Irrationalis, quæ ex binis Medijs secunda dicitur. Eamque nobis præbebit radix tertij Binomij. [c] 39. deci. *Ex binis Medijs secunda.*

Et [d] si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsis quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: (quas inuenire docet propositione 34.) tota recta linea Irrationalis erit, quæ Maior vocatur. quam nobis offeret radix Binomij quarti. [d] 40. deci. *Linea Maior.*

Et [e] si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale; (quæ inueniuntur propos. 35) tota recta linea Irrationalis erit, quæ Rationale ac Medium potens nominatur. Hanc nobis demonstrabit radix Binomij quinti. [e] 41. deci. *Rationale, ac Medium potens.*

Si [f] denique duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum, (qua ratione huiusmodi lineæ reperiantur, docuit propos. 36) tota recta linea Irrationalis erit, quæ vocatur bina Media potens. Eamque nobis indicabit radix Binomij sexti. [f] 42. deci. *Bina Media potens.*

ITEM quemadmodum [g] Apotome apud Eucl. est linea Irrationalis, quæ reliqua est, si à Rationali auferatur Rationalis potentia tantum commensurabilis existens toti [h] Ita si à Media auferatur Media, potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; (quas quidem lineas propos. 28. reperit.) Reliqua linea Irrationails est, quæ Mediæ Apotome prima vocatur. Quam quidem profert radix Apotomæ secundæ. [g] 74. deci. [h] 75. deci. *Mediæ Apotome prima.*

Et [i] si à Media auferatur Media, potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat; (quæ lineæ propos. 29. inueniuntur) Reliqua linea Irrationalis est, quę Mediæ Apotome secunda appellatur. Hæc autem apparebit in radice Apotomæ tertiæ. [i] 76. deci. *Media Apotome secunda.*

Et [k] si à recta linea, auferatur recta potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium; (quas lineas propos. 34. reperit.) Recta linea reliqua irrationalis est, quæ Minor nominatur. Quæ quidem radix est Apotomæ quartæ. [k] 77. deci. *Linea Minor.*

Et [l] si à recta linea auferatur recta, potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale; (quas lineas inuenit propos. 35.) Reliqua linea irrationalis est, quæ cum Rationali Medium totum efficiens dicitur. Qualis est radix Apotomæ quintæ. [l] 78. deci. *Reliqua cũ Rationali Medium totum efficiens.*

Et [m] si tandem à recta detrahatur recta, potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis; (quæ lineæ propos. 36. inueniuntur.) Reliqua linea Irrationalis est, quæ cum Medio Medium totum efficiens appellatur. Quam nobis exhibet radix sextæ Apotomæ. [m] 79. deci. *Reliqua cũ Medio Medium totũ efficiens.*

HAS porro lineas Irrationales, vel potius numeros Irrationales (quas enim Euclides lineas nominat, nos numeros dicimus) plenius, perfectiusque declarabimus in radicibus Binomiorum, & Apotomarum.

Habes igitur ex Euclide tredecim numero lineas Irrationales inter se differentes, de quibus potissimum in lib. 10. agitur. Sunt autem hæ.

1. *Media.*
2. *Ex binis nominibus, cuius sex sunt species inuentæ.*
3. *Ex binis Medijs prima.*
4. *Ex binis Medijs secunda.*
5. *Maior.*
6. *Rationale ac Medium potens.*
7. *Bina Media potens.*
8. *Apotome, cuius etiam species sex sunt inuentæ.*
9. *Media Apotome prima.*
10. *Media Apotome secunda.*
11. *Minor.*
12. *Cum Rationali Medium totum efficiens.*
13. *Cum Medio Medium totum efficiens.*

QVOD si pro linea ex binis nominibus, sex Binomia; & pro Apotoma sex Apotomas accipias, habebis in vniuersum 23. lineas Irrationales apud Euclidem.

SED iam artem præscribamus, qua ex Binomijs, & Apotomis radices quadratæ eruantur: in quibus quidem naturæ prædictarum linearum Irrationalium planius percipientur.

PROPOSITO ergo Binomio, vel Residuo, cape differentiam quadratorum vtriusque nominis. Deinde radicem quadratam huius differentiæ tum maiori nomini adijce, tum ab eodem aufer. Tertio radicem quadratam semissis illius summæ connecte cum radice quadrata semissis illius relicti, per signum +. si propositum est Binomium, vel per signum −, si Residuum. Ita enim procreata erit radix Binomij, aut Residui.

ALII regulam hanc ita proponunt. Sume differentiam quadratorum semissium vtriusque nominis. Huius differentiæ radicem quadratam tum semissi maioris nominis adijce, tum ab eadem semisse subtrahe. Nam radix quadrata illius summæ connexa per signum +. vel − cum radice quadrata illius relicti, dabit radicem Binomij, vel Residui quæsitam.

ALII denique eandem ita proponunt. Ex quarta parte differentiæ quadratorum vtriusque nominis erue radicem quadratam. Hanc etiam si semissi maioris nominis adijcies, & ex summa radicem erues, procreabis priorem particulam quæsitæ radicis. Et si eandem hanc summam ex maiori nomine detrahes, dabit relicti

GG radix

radix quadrata posteriorem radicis quæsitæ particulam. Vtrisque igitur particulis per signum +, aut — copulatis totam radicem desideratam habebis.

*Radix Binomij primi est Binomium, & radix Residui primi est Residuum.*

Atque ita habes triplicem regulam pro eruenda radice ex dato Binomio, aut Residuo. quæ varijs iam exemplis elucidanda erit.

Sit Binomium primum 23 + √ʒ 448. ex quo per primam regulam radicem eliciemus hoc modo. Differentia quadratorum 529. & 448. vtriusque nominis est 81. cuius radicem 9. si maiori nomini 23. adijciemus, & ab eodem subtrahemus; faciemus summam 32. & reliquum numerum 14. Semisses summæ, & relicti numeri sunt 16. & 7. è quibus erutæ radices 4. & √ʒ 7. copulatæ per signum +. dabunt radicem 4 + √ʒ 7. propositi Binomij primi: ac proinde 4 — √ʒ 7. radix erit Residui primi 23 — √ʒ 448. quarum illa est Binomium, hæc autem Residuum, vt Euclides lib. 10. propos. 55. & 92. demonstrauit. Esse porro 4 + √ʒ 7. veram radicem Binomij primi 23 + √ʒ 448. & 4 — √ʒ 7. veram radicem Residui primi 23. — √ʒ 448. probari potest ex vtriusque radicis multiplicatione in se, vt hic patet.

4 + √ʒ 7<br>
4 + √ʒ 7<br>
\+ √ʒ 112 + 7<br>
\+ 16 + √ʒ 112<br>
Summa 23 + √ʒ 448

4 — √ʒ 7<br>
4 — √ʒ 7<br>
— √ʒ 112 + 7<br>
\+ 16 — √ʒ 112<br>
Summa 23 — √ʒ 448

*Radix Binomij secundi est linea ex binis Medijs prima: Et radix Residui secundi est Mediæ Apotome prima.*

Sit Binomium secundum √ʒ 448 + 14. ex quo per secundam regulam radix sic eruetur. Semisses nominum sunt √ʒ 112 & 7. quarum quadrata 112. 49. differentiam habent 63. cuius radix √ʒ 63. addita semissi √ʒ 112. maioris nominis, facit √ʒ 343. Detracta autem ab eadē semisse √ʒ 112. relinquit √ʒ 7. Ergo √ʒʒ 343 + √ʒʒ 7. erit radix Binomij secundi propositi. Et √ʒʒ 343 — √ʒʒ 7. radix erit Residui secundi √ʒ 448 — 14. Illa ex propos. 56. lib. 10. linea est Irrationalis ex binis Medijs prima. Hæc autem ex propos 93 lib. 10. Irrationalis linea est, quæ Mediæ Apotome prima dicitur. Itaque √ʒʒ 343. & √ʒʒ. 7. sunt duæ lineæ Mediæ, Rationale continentes, vt volunt propos. 38. & 75 lib. 10. Nam Irrationales sunt, quæ Mediæ dicuntur. Multiplicatæ vero inter se producunt √ʒʒ 2401. cuius radix zensizensica est 7. numerus Rationalis.

*Examen radicis inuentæ.*

√ʒʒ 343 + √ʒʒ 7<br>
√ʒʒ 343 + √ʒʒ 7<br>
\+ √ʒʒ 2401 + √ʒ 7<br>
\+ √ʒ 343 + √ʒʒ 2401<br>
Summa √ʒ 448 + 14

√ʒʒ 343 — √ʒʒ 7<br>
√ʒʒ 343 — √ʒʒ 7<br>
— √ʒʒ 2401 + √ʒ 7<br>
\+ √ʒ 343 — √ʒʒ 2401<br>
Summa √ʒʒ 448 — 14

*Radix Binomij tertij est linea ex binis Medijs secunda: Et radix Residui tertij est Mediæ Apotome secunda.*

Sit Binomium tertium √ʒ 448 + √ʒ 336. ex quo per regulam tertiam radix elicietur, hoc modo. Quarta pars differentiæ quadratorum 448. 336. est 28. cuius radix quadrata √ʒ 28 addita ad √ʒ 112. semissem maioris nominis facit √ʒ 252. ideoque prior particula radicis quæsitę erit √ʒʒ 252. Et si eadem summa √ʒ 252. dematur ex √ʒ 448. maiore nomine, reliqua fit √ʒ 28. ac proiode posterior particula quæsitæ radicis erit √ʒʒ 28. totaque radix Binomij tertij erit √ʒʒ 252 + √ʒʒ 28. & radix tertij Residui √ʒ 448 — √ʒ 336. erit √ʒʒ 252 — √ʒʒ 28. Illa ex propos. 57. lib. 10. est linaa Irrationalis. quæ ex binis Medijs secuoda dicitur. Hæc autem ex propos. 94. lib. 10. Irrationalis est linea, quæ Mediæ Apotome secunda dicitur Itaque iuxta doctrinam propos. 39. & 76. lib. 10. Eucl √ʒʒ 252. & √ʒʒ 28. duæ lineæ sunt Mediæ Medium continentes. Nam Irrationales quidem sunt, quę Mediæ dicuntur; inter se vero multiplicatæ prodncunt superficiem Mediam √ʒʒ 7056. hoc est √ʒ 84.

*Examen radicis inuentæ*

√ʒʒ 252 + √ʒʒ 28<br>
√ʒʒ 252 + √ʒʒ 28<br>
\+ √ʒʒ 7056 + √ʒ 28<br>
\+ √ʒ 252 + √ʒʒ 7056<br>
Summa √ʒ 448 + √ʒ 336

√ʒʒ 252 — √ʒʒ 28<br>
√ʒʒ 252 — √ʒʒ 28<br>
— √ʒʒ 7056 + √ʒ 28<br>
\+ √ʒ 252 — √ʒʒ 7056<br>
Summa √ʒ 448 — √ʒ 336

*Radix Binomij quarti est Linea Maior: Et radix Residui quarti est Linea Minor.*

Sit Binomium quartum 24 + √ʒ 448 ex quo radix extrahetur per primam regulam, hoc pacto. Differentia quadratorum 576. & 448. est 128. cuius radicem, nimirum √ʒ 128. maiori nomini 24. adijcio, facioque 24 + √ʒ 128 Eandem √ʒ 128. ab eodem maiore nomine 24. detraho, relinquoque 24 — √ʒ 128. Semissis illius summæ 24 + √ʒ 128. est 12 + √ʒ 32. semissis vero illius numeri relicti 24 — √ʒ 128. est 12 — √ʒ 32. Radix ergo Binomij quarti propositi est √ʒ (12 + √ʒ 32) + √ʒ (12 — √ʒ 32) Radix vero quarti huius Residui 24 — √ʒ 448. est √ʒ (12 + √ʒ 32) — √ʒ (12 — √ʒ 32.) Illa iuxta propos. 58. lib. 10. linea Irrationalis est, quæ Maior dicitur. Hæc vero ex propos. 95. lib. 10. Irrationalis linea est, quæ appellatur Minor. Itaq; ex præcepto propos. 40. & 77. lib. 10. √ʒ. (12 + √ʒ 32) & √ʒ (12 — √ʒ 32) sunt duæ lineæ potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale quod autem sub ipsis continetur, Medium. Esse enim potentia incommensurabiles, perspicuum est, cum earum quadrata 12 + √ʒ 32 & 12 — √ʒ 32. incommensurabilia sint. Quod etiam compositum ex hisce quadratis sit Rationale, patet cum conficiant simul sumpta numerum 24. Rationalem. Denique quod sub ipsis continetur,

netur, esse Medium, liquet, cum ex mutua earum multiplicatione gignatur superficies √ȝ 112. Media: cuius radix est √ȝȝ 112. linea media. Vbi obseruatu dignum est, duo incommensurabilia, qualia sunt quadrata 12 + √ȝ 32. & 12 — √ȝ 32. simul addita efficere summam 24. Rationalem.

*Duo incommensurabilia facere possunt summam Rationalem.*

*Examen radicis inuentæ pro Binomio quarto.*

√ȝ (12 + √ȝ 32) + √ȝ (12 — √ȝ 32)
√ȝ (12 + √ȝ 32) + √ȝ (12 — √ȝ 32)
12 + √ȝ 32 + 12 — √ȝ 32
√ȝ 112
√ȝ 112
√ȝ 448

Tota summa 24 + √ȝ 448. Binomium propositum.

Sit Binomium quintum √ȝ 448 + 12. Ex quo per 2. regulam extrahetur radix hac ratione. Semisses nominum sunt √ȝ 112. & 6. quarum quadrata 112. & 36. quorum differentia 76. cuius radix, √ȝ 76. semissi √ȝ 112. maioris nominis addita facit √ȝ 112 + √ȝ 76. Ab eadem autem semisse detracta relinquit √ȝ 112 — √ȝ 76. Radix ergo propositi Binomij quinti est √ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 76) + √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 76) Residui vero respondentis radix erit √ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 76) — √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 76) Illa per propos. 59. lib. 10. linea Irrationalis est, quæ Rationale, & Medium potens appellatur. Hæc vero ex doctrina propos. 96. lib. 10. linea Irrationalis est, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Itaq; ex doctrina propos. 41. & 78. lib. 10. √ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 76) & √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 76.) duæ lineæ sunt potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale. Esse enim potentia incommensurabiles, constat, cum earum quadrata incommensurabilia sint. Quod autem compositum ex ipsarum quadratis faciat Medium, perspicuum etiam est, cum earum quadrata √ȝ 112 + √ȝ 76. & √ȝ 112 — √ȝ 76. simul sumpta faciant √ȝ 448. superficiem Mediam, cuius radix est √ȝȝ 448. linea Media. Denique ex ipsarum multiplicatione inter se gigni Rationale, manifestum est, cum gignatur √ȝ 36. nimirum 6. Vbi quoque vides, duo incommensurabilia, videlicet √ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 76.) & √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 76) inter se multiplicata producere numerum Rationalem, nimirum √ȝ 36. hoc est, 6.

*Radix Binomij quinti est linea Rationale ac Medium potens. Et radix residui quinti est linea cũ Rationali Medium totũ efficiens.*

*Duo incommensurabilia inter se multiplicatã facere possunt numerum Rationalem.*

*Examen radicis inuentæ pro Residuo quinto:*

√ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 76) — √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 76)
√ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 76) — √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 76)
√ȝ 112 + √ȝ 76 — √ȝ 112 — √ȝ 76
— √ȝ 36. id est, — 6
— √ȝ 36. id est, — 6
— 12

Tota summa, √ȝ 448 — 12. Residuum quintum.

Sit denique Binomium sextum √ȝ 448 + √ȝ 352. ex quo per 3. regulam radix eruetur hoc modo. Quadratorum differentia est 96. cuius pars quarta 24. Huius radix, videlicet √ȝ 24. addita ad semissem maioris nominis, nimirũ ad √ȝ 112. facit summam √ȝ 112. + √ȝ 24. Ergo prior portio radicis quæsitæ est √ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 24.) Et si eandẽ summam √ȝ 112 + √ȝ 24. detrahas ex toto maiore nomine √ȝ 448. relinquetur √ȝ 112 — √ȝ 24 Nam √ȝ 112. dempta ex √ȝ 448 relinquit √ȝ 112. ex quo relicto si tollatur √ȝ 24. relinquetur √ȝ 112 — √ȝ 24. ideoque posterior portio radicis quæsitæ est √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 24) totaque radix Binomij sexti propositi, erit √ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 24) + √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 24.) Residui vero sexti respondentis radix erit √ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 24) — √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 24.) Illa concludente propos. 60. lib. 10 Irrationalis linea est, quæ bina Media potens nominatur. Hæc vero vt demostrat propos. 97. lib. 10. linea irrationalis est, quæ cum Medio Medium totum efficit. Itaque ex demonstratione propos. 42. & 79. lib. 10. duæ lineæ √ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 24) & √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 24) potentia incommensurabiles sunt, quæ faciunt & compositum ex ipsarum quadratis Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum. Quod enim potentia incommensurabiles sint, docent earum quadrata, quæ incommensurabilia sunt. Quadrata autem simul facere Medium, constat, cum simul faciant √ȝ 448. superficiem Mediam, cuius radix est √ȝȝ 448. Denique ex ductu vnius in alteram procreari etiam Medium, liquido constat, cum producant √ȝ 88. superficiem Mediam, cuius radix est √ȝȝ 88.

*Radix Binomij sexti est linea bina Media potens: Et radix Residui sexti est linea cum Medio Medium totũ efficient.*

*Examen radicis inuentæ pro Binomio sexto proposito.*

√ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 24) + √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 24)
√ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 24) + √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 24)
√ȝ 112 + √ȝ 24 + √ȝ 112 — √ȝ 24
√ȝ 88
√ȝ 88
352

Tota summa. √ 448 + √ȝ 352 Binomium propositum.

*Differentia quadratorum nominum radicis cuiuslibet Binomij & Residui, qua.*

IN quolibet autem Binomio, aut Residuo animaduertes, radicem differentiæ quadratorum vtriusque nominis, esse differentiam inter quadrata nominum radicis ipsius Binomij, vel residui. quod mirum cuipiam videri possit. quod in proximis 6. Binomijs experiri licet.

In primo Binomio 23 + √ȝ448. cuius radix inuenta est 4 + √ȝ7. Quadratum numeri 23. nimirum 529. superat quadratum 448. numero 81. cuius radix est 9. differentia videlicet inter quadrata nominum radicis, hoc est, inter 16. & 7.

In Binomio secundo √ȝ448 + 14. cuius radix inuenta fuit √ȝȝ343 + √ȝȝ7. Quadratum 448. superat 196 quadratum numeri 14. numero 252. cuius radix, nimirum √ȝ252. est differentia inter quadrata nominum radicis. Nam ea quadrata sunt √ȝ343. & √ȝ7. vt patet ex multiplicatione nominum √ȝȝ343. & √ȝȝ7. in se quadratè. Et si √ȝ7. dematur ex √ȝ343. reliqua fit √ȝ252.

In tertio Binomio √ȝ448 + √ȝ336. cuius radix inuenta fuit √ȝȝ252 + √ȝȝ28. Quadratum 448. superat quadratum 336. numero 112. cuius radix, videlicet √ȝ112. differentia est inter quadrata nominum radicis, quæ sunt √ȝ252. & √ȝ28. Constat autem √ȝ28. demptam ex √ȝ252. relinquere √ȝ112.

In quarto Binomio 24 + √ȝ448. cuius radix inuenta fuit √ȝ(12 + √ȝ32) + √ȝ(12 — √ȝ32.) Quadratum 576. numeri 24. superat quadratum 448. numero 128 cuius radix, nimirum √ȝ128. differentia est inter quadrata nominum radicis, hoc est, inter 12 + √ȝ32. & 12 − √ȝ32. vt in hac formula subtractionis apparet.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 | + | √ȝ | 32 |
| 12 | − | √ȝ | 32 |
| 0 | + | √ȝ | 128 |

Nam 12. ex 12. nihil relinquunt: sed −√ȝ32. ex + √ȝ32. (cum diuersa signa mutent speciem) relinquit √ȝ128. duplum scilicet √ȝ32. cum signo + superioris numeri.

In Binomio quinto √ȝ448 + 12. cuius radix inuenta fuit √ȝ(√ȝ112 + √ȝ76) + √ȝ(√ȝ112 − √ȝ76.) Quadratum 448. superat 144. quadratum numeri 12. numero 304. cuius radix, nimirum √ȝ304. differentia est inter quadrata nominum radicis, hoc est, inter √ȝ112 + √ȝ76. & √ȝ112 − √ȝ76. vt in hac apposita formula subtractionis apparet.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| √ȝ | 112 | + | √ȝ | 76 | |
| √ȝ | 112 | − | √ȝ | 76 | |
| | 0 | + | √ȝ | 304 | |

Nam √ȝ112. ex √ȝ112. nil relinquit. At −√ȝ76. ex + √ȝ76. (cum diuersa signa mutent speciem) relinquit √ȝ304. duplum videlicet √ȝ76. cum signo + superioris numeri.

In Binomio denique sexto √ȝ448 + √ȝ352. cuius radix inuenta fuit √ȝ(√ȝ112 + √ȝ24) + √ȝ(√ȝ112 − √ȝ24.) Quadratum 448. superat quadratum 352. numero 96 cuius radix, nimirum √ȝ96. differentia est inter quadrata nominû radicis, hoc est, inter √ȝ112 + √ȝ24. & √ȝ112 − √ȝ24. vt in apposita formula subtractionis manifestum est.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| √ȝ | 112 | + | √ȝ | 24 |
| √ȝ | 112 | − | √ȝ | 24 |
| | 0 | + | √ȝ | 96 |

Nam √ȝ112. ex √ȝ112. nil relinquit. At −√ȝ24 ex + √ȝ24. (cum diuersa signa mutent speciem) relinquit √ȝ96. duplum videlicet √ȝ24 cum signo + numeri superioris.

Idem experieris in quouis alio Binomio, vel residuo, & eius radice.

*Pulchra ratio multiplicãdi Binomij, vel Residui in se.*

EX hoc colligitur facilis ratio multiplicandi quodcunque Binomium, aut Residuum in se quadrate, quæ talis est. Proposito Binomio, vel Residuo, accipiatur summa quadratorum duarum particularum Binomij, vel Residui, pro prima portione numeri producti. Deinde à quadrato dictæ summa detrahatur quadratum differentiæ quadratorum earundem particularum Binomij, vel Residui. Radix enim reliqui huius numeri erit altera portio producti numeri. Vt Binomium √ȝ50 + 6. ductũ in se, facit 86 + √ȝ7200. Nã duo quadrata 50. & 36. faciunt 86. priorẽ particulam numeri producti.

| | | | |
|---|---|---|---|
| √ȝ | 50 | + | 6 |
| 86 | + | √ȝ | 7200 |

Et quadratum 7396. numeri inuenti 86. superat 196 quadratum numeri 14. nimirum differentiæ inter quadrata 50. & 36. numero 7200. cuius radix, nimirum √ȝ.7200. dabit posteriorem particulam numeri producti: adeo vt quadratum Binomij √ȝ50 + 6. sit 86 + √ȝ7200, quandoquidẽ quadratum 7396. prioris portionis 86. superat 7200. quadratũ posterioris portionis, numero 196. cuius radix 14. est differẽtia inter quadrata 50. & 36.

Eadem ratione quadratum Residui √ȝ50 − 6 erit 86 − √ȝ7200.

Ita quoque Binomium √ȝ50 + √ȝ6. ductũ in se faciet 56 + √ȝ1200. quia quadratum 3136. prioris portionis 56. superat 1200. quadratũ √ȝ1200. portionis posterioris numero 1936. cuius radix 44. differentia est quadratorum 50. & 6. Atq; ita de cæteris.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| √ȝ | 50 | + | √ȝ | 6 |
| 56 | + | √ȝ | 1200 | |

TRADITVR ab auctoribus nonnullis alia ratio facilis eruendæ radicis ex proposito Binomio, vel Residuo, quam visum est hoc loco explicare, si tamen prius Lemma sequens ostendero.

## LEMMA.

*Lemma.*

*DATVM numerum in duas partes secare, vt numerus, qui ex mutua earum multiplicatione producetur, æqualis sit dato numero, qui maior non sit quadrato semissis dati numeri, qui diuidendus est, vel (quod idem est) quarta parte quadrati totius numeri diuidendi.*

*SIT V.g. numerus 20. in duas partes secandus, quæ inter se multiplicatæ producant numerum 75. qui minor est quadrato 100. semissis numeri 20. propositi vel minor, quam 100 quadrata pars quadrati 400. dati numeri 20. Ex 100. quadrato semissis numeri diuidendi auferatur datus numerus producendus 75. Et reliqui numeri 25. radix quadrata 5. tum addatur ad semissem numeri propositi, nimirum ad 10. tum ab eadem semisse detrahatur. Nam summa confecta 15. & numerus reliquus 5. erunt quæsitæ partes numeri propositi 20. quæ inter se multiplicatæ procreant datum numerum 75. Huius praxis hæc est demonstratio. Sit numerus 20. AB, propositus diuisus in partes AD, DB, sua multiplicatione producentes datum*

A.......... C..... D ..... B

*numerum*

*numerum 75. quæ partes ita fient cognitæ. Diuiso numero AB, bifariam in C; a erit productus ex AB, in DB, vna cum quadrato ex CD, æqualis quadrato 100. semissis CB. Igitur si datus numerus 75. factus ex AD, in DB, dematur ex quadrato 100. semissis* a 5. secundi *CB, reliquus erit quadratus ex CD, 25. cuius radix 5. dabit rectam CD, quæ addita semissi AC, conficiet maiorem partem AD, 15. Et detracta ex semisse CB, reliquam faciet partem minorem DB, 5.*

*Sit rursus numerus √ζ 80. diuidendus in duas partes, ita vt inter se multiplicatæ faciant 1. Semissis dati numeri est √ζ 20. A quadrato cuius, nimirum à 20. detrahatur numerus 1. producendus. Ac reliqui numeri 19. radix, nimirum √ζ 19. addatur, & dematur ex semisse √ζ 20. propositi numeri: fientque partes quæsitæ √ζ 20 + √ζ 19. & √ζ 20 — √ζ 19. quæ inter se multiplicatæ gignunt 1. vt præcedens formula docet detrahendo videlicet quadratum 19. ex quadrato 20. vt cap. 23. ante exempla Diuisionis docuimus.*

$$\begin{array}{rcl} √ζ\ 20 & + & √ζ\ 19 \\ √ζ\ 20 & - & √ζ\ 19 \\ \hline & 1 & \end{array}$$

*Item sit numerus √ζ 80. diuidendus in duas partes, quæ inter se multiplicatæ faciant √ζ 5. Semissis numeri √ζ 80. est √ζ 20 à cuius quadrato 20, si subtrahatur √ζ 5. remanebunt 20 — ζ√5. cuius radix, nimirum √ζ (20 — √ζ 5.) addita ad semissem √ζ 20. dati numeri √ζ 80. faciet maiorem partem √ζ 20 + √ζ (20 — √ζ 5) dempta vero ex eadem semisse √ζ 20 relinquet minorem partem √ζ 20 — √ζ (20 — √ζ 5.) quæ partes inter se multiplicatæ faciunt √ζ 5. vt in hac formula apparet. Nam vt ex cap. 23. patet, multiplicatio fiet, si quadratum 20 — √ζ 5. posterioris partis ex 20. quadrato prioris partis auferatur. Auferetur autem iuxta hanc alteram formulam. quia 20. ex 20. nihil relinquunt, & vt — √ζ 5. tollatur ex + √ζ 0 mutatur species, fitque additio cum signo +. superioris numeri √ζ 0.*

$$\begin{array}{rcl} √ζ\ 20 & + & ζ√\ (20 - √ζ\ 5) \\ √ζ\ 20 & - & √ζ\ (20 - √ζ\ 5) \\ \hline & ζ√\ 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 20 & + & √ζ\ 0 \\ 20 & - & √ζ\ 5 \\ \hline 0 & + & √ζ\ 5 \end{array}$$

*Postremo sit 1 ζ. diuidẽdus in duas partes, quæ inter se multiplicatæ faciant 1 ζ. hoc est, (& in idẽ recidit,) ita vt 1 ℞ sit medio loco proportionalis inter illas duas partes. Semissis 1 ζ. est ½ ζ. cuius quadratũ est ¼ ζζ ex quo tollemus 1 ζ. qui produci debet, remanebitq; ¼ ζζ — 1 ζ. cuius radix, nimirũ √ζ (¼ ζζ — 1 ζ) addita ad semissem 1 ζ. id est, ad ½ ζ faciet vnam partẽ quæsitam ½ ζ + √ζ (¼ ζζ — 1 ζ.) Et ablata ex eadẽ semisse, reliquam faciet alteram partẽ ½ ζ — √ζ (¼ ζζ — 1 ζ.) quæ partes inter se multiplicatæ faciunt 1 ζ. vt in hac formula apparet. Nam multiplicatio fiet, vt ex superioribus patet, si ¼ ζζ — 1 ζ. quadratum posterioris portionis detrahatur ex ¼ ζζ quadrato portionis prioris. Detrahetur autem iuxta hanc alteram formulam quia ¼ ζζ ex ¼ ζζ nil relinquit. Et vt — 1 ζ. subtrahatur ex + 0 ζ. mutatur species operationis, fitq; additio, cum signo + superioris numeri 0 ζ. Hoc Lemma absoluemus etiam per Algebram ænigmate 23. capitis 30.*

$$\begin{array}{rcl} \tfrac{1}{2}\ ζ & + & √ζ\ (\tfrac{1}{4}\ ζζ - 1\ ζ) \\ \tfrac{1}{2}\ ζ & - & √ζ\ (\tfrac{1}{4}\ ζζ - 1\ ζ) \\ \hline & 1\ ζ & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \tfrac{1}{4}\ ζζ & + & 0\ ζ \\ \tfrac{1}{4}\ ζζ & - & 1\ ζ \\ \hline 0 & + & 1\ ζ \end{array}$$

DEMONSTRATO, & exemplis illustrato hoc Lemmate, eruemus, radicem ex quolibet Binomio, Residuoue, hac facili via. Diuidatur per Lemma antecedens maius nomen in duas partes, quæ inter se multiplicatæ procreent numerum æqualem quartæ parti quadrati nominis minoris. Radices namque harum partium copulatæ per signum + pro Binomio, vel per signum — pro Residuo, radicem quæsitam exhibebunt.

*Alia via extrahendæ radicis ex dato Binomio, vel Residuo.*

Sit enim Binomium primum 20 + √ζ 300. Secetur maius nomen 20. in duas partes, quæ inter se multiplicatæ faciant 75. qui numerus quarta pars est quadrati 300. minoris nominis. Erit vna pars 15. & altera 5. Igitur √ζ 15 + √ζ 5. radix est dati Binomij, quæ in se ducta (quod facile fiet ea ratione, quam ante Lemma præcedens explicauimus) producet Binomium datum 20 + √ζ 300.

Sit rursus Binomium primum 38 + √ζ 288. Maius nomen 38. secabitur in duas partes sua multiplicatione producentes 72. quartam partem quadrati 288. minoris nominis: hoc modo. Semissis maioris nominis est 19. à cuius quadrato 361. si detrahatur dicta quarta pars 72. reliquus fit numerus 289. cuius radix 17. addita semissi prædictæ 19. & ab eadem subtracta facit partes quæsitas 36. & 2. Ergo √ζ 36. hoc est, 6 + √ζ 2. radix est Binomij propositi. quod ex eius ductu in se examinari potest. Quadrata enim 36. & 2. nominum faciunt 38. maius nomen. Et si ex eius quadrato 1444. dematur 1156. quadratum differentiæ quadratorum 36 & 2. nimirum quadratum numeri 34. remanebit numerus 288. Ergo √ζ 288. erit nomen minus, ita vt Binomium sit 38 + √ζ 288.

SIT præterea Residuum secundum √ζ 18 — 4. Maius nomen √ζ 18. secetur in duas partes, quarum vna in alteram faciat 4. quartam Partem quadrati minoris nominis — 4. hoc modo. Semissis maioris nominis est $\frac{\sqrt{ζ}\,18}{2}$. à cuius quadrato $\frac{18}{4}$. si detrahatur dicta quarta pars 4. remanebit ½. cuius radix, hoc est, √ζ ½. addita ad √ζ $\frac{18}{4}$. facit √ζ 8. pro priori parte: ablata vero ex eadem semisse, relinquit √ζ 2. pro posteriore parte. Est ergo √ζζ 8 — √ζζ 2. radix Residui propositi. vt hic probatum esse vides, per multiplicationem radicis in se quadrate. Nam in partialibus productis, √ζ 8. & √ζ 2. faciunt √ζ 18. Deinde — √ζζ 16. id est, — 2. duplicata facit — 4.

$$\begin{array}{rrcl} & √ζζ\ 8 & - & √ζζ\ 2 \\ & √ζζ\ 8 & - & √ζζ\ 2 \\ \hline & - √ζζ\ 16 & + & √ζ\ 2 \\ + √ζ\ 8 & - √ζζ\ 16 & & \\ \hline & √ζ\ 18 & - & 4 \end{array}$$

Detur quoque Binomium tertium $\surd\mathfrak{z}\,32+\surd\mathfrak{z}\,24$. Maius nomen $\surd\mathfrak{z}\,32$. secabitur in duas partes producentes 6. quartam partem quadrati 24. minoris nominis hoc modo. Semissis maioris nominis est $\surd\mathfrak{z}\,8$. à cuius quadrato 8. detracta dicta quadrata pars 6. relinquit 2. cuius radix, nimirum $\surd\mathfrak{z}\,2$. addita, & subtracta à semisse prędicta $\surd\mathfrak{z}\,8$. facit partes $\surd\mathfrak{z}\,18$. & $\surd\mathfrak{z}\,2$. Ergo radix Binomij est $\surd\mathfrak{zz}\,18+\surd\mathfrak{zz}\,2$. Hæc enim in se ducta quadrate, vt hic patet, producit Binomium $\surd\mathfrak{z}\,32+\surd\mathfrak{z}\,24$. Nam in partialibus productis $\surd\mathfrak{z}\,18$ & $\surd\mathfrak{z}\,2$. faciunt $\surd\mathfrak{z}\,32$. & $\surd\mathfrak{z}\,6$. duplicata facit $\surd\mathfrak{z}\,24$.

$$\begin{array}{r}
\surd\mathfrak{zz}\,18+\surd\mathfrak{zz}\,2\\
\surd\mathfrak{zz}\,18+\surd\mathfrak{zz}\,2\\
\hline
+\surd\mathfrak{z}\,6+\surd\mathfrak{z}\,2\\
\surd\mathfrak{z}\,18+\surd\mathfrak{z}\,6\qquad\qquad\\
\hline
\surd\mathfrak{z}\,32+\surd\mathfrak{z}\,24
\end{array}$$

Sit rursus Binomium primum $72+\surd\mathfrak{z}\,2880$. Maius nomen 72. secabitur in duas partes producentes 720. quartam partem quadrati 2880. minoris nominis, hac ratione. Semissis maioris nominis 72. est 36. à cuius quadrato 1296. detracta quarta pars prædicta 720. relinquit 576. cuius radix 24. addita ad semissem nominatam 36. & detracta ab eadem, facit partes quæsitas 60. & 12. Ergo radix Binomij est $\surd\mathfrak{z}\,60+\surd\mathfrak{z}\,12$. quod hic probatum est per multiplicationem radicis in se quadratè.

$$\begin{array}{r}
\surd\mathfrak{z}\,60+\surd\mathfrak{z}\,12\\
\surd\mathfrak{z}\,60+\surd\mathfrak{z}\,12\\
\hline
+\surd\mathfrak{z}\,720+12\\
60+\surd\mathfrak{z}\,720\qquad\\
\hline
72+\surd\mathfrak{z}\,2880
\end{array}$$

Sit quoque elicienda radix ex hoc residuo sexto $\surd\mathfrak{z}\,60-\surd\mathfrak{z}\,12$. Maius nomen $\surd\mathfrak{z}\,60$. distribuetur in duas partes producentes 3 quartam partem quadrati 12. minoris nominis, hoc pacto. Semissis maioris nominis, $\surd\mathfrak{z}\,60$. est $\surd\mathfrak{z}\,15$. à cuius quadrato 15. detracta nominata pars quarta 3. relinquit 12. cuius radix $\surd\mathfrak{z}\,12$. addita ad semissem $\surd\mathfrak{z}\,15$. prædictam, & ab eadem sublata facit partes $\surd\mathfrak{z}\,15+\surd\mathfrak{z}\,12$. & $\surd\mathfrak{z}\,15-\surd\mathfrak{z}\,12$. Ergo radix dicti Residui sexti est $\surd\mathfrak{z}\,(\surd\mathfrak{z}\,15+\surd\mathfrak{z}\,12)-\surd\mathfrak{z}\,(\surd\mathfrak{z}\,15-\surd\mathfrak{z}\,12)$ quod hic probatum est.

$$\begin{array}{rl}
 & \surd\mathfrak{z}\,(\surd\mathfrak{z}\,15+\surd\mathfrak{z}\,12)-\surd\mathfrak{z}\,(\surd\mathfrak{z}\,15-\surd\mathfrak{z}\,12)\\
 & \surd\mathfrak{z}\,(\surd\mathfrak{z}\,15+\surd\mathfrak{z}\,12)-\surd\mathfrak{z}\,(\surd\mathfrak{z}\,15-\surd\mathfrak{z}\,12)\\
\hline
\text{Quadrata partium.} & \surd\mathfrak{z}\,15+\surd\mathfrak{z}\,12\ \&\ \surd\mathfrak{z}\,15-\surd\mathfrak{z}\,12\\
 & \qquad -\surd\mathfrak{z}\,3\\
 & \qquad -\surd\mathfrak{z}\,3\\
\hline
\text{Summa.} & \surd\mathfrak{z}\,60-\surd\mathfrak{z}\,12
\end{array}$$

Nam quadrata partium faciunt $\surd\mathfrak{z}\,60$. nimirum duplum $\surd\mathfrak{z}\,15$. Et ex vna parte $\surd\mathfrak{z}\,(\surd\mathfrak{z}\,15+\surd\mathfrak{z}\,12)$ in alteram $-\surd\mathfrak{z}\,(\surd\mathfrak{z}\,15-\surd\mathfrak{z}\,12)$ fit $-\surd\mathfrak{z}\,3$. quippe cum quadratum 12 ex quadrato 15. subductum relinquat 3. cui præponendum est signum $\surd\mathfrak{z}$. cum signo $-$. propter Residuum. Duplum autem $-\surd\mathfrak{z}\,3$. facit $-\surd\mathfrak{z}\,12$.

## SCHOLIVM.

*EMERSIMVS tandem ex numerorum Cossicorum, & Irrationalium multiplici difficultate, & ingenti eorum tractationis pelago, si minus commoda, felici tamen (nisi mea me fallit opinio) velificatione vecti superauimus; & aliquando portum per tot difficultatum æstus ac turbines, per tam multarum rerum maria prolapsi tenemus; quodque ad diuinam opem est referendum, integri atque incolumes tenemus. Iuuat nunc, velut in otio & quiete, eorum meminisse, quæ paulo ante ferre pigebat. Alia enim nobis vndarum spatia sunt enauiganda, quorum tamen laborem, si quis erit, præteritorum iucunda commemoratio leuabit, vt spero maxime. Iuuat, inquam, paulisper in eorum numerorum, qui hactenus explicati sunt, Algorithmi iucundissimo æque, atque vberrimo fructu tantisper immorari. Quota enim eius pars, quota præteriti laboris veluti merces periret, nisi in ipsius Algorithmi fructu exigendo operæ aliquid, ac temporis poneremus? Primo igitur ænigmata quædam, cap. nimirum 29. quod proxime sequitur, & 30. erunt soluenda, siue mauis, problemata quædam numerorum, quos vocant abstractos, eorum nimirum, qui ad res materiales, qualia sunt commercia, & mercatorum negotiationes, vel ad alias rerum aliarum quæstiones non contrahuntur. Quod & Alexandrinus Diophantus (egregius in primis scriptor, & de tota Algebra scientia, quam qui optime, meritus) & alij grauissimi scriptores iam ante præstiterunt. Hæc enim siue ænigmata, siue problemata placet appellare, ad speculatiuam Arithmeticam spectant: quæ quidem scientia quantum dignitate præstet inter reliquas, concors omnium vox non obscure testatur. Nam & theorematum, & problematum numerorum abstractorum, quæ in ea demonstrantur, varietate tam multiplex, multitudine tam copiosa est, vt huiusmodi ænigmatum tractatio maximam addat & dignitatem, & vero perficiat etiam quodammodo eam scientiam, quæ de numeris est. Quam multa enim ea problemata sunt, quæ ei suppeditat quorum nulla esset cognitio penes nos, neque extrahi e tenebris vnquam possent, nisi Algebræ institutio, veluti lumen, accederet? At enim otiosa sunt, neque vllam habẽt huiuscemodi problemata vtilitatem. Quid quod non vtilitatem solum, sed & iucunditatem spectare aliquando, sapientis esse putamus, neque ab honestate alienum. Ista enim si ratio placet, cedo quid est, cur decem Iordani libros de numeris admittamus? Quid, cur theoremata quam plurima, & problemata numerorum ab Euclide lib. 7. 8. & 9. demonstrata probemus, in ijs legendis insistamus, delectemur, eadem summa cum admiratione persequamur? Quis in illis tantus vsus est, quæ tanta, tam spectata vtilitas, quæ non tota insit & nostris? Quantum ista vox non de harum modo splendore ac dignitate, sed de omnium scientiarum honestate, si admittatur, detractura est? Inest enim profecto hoc disciplinis ijs omnibus, quæ quoniam nunquam in vsum exeunt, totæque in veritatis contemplatione occupantur, speculatiuæ dicuntur, vt mentem sua honestate exornent, principem animi facultatẽ, nempe intelligendi vim, augeant, atq; perficiant, delectent ipsæ per sese, totumque, vt ita dicã, hominem mira quadam sui iucunditate perfundant. Verum enimuero ne illud quidẽ dissimulandum est, quod suo loco fiet apertius, existere etiam horum problematũ maximos fructus, & vtilitates, non in Geometricis modo, sed in alijs quoque facultatibus, artibusque*

*Qui ordo seruetur in ænigmatibus per Algebram soluendis.*

*permultis quanquam non tantam vtilitatis ducendam rationem putamus, vt si hæc desit, nulla continuo sit cuiusque facultatis dignitas, & honestas. Hæc ideo te quam paucis monitum volui, amice Lector, vt remota omni suspicionum caligine, expeditos animos afferas ad ea, quæ duobus sequentibus cap. ænigmata proponentur; excussoque procul metu omni, ac mærore abiecto, faciliorem te, & hilariorem his euoluendis nobis præstes. Post duorum capitum ænigmata, exempla varia cap. 31. subiiciemus, in ijs tamen numeris, qui ad materiam contracti sunt, vbi etiã quæstiones nonnullas, quæ ad secundas radices spectant, accipies. Capite demum 32. multiplices de rebus Geometricis quæstiones in medium afferemus. Facile autem ænigmatum multitudinem sustinebit is, cui, quam tandem ob causam producantur, constabit. Neque enim illud solum laboramus, vt proposita à nobis quæstiones dissoluantur, sed illud præterea curandum nobis esse duximus, vt alias quoque illis similes ab alijs quocunque tempore dissoluendi modus intelligatur: quem certe modum ex horum ænigmatum solutione quiuis vel nullo negotio colliget. Quare neque illud omisimus, vt ita ænigmata omnia, omnes quæstiones solutas daremus, vt studiosus Lector peculiare in ijs enodandis Algebræ artificium facile dignosceret. Singulas enim operationes quasi oculis subiecimus, ne hæsitandum foret in singulis, aut superiora præcepta singulis interuallis repetenda. Quæ ratio est, quare Algebram ita obscuram, & tenebricosam plerique autument, vt ad paucos, aut etiam ad fere neminem eius intelligendæ vim pertinere confirment. Id enim in plerisque eius scriptoribus desideratum animaduerti, quod mihi maxime curandum fuit, vt quam aptissime omnia proferrentur: Neque, vt monuit olim Lyricus Poeta, laboro breuis esse, dummodo obscurus ne sim: Et volens libenique verbositatis notam subire me patiar, cæteris vt apertissima per me omnia fiant. Maior tamen ex ænigmatũ sequentiũ explicatione voluptas vt deriuetur, præstabit tu, veluti sese exercendi causa, ad quæstionũ normam examinare perinde ac nulla eorũ explicatio hactenus fuisset allata; interdum etiam numeros & exempla alia, quam ea, quæ ibi subiciuntur, eorum loco subrogando. Atque vt plurima ænigmata adscripsimus, quæ omnino, nisi per Algebram nequeunt explicari, ita etiam non pauca de industria inseruisse voluimus, quæ etiam sine Algebra solui posse non inficiamur. Placuit tamen ea cæteris apponere, non vt alijs artibus sublata vellemus, sed vt expeditiorem, celeriorem, iucundioremque ea indagandi Algebræ methodum agnosceremus. Etenim, quod in alijs fit, vt totidem ferme leges, totidemque præcepta tradantur, quot sunt ænigmata cognoscenda, singulisque ænigmatibus, non nisi singula ac sua leges aptentur, & vna lex vni tantum ænigmati expediendo respondeat; id longe facilius, aduocata Algebra dabit effectum. Vna enim eademque lege, via, ac methodo vniuersa fere semper soluta præstabit, eamque nobis molestiam eximet, quam multiplex illa regularum varietas nõ afferre non potest: Vt vel hac vna laude, si cætera (quæ nec pauca sunt, nec leues) desint, aliis omnibus Arithmeticæ regulis Algebra antecellat. Vix enim quæstione oblata, ipsa etiam ratio eam explicandi in Algebra sese dat in conspectum; & pene ipsa quæstio viam indicat, qua ipsam, veluti diu insecuti, tandem assequamur. Quod quidem, si regulam falsi demas, nullius omnino est aliarum. Habet hoc igitur Algebra præ cæteris singulare, quod multas ipsa sola quæstiones suis legibus soluat, de quibus aliæ vel non laborant, vel si laborent, nihil efficiunt: Et quod eas quæ ab alijs quoque aliquando longis ambagibus, & veluti in tenebris deprehenduntur, ipsa quasi per compendia, & luce clara perficiat. Cæterum illud te non celabo, studiose Lector, permulta à nobis afferri ænigmata, quibus si alij, atque alij subinde numeri supponantur, eorum haberi solutio non possit. Non tamen in longum abibis, quin sentias, solui quæ possint, quæque non possint. Id te ipsa eadem docebit operatio, quam ad aperiendam quæstionem adhibere oportebit. Vbi enim æquatio inter duos inæquales omnino inter se numeros incidet, eius quæstionis solutio nulla esse poterit. Quam nos esse rationem diximus, quare Algebra regula eatenus vniuersis alijs Arithmeticæ præceptionibus præstet. Frequentissimum quippe est, vt huiusmodi aliqua quæstio, quæ inextricabiles omnino nodos habeat, Algebræ imperito obiiciatur, quam ille per summum laborem, summamque & animi, & corporis contentionem, soluere nequicquam conabitur: & repetito iterum, iterumque studio, tempus æque atque operam omnem suam pessum ire imprudens patietur. A quo certe procul abest Algebræ studiosus, cui ipsa operatio, quæ possint, quæ vero non possint solui, quæstiones indicabit. Quantum igitur hoc est, quo Algebræ studiosus gloriari iure potest, vt obfirmato animo, constantique sententia, proposita quæstio solui queat, nec ne, nihil hæsitans, nec dubia voce pronunciet?*

---

## *ÆNIGMATA VARIA NVMERORVM ABstractorum per Algebram enucleanda, in quibus æquatio inter duos tantum numeros occurrit: quæ quidem simplex æquatio dicitur.*

## CAPVT XXIX.

IN hoc cap. afferemus ænigmata, in quibus occurrunt simplices æquationes. In sequenti vero ænigmata proponemus, in quibus compositæ æquationes reperiuntur. Quid porro sit æquatio simplex, quid composita, ad finem cap. 13. declarauimus. Hinc igitur exordiamur.

1 *Datum numerum quemcunque diuidere in duas partes se mutuo superantes in dato excessu quocunque.* I.

Sit numerus 100. diuidendus in duas partes, quarum excessus, vel differentia sit 40. Ponatur minor pars 1℞. ac proinde maior 100 — 1℞. Detracta 1℞ ex 100 — 1℞ remanent 100 — 2℞. vt hic vides. Eritque inuenta æquatio inter 100 — 2℞. & 40. quippe cum dempta minore parte ex maiore, relinqui debeant 40. Additis vtrinque 2℞. erit æquatio inter 100. & 40 + 2℞. Et vtrinque ablatis 40. æquatio erit inter 60. & 2℞. Si ergo ex præscripto regulæ Algebræ diuidantur 60. per 2. inuenietur 1℞. esse 30. atque hæc est minor pars. Ergo maior erit 70. nimirum 100 — 30. quæ maior pars etiam habebitur, si ad minorem

```
100 — 1 ℞
    + 1 ℞
---------
100 — 2 ℞
```

norem 30. adiiciatur differentia proposita 40. Vides ergo maiorem partem 70. superare minorem 30. numero 40. vt propositum est.

QVOD si statuamus, maiorem partem esse 1℞. & minorem 100 — 1℞. subtrahemus 100 — 1℞. ex 0 + 1℞. vt hic vides. remanebuntque — 100 + 2℞. hoc est, 2℞ — 100. Nam subtracta + 0. ex + 100. remanent — 100. quod præpostere positi sint numeri, ideoque ex + fiat —. &c. Hic ergo numerus reliquus 2℞ — 100. æqualis esse debet dato excessui 40. Additis igitur 100. vtrinque, erit æquatio inter 2℞. & 140. Et diuisis 140. (vt præcipit regula Algebræ) per 2. fiet 1℞ 70. quæ maior pars erit, ac propterea minor 30. nimirum 100 — 70.

| | |
|---|---|
| | 0 + 1 ℞ |
| | 100 — 1 ℞ |
| — | 100 + 2 ℞ |

SOLVETVR idem hoc ænigma hac alia ratione. Ponatur minor pars 1℞. ideoque maior 1℞ + 40. superans nimirum minorem numero 40. Ambæ partes simul efficiunt 2℞ + 40. qui numerus æqualis debet esse dato numero 100. Demptis vtrinque 40. erit æquatio inter 2℞. & 60. Diuisis ergo 60. per 2. erit 1℞ 30. minor scilicet pars, ideoque maior 70. vt prius.

QVOD si maior pars ponatur 1℞. ideoque minor 1℞ — 40. vt illa hanc excedat numero 40. Ambæ partes simul efficient 2℞ — 40. quæ summa æqualis est dato numero 100. Additis 40. vtrinque, erit æqualitas inter 2℞. & 140. Diuisisq; 140. per 2. fiet 1℞ 70. pro maiore parte, ideoque minor erit 30. vt supra.

## SCHOLIVM.

*Diuisio numeri Cossici in duas partes dati excessus.*

*VSV interdum venit, vt numerus aliquis Cossicus, nimirum 1℞. vel 10℞. vel 1ʒ. vel 6ʒ. &c. in duas partes diuidendus sit, quæ se dato numero excedant: vt ænigmate 61. manifestum erit. Quæ res siue Algebra (nam per Algebram vix fieri potest) hunc in modum perficietur. Ex dato numero Cossico detrahatur datus numerus per signum —. Semissis namque huius numeri diminuti erit minor pars, cui si per regulam additionis cap. 4. traditam addatur idem numerus datus, habebitur maior pars.*

*SIT enim 1℞ diuidenda in duas partes, quarum maior minorem superet 20. vnitatibus. Deme 20. ex 1℞. & ad ½℞ — 10. semissem residui 1℞ — 20. adde 20. faciesque ½℞ + 10. vt in formula apposita vides. Partes sunt ½℞ — 10. & ½℞ + 10. quarum hæc illam superat numero 20. & ambæ conficiunt 1℞.*

| | | |
|---|---|---|
| ½ ℞ | — | 10 |
| | + | 20 |
| ½ ℞ | + | 10 |

*SIT rursum numerus 10℞. diuidendus in duas partes, quarum differentia 20. Deme 20. ex 10℞. Nam residui 10℞ — 20 semissis 5℞ — 10. erit minor pars: ad quam si addes 20. facies 5℞ + 10. maiorem partem, quarum hæc illam superat 20. vnitatibus, & ambæ efficiunt 10℞.*

*SIT quoque 1ʒ. diuidendus in duas partes, quarum differentia 150. Deme 150. & residui 1ʒ — 150. semissis ½ʒ — 75. erit minor pars, ad quam si adiicies 150. facies maiorem partem ½ + 75. quæ simul faciunt 1ʒ. & maior minorem superat numero 150.*

*SIT denique numerus 6ʒ. diuidendus in duas partes, quarum maior minorem superat 8. vnitatibus. Deme 8. ex 6ʒ. Nam residui 6ʒ — 8. semissis 3ʒ — 4. erit prima pars: ad quam si addes 8. fiet maior pars 3ʒ + 4. Atque ita de cæteris.*

*Diuisio numeri absoluti in duas partes dati excessus, sine Algebra.*

*IMMO hac eadem arte diuidemus propositum numerum absolutum in duas partes dati excessus, sine Algebra: Nam si excessum datum ex proposito numero detrahemus, erit reliqui numeri semissis minor pars, ad quam si eundem excessum adiiciemus, conficiemus partem maiorem. Vt si numerus 100 distribuendus sit in duos, quorum differentia 40. Deme 40. ex 100. Reliqui enim numeri 60 semissis 30. erit minor pars: ad quam si addes 40. conflabis maiorem partem 70.*

*QVOD si Cossicus numerus diuidendus ita sit per Algebram, non inuenientur quidem partes numeri Cossici, sed pretium radicis reperietur, vel zensi, cuius partes respondebunt partibus per Algebram positis, quæstionique satisfacient. Vt si numerus 2ʒ secandus sit in duas partes, quarum maior superet minorem numero 40. Ponatur minor pars ½ʒ. (minor scilicet numerus, quam semissis dati numeri 2ʒ) eritq; maior pars ½ʒ + 40. superans illam numero 40 quæ simul efficiunt 1ʒ + 40. qui numerus æqualis debet esse dato numero 2ʒ. Dempto 1ʒ. vtrinque. erit æquatio inter 40. & 1ʒ. Diuisisque 40. per 1. fiet 1ʒ. 40. & 2ʒ propositi 80. qui numerus diuidendus proponitur. Quoniam igitur minor pars posita est ½ʒ. erit minor pars 20. semissis videlicet vnius zensi, cuius pretium inuenimus 40. ideoque maior pars erit 60. nimirum ½ʒ + 40. Vbi vides, 20. & 60. efficere 80. & maiorem partem superare minorem dato numero 40. Sic etiam si 2℞ distribuendæ sint in duas partes, quarum differentia 40. inuenietur eodem modo 1℞ 40. ideoque 2℞ 80. Eritque ½℞ 20 & ½℞ + 40. erit 60. &c.*

II. 2 *Duos numeros inuenire, quorum excessus sit datus quiuis numerus, & eorum summa conficiat quemlibet datum numerum.*

Sit datus excessus 40. & summa 100. Hoc ænigma à superiori non differt. Nam summa 100. distribuenda est in duas partes, quarum excessus sit 40.

III. 3 *Datum numerum quemlibet in duas partes diuidere, quæ inter se multiplicatæ gignant numerum, qui ad quadratum minoris partis habeat datam proportionem quamcunque.*

Sit datus numerus 100. diuidendus in duas partes, vt numerus ex vna in alteram genitus ad quadratum minoris partis proportionem habeat decuplam. Ponatur minor pars 1℞. ideoque maior 100 — 1℞. Ex vna in alteram procreatur numerus 100℞ — 1ʒ. qui decuplus esse debet ad quadratum partis minoris, nimirum ad

rum ad 1ʓ. hoc est, æqualis 10 ʓ. Est ergo æqualitas inter 100℞ − 1ʓ. & 10ʓ. Et addito 1ʓ. vtrinque, inter 100℞. & 11.ʓ. Diuisis ergo 100. per 11. iuxta tenorem regulæ, prodibit 1℞. $9\frac{1}{11}$. pro minore parte: (quia numeri Cossici sunt collaterales.) qua ablata ex 100. reliqua erit maior pars $90\frac{10}{11}$. Hæ partes, nimirum $\frac{100}{11}$. & $\frac{1000}{11}$. inter se multiplicatæ faciunt $\frac{100000}{121}$. hoc est, $826\frac{54}{121}$ qui numerus decuplus est ad quadratum minoris partis, videlicet ad $\frac{10000}{121}$. hoc est, ad $82\frac{78}{121}$. vt perspicuum est.

100 − 1 ℞
+ 1 ℞
100 ℞ − 1 ʓ

## SCHOLIVM.

*SCIENDVM autem est, duas partes numeri dati inuentas, eandem habere proportionem, quam productus numerus ex earum multiplicatione habet ad quadratum minoris partis. Ita vides partes inuentas $9\frac{1}{11}$ & $90\frac{10}{11}$. vel $\frac{100}{11}$. & $\frac{1000}{11}$. habere proportionē decuplam, quemadmodū productus numerus $826\frac{54}{121}$ ad $82\frac{78}{121}$. quadratum minoris partis, siue $\frac{100000}{121}$ ad $\frac{10000}{121}$. Cuius rei ratio est, quod eadem pars minor multiplicet & seipsam, vt suum quadratum efficiat, & maiorem partem, vt productum numerum gignat. [a] Hinc enim fit, vt producti eandem proportionem habeant, quam numeri multiplicati.* [a] 17. septi.

Itaque ænigma hoc ita proponi posset.

*Datum numerum in duos partiri in data proportione, qui inter se multiplicati gignant numerum, qui ad quadratum minoris numeri proportionem habeat eandem datam.*

*Sit enim datus numerus 100. diuidendus in duos habentes quadruplam proportionem, ita vt numerus ex eorum multiplicatione procreatus habeat quoque ad quadratum minoris proportionem quadruplam. Ponatur minor numerus 1℞. & maior 4℞. vt nimirum habeant proportionem quadruplam. Et quia duo hi numeri faciunt 5℞. erit æquatio inter 5℞. & 100. Diuisis ergo 100. per 5 fiet 1℞. 20 minor scilicet numerus. Maior ergo erit 80. cum positus sit 4℞. Vides ergo numerum 1600. productum ex 20. in 80. quadruplum esse quadrati 400. ex minore 20. descripti. Item maiorem 80. ad minorem 20. quadruplam quoque habere proportionem.*

4 *Duos numeros inuenire, qui inter se multiplicati producant numerum, qui ad quadratum minoris numeri proportionem habeat datam: simul vero additi conficiant summam propositam quamcunque.* IIII.

SIT summa proposita 100 & numerus ex vno numero inuento in alterum procreatus sit decuplus ad quadratum minoris numeri. Hoc etiam ænigma à superiori non differt. Nam summa 100. diuidenda est in duas partes, quæ inter se multiplicatæ producant numerum in proportione decupla ad quadratum numeri minoris.

5 *Duos numeros inuenire in data proportione, quorum maior si subtrahatur à dato numero, & minor à minore alio dato numero, reliqui duo fiant duo numeri æquales: quando id fieri potest.* V.

Sint inueniendi duo numeri in proportione tripla, quorum maiore detracto ex 30. & minore ex 16. reliqui fiant duo numeri æquales. Debent autem duo propositi numeri habere proportionem minorem proportione data. Vt in nostro exemplo minor est proportio 30 ad 16. quam tripla.

Ponatur minor 1℞ ideoque maior 3℞. triplo maior. Si 3℞. demantur ex 30. remanent 30 − 3℞. Et si 1℞ dematur ex 16. remanent 16 − 1℞. Est ergo inuenta æquatio inter 30 − 3℞. & 16 − 1℞. Addantur vtrinque 3℞. eritque æquatio inter 30. & 16 + 2℞. propterea quod + 3℞. additæ ad − 1℞ faciant + 2℞. Et ablatis 16. vtrinque, erit æqualitas inter 14. & 2℞. Diuisisque 14. per 2. prodibit 1℞. 7. pro minore numero. Maior ergo erit 21. triplo maior. Perspicuum autem est, si 21. ex 30. & 7. ex 16. detrahantur, vtrobique relinqui 9.

+ 3 ℞
− 1 ℞
+ 2 ℞

6 *Duos numeros in proportione data inuenire, ita vt maiore addito ad datum numerum, & minore ad alium datum minorem, vel ad eundem, efficiantur duo numeri in proportione quacunque data, quando id fieri potest.* VI.

Sint inueniendi duo numeri in proportione quintupla, quorum maiore addito ad 6 & minore ad 4. efficiantur duo numeri in proportione tripla. Ponatur minor numerus 1℞. & maior 5℞. quintuplo maior. Ex 5℞. & 6. fiunt 5℞ + 6. Et ex 1℞. & 4. fiunt 1℞ + 4. Eruntq; 5℞ + 6. in tripla proportione ad 1℞ + 4. hoc est, si triplicentur 1℞ + 4. æquatio fiet inter 5℞ + 6. & 3℞ + 12. Et ablatis 3℞. vtrinque, inter 2℞ + 6. & 12. Et rursum ablatis vtrinq; 6. inter 2℞ & 6. Diuisis ergo 6. per 2. proueniet 1℞ 3. pro minore numero, & 15. pro maiore, quintuplus illius. Iam si addantur 15. ad 6. & 3. ad 4. fiunt 21. & 7. in tripla proportione.

Si compositus numerus 5℞ + 6. ad 1℞ + 4. debeat habere proportionem quadruplam, erit æqualitas inter

inter 5℞+6. & 4℞+16. Et ablatis 4℞ vtrinque, inter 1℞+6. & 16. Et rursum ablatis 6. vtrinque, inter 1℞ & 10. Diuisisque 10. per 1. fiet 1℞. 10. minor scilicet numerus, ideoque maior 50. illius videlicet quintuplus. Quod si 50. addantur ad 6. & 10 ad 4 fient numeri 56. & 14. in proportione quadrupla.

Et si compositus numerus 5℞+6. ad 1℞+4. habere debeat proportionem duplam, erit æquatio inter 5℞+6. & 2℞+8. Et ablatis 2℞. vtrinque, inter 3℞+6. & 8. Et ablatis 6. vtrinque, inter 3℞ & 2. Diuisis autem 2. per 3. fiet 1℞. $\frac{2}{3}$. minor scilicet numerus, & maior $\frac{10}{3}$ illius quintuplus. Et si $\frac{10}{3}$. addantur ad 6. id est, ad $\frac{18}{3}$. & $\frac{2}{3}$. ad 4. id est, ad $\frac{12}{3}$. fient duo numeri $\frac{28}{3}$. & $\frac{14}{3}$. habentes proportionem duplam.

SED tam maior 5℞. quam minor 1℞. additus ad 6. efficere debeant duos numeros in proportione tripla. Inuenietur æquatio inter 5℞+6. & 3℞+18. & ablatis 3℞. vtrinque, inter 2℞+6. & 18. Et rursum ablatis 6. vtrobique, inter 2℞ & 12. Diuisis ergo 12. per 2. fiet 1℞. 6. minor numerus: maior autem erit 30. Si igitur vterque addatur ad 6. fient numeri 12. & 36 habentes proportionem triplam.

QVOD si quis velit, compositum numerum 5℞+6. ad 1℞+4. habere proportionem etiam quintuplam, vel maiorem, aut sesquialteram, euadet ænigma inexplicabile, seu impossibile: quia incidemus in æquationem impossibilem. Vt si proportio inter 5℞+6. & 1℞+4. debeat esse quintupla, vel sextupla, erit æquatio inter 5℞+6. & 5℞+20. Vel inter 5℞+6. & 6℞+24. quarum vtraque impossibilis est.

At si proportio inter 5℞+6. & 1℞+4 debeat esse sesquialtera, erit æquatio inter 5℞+6. & 1$\frac{1}{2}$ ℞ +6 quæ etiam impossibilis est. Vbi clare perspicis, ex ipsa regula Algebræ cognosci posse, num ænigma propositum solui possit, necne. id quod cap. 14. pluribus verbis docuimus.

VII. 7 *Numerum inuenire, qui additus ad quoslibet duos numeros datos, faciat duos numeros in quacunque proportione, quæ minor sit proportione duorum numerorum propositorum.*

Sit inueniendus numerus, qui additus ad 100. & 20. faciat duos numeros in proportione tripla. Ponatur numerus quæsitus 1℞. Fient ergo numeri 1℞+100. & 1℞+20 qui debent habere proportionem triplam. Igitur æquatio erit inter 1℞+100. & 3℞+60. Ablata 1℞ vtrinque, remanebit æquatio inter 100. & 2℞+60. Et rursum demptis 60. vtrinque, inter 40. & 2℞. Diuisis autem 40. per 2. fiet 1℞. 20. numerus quæsitus. Numeri ergo compositi erunt 120. & 40. in proportione tripla.

DEBET autem proportio nominata minor esse proportione inter datos duos numeros, vt in nostro exemplo, minor, quam quintupla. Alias occurret nobis æquatio impossibilis. Ratio huiusce rei est, quod addito vno eodemque numero ad duos inæquales, compositi minorem habeant proportionem, quam duo illi inæquales.

SINT namque duo numeri inæquales AB, maior, & CD, minor; quibus addatur idem numerus, vel duo æquales BE, DF. Dico minorem esse proportionem AE, ad CF, quam AB, ad CD. Quoniam enim (vt ad defin. 20. lib. 7. Euclid. declarauimus) maior est proportio maioris numeri AE, ad BE, quam minoris CF, ad eundem BE; vel ad DF: [a] erit per conuersionem rationis, minor proportio AE, ad AB, quam CF, ad CD: Et permutando, minor AE, ad CF, quam AB, ad CD. quod est propositum.

A . . . . . . . . B . . . E
C . . . . . . D . . . . F

[a] schol. 22. septimi.

Iisdem positis sit, data proportio superbipartiens quintas. Numeri compositi sunt 1℞+100. & 1℞+20. qui debent habere proportionem superbipartientem quintas. Si ergo 1℞+20 multiplicetur per 1$\frac{2}{5}$. denominatorē proportionis superbipartientis quintas, id est, per $\frac{7}{5}$. fiet numerus $\frac{7℞+140}{5}$. qui æqualis erit numero 1℞+100. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem, vt hic vides, reducitur ad æquationem inter 7℞+140. & 5℞+500. Et ablatis 140. vtrinque, erit æquatio inter 7℞ & 5℞+360. Et rursus ablatis 5℞ vtrinque inter 2℞. & 360. Diuisis ergo 360. per 2. fiet 1℞. 180. numerus quæsitus. Hic enim cum 100. & 20. faciet numeros 280. & 200. qui habent proportionem superbipartientem quintas. Apposui hoc alterum exemplum, vt videas, quo pacto æquationes inter minutias sint reducendę. quod ad finem cap. 10. docui.

$$\frac{7℞+140}{5} \qquad \frac{1℞+100}{1}$$
$$7℞+140 \qquad 5℞+500$$

VIII. 8 *Numerum inuenire, qui ablatus ex quibuslibet duobus numeris datis relinquat duos numeros in quacunque proportione, quæ maior sit proportione duorum numerorum propositorum.*

SIT inueniendus numerus, qui ablatus est ex 100. & 50. relinquat duos numeros in proportione septupla. Ponatur quęsitus numerus 1℞. Erunt ergo duo numeri reliqui 100 — 1℞. & 50 — 1℞. eritque proportio illius ad hunc septupla. Quare æquatio erit inter 100 — 1℞. & 350 — 7℞. Additaque 1℞. vtrinque, erit æquatio inter 100. & 350 — 6℞. propterea quod + 1℞ & — 7℞. faciunt — 6℞ vt hic cernis. Et rursum additis vtrinque 6℞, erit æqualitas inter 100 + 6℞. & 350. Et ablatis vtrinque 100. inter 6℞ & 250. Diuisis ergo 250. per 6. erit 1℞ 41$\frac{2}{3}$. numerus quęsitus. Reliqui ergo numeri erunt 58$\frac{1}{3}$. & 8$\frac{1}{3}$. qui proportionem habent septuplam.

+ 1 ℞
— 7 ℞
———
— 6 ℞

DEBET autem proportio data esse maior proportione, quam dati duo numeri habent, vt in proposito exemplo maior, quam dupla. Alias incidemus in æquationem impossibilem. Cuius rei ratio est, quod ablato vno eodemque numero ex duobus inæqualibus, reliqui numeri habeant proportionem maiorem, quam duo illi inæquales.

Sint

Sint enim inæquales duo numeri A B, maior, & C D, minor, à quibus auferatur idem numerus, vel duo æquales E B, F D. Dico maiorem esse proportionem A E, ad C F, quam A B, ad C D. Quoniam enim ( vt ex definit. 20. lib. 7. Euclid. deduximus ) maior est proportio maioris numeri A B, ad E B, quam minoris C D, ad eundem E B, vel ad F D; [a] erit quoque permutando maior proportio A B, ad C D, quam E B, ad F D: nimirum totius ad totum, quam ablati ad ablatum. erit quoque maior proportio reliqui A E, ad reliquum C F, quam totius A B, ad totum C D. quod est propositum.

A....... E.... B
C...... F.... D

[a] schol. 22. septi.

9. *Propositum numerum in duos numeros habentes datam proportionem distribuere.* IX.

Sit numerus 100. diuidendus in duos in proportione decupla. Ponatur minor pars 1℞. Eritque maior 10℞. decuplo videlicet maior. Ergo summa harum partium 11℞. æqualis erit 100. Diuisis igitur 100. per 11. fit 1℞ $9\frac{1}{11}$. minor numerus, quo ablato ex 100. remanet maior numerus $90\frac{10}{11}$. qui illius decuplus est.

Aliter. Posita 1℞. pro minore parte, erit maior pars 100 — 1℞. quæ illius decupla esse debet. Igitur 10℞. æquales erunt 100 — 1℞. Additaque 1℞ vtrinque, erit æquatio inter 11℞. & 100. vt supra. Quod si statuas maiorem partem esse 1℞. erit minor 100 — 1℞. qua decuplata, erit æqualitas inter 1℞. & 1000 — 10℞. Additisque 10℞ vtrinque, æquatio erit inter 11℞. & 1000. Diuisis ergo 1000. per 11. fiet 1℞ $90\frac{10}{11}$. pro maiore parte. qua ablata ex 100. erit minor pars $9\frac{1}{11}$. vt prius.

10 *Propositum numerum in duas partes secare, vt maior ad minorem habeat datam proportionem, & insuper contineat datum quemcunque numerum.* X.

Sit numerus 100. secandus in duas partes, quarum maior minoris sit tripla, & insuper contineat 20. vnitates. Ponatur 1℞. pro minore parte. Maior ergo erit 3℞ + 20. Summaque 4℞ + 20. æqualis esse debet 100. Ablatis 20. vtrinque, erit æqualitas inter 4℞. & 80. Diuisisque 80. per 4 fiet 1℞. 20. pro minore parte. qua dempta ex 100. reliqua erit maior pars 80. quæ triplum numeri 20. continet, nimirum 60. & insuper 20.

Aliter. Posita 1℞. pro minore parte, erit maior 100 — 1℞. à qua si detrahantur 20. debet reliquus numerus 80 — 1℞. triplus esse minoris 1℞ hoc est, æquatio debet esse inter 3℞ & 80 — 1℞. Additaque 1℞ vtrinque, æqualitas erit inter 4℞. & 80. Igitur vt supra, erit 1℞. 20. minor pars, & maior 80.

11 *Duos numeros inuenire, quorum excessus datus sit, & proportio data.* XI.

Sit datus excessus 20. & data proportio quintupla. Ponatur minor numerus 1℞. Erit maior 5℞. nimirum illius quintuplus. Excessus eorum est 4℞. Est ergo æquatio inter 4℞. & 20. Diuisisque 20. per 4. fiet 1℞. 5. pro minore numero. Maior autem erit 25. qui ipsius 5. quintuplus est, eundemque excedit numero 20.

SINT rursus inueniendi duo numeri in proportione supertripartiente septimas, quorum excessus sit 21. Ponantur duo numeri 7℞. 10℞ in proportione supertripartiente septimas. Horum differentia 3℞ æqualis esse debet numero 21. Diuisis ergo 21. per 3. fiet 1℞ 7. Igitur 7℞. erunt 49. & 10℞ facient 70. Est autem differentia inter 70. & 49. datus numerus 21. habentque proportionem supertripartientem septimas.

12 *Datum numerum in duos numeros partiri, ita vt pars aliquota vnius data cum parte alia aliquota alterius data faciat datum quemuis numerum, qui positus sit inter partes nominatas dati numeri diuidendi.* XII.

Sit numerus 100. diuidendus in duos, ita vt $\frac{1}{3}$. prioris cum $\frac{1}{5}$. posterioris efficiat 30. qui numerus positus est inter $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{5}$. dati numeri 100. nimirum inter $33\frac{1}{3}$. & 20. hoc est, minor est, quam $33\frac{1}{3}$ & maior, quam 20. Ponatur primus numerus 1℞. ideoque secundus 100 — 1℞. Tertia pars primi est $\frac{1}{3}$ ℞ & quinta secundi 20 —— $\frac{1}{5}$ ℞: quæ partes simul conficiunt 20 —— $\frac{2}{15}$ ℞. quia vt addatur $\frac{1}{3}$ ℞ ad —— $\frac{1}{5}$ ℞. fit subtractio, propter diuersa signa. Eritque æquatio inter 20 + $\frac{2}{15}$ ℞. & 30. Ablatisque 20. vtrinque, inter $\frac{2}{15}$ ℞. & 10. Diuisis autem 10. per $\frac{2}{15}$. prouenit 1℞. 75. pro primo numero: atque idcirco secundus erit 25. nimirum 100 —— 1℞. Constat autem, tertiam partem prioris, nimirum 25. cum quinta parte posterioris, hoc est, cum 5. efficere 30.

Aliter, vt vitentur fractiones. Ponatur tertia pars primi, 1℞ ideoque totus primus 3℞. Igitur $\frac{1}{5}$. secundi erit 30 — 1℞. vt cum $\frac{1}{3}$. primi, id est, cum 1℞. conficere possit 30. ideoque totus secundus erit 150 —— 5℞. qui cum primo, hoc est, cum 3℞. facere debet 100. Fit autem ex ipsis 150 —— 2℞. Igitur æquatio erit inter 150 —— 2℞. & 100. Additisque vtrinque 2℞. inter 150 & 100 + 2℞. Ablatisque 100. vtrinque inter 50. & 2℞. Diuisis ergo 50. per 2. fiet 1℞ 25. Et quia primus positus fuit 3℞. erit primus 75. atque idcirco secundus 25. quemadmodum prius.

QVOD si quis posceret numerum $33\frac{1}{3}$. vel maiorem, aut 20. vel minorem, quem partes nominatæ efficere debeant, occurreret æquatio impossibilis, vt experiri poteris.

13 Da-

XIII. 13 *Datum numerum in duos partiri, ita vt prioris pars aliquota data excedat aliam partem aliquotam posterioris datam numero quouis, qui minor sit parte aliquota totius numeri propositi, eiusdem nominis cum parte aliquota prioris numeri.*

SIT diuidendus numerus 100. in duos, ita vt prioris pars quinta excedat quartam partem posterioris, numero 11. qui minor est, quinta parte diuidendi numeri 100. Ponatur prior numerus 1℞. ideoque posterior 100 — 1℞. Pars quinta prioris $\frac{1}{5}$℞. excedere debet quartam partem posterioris, nimirum 25 — $\frac{1}{4}$℞. numero 11. hoc est, æquatio esse debet inter $\frac{1}{5}$℞. & 25 — $\frac{1}{4}$℞ + 11. Addita $\frac{1}{4}$℞ vtrinque, erit æqualitas inter $\frac{9}{20}$℞. & 25 + 11. siue 36. Diuisis ergo 36. per $\frac{9}{20}$. inuenietur 1℞. 80. pro priore numero. Ergo posterior erit 20. Et $\frac{1}{5}$. prioris, nimirum 16. superat quartam partem posterioris, videlicet 5. numero 11.

Aliter sine fractionibus. Ponatur $\frac{1}{5}$. prioris numeri 1℞, ideoque totus prior 5℞. Posterioris ergo $\frac{1}{4}$. erit 1℞ — 11. vt 1℞ superet 1℞ — 11. numero 11. totusque posterior numerus erit 4℞ — 44. Erit igitur æqualitas inter 9℞ — 44. & 100. quod ambo numeri 5℞. & 4℞ — 44. efficere debeãt 100. Additis ergo 44. vtrinque, fiet æquatio inter 9℞. & 144. Diuisisque 144. per 9. reperietur 1℞. 16. Et quia prior numerus positus fuit 5℞. erit numerus prior 80. ac proinde posterior 20. Et quinta pars prioris; nimirum 16. superat 5. quartam partem posterioris numero 11.

QVOD si excessus quintæ partis prioris numeri supra quartam posterioris proponeretur 20. nimirum $\frac{1}{5}$. numeri 100. diuidendi, vel maior, quam 20. res non succederet, quia incideremus in absurdum aliquod. Nam si excessus debeat esse 20. reperies numerum priorem esse 100. ideoque posteriorem 0. quod absurdum est, &c.

XIV. 14 *Numerum inuenire, à quo si auferantur duo dati numeri; residuum minoris ad maioris residuum datam habeat proportionem.*

Sint à quæsito numero auferendi numeri 100. & 30. ita vt residuum minoris ad residuum maioris proportionem habeat triplam. Ponatur numerus quæsitus 1℞ Eruntque residui 1℞ — 100. & 1℞ — 30. Debet ergo proportio esse tripla 1℞ — 30. ad 1℞ — 100. hoc est, æquatio debet esse inter 1℞ — 30. & 3℞ — 300. Additis 30. vtrinque, erit æquatio inter 1℞. & 3℞ — 270. Et rursum additis 270 vtrinque, inter 1℞ + 270. & 3℞: & ablata 1℞ vtrinque, inter 270 & 2℞. Diuisis ergo 270 per 2. emerget 1℞. 135. numerus quæsitus. Nam si subtrahantur 100. & 30. reliqui fiunt 35. & 105. Ac 105. ad 35. triplam proportionem habent.

XV. 15 *Datis duobus numeris, alium inuenire, quo addito ad minorem; & detracto à maiore; summa ad residuum, vel residuum ad summam habeat proportionem datam minorem ea, quam numeri dati habent. Item quo addito ad maiorem, & detracto ex minore; summa ad residuum proportionem habeat datam maiorem ea, qua inter datos numeros inuenitur.*

Sint dati duo numeri 20. & 100. inueniendusque sit primo numerus, quo addito ad 20. & subtracto à 100. summa ad residuum habeat proportionem quadruplam, quæ minor est, quam quintupla, quam habent 100. ad 20. Ponatur ille numerus 1℞. eritque summa 1℞ + 20. & residuum 100 — 1℞. Vt igitur summa illa huius residui sit quadrupla; erit æquatio inter 1℞ + 20. & 400 — 4℞ Et additis 4℞. vtrinque, inter 5℞ + 20. & 400. Et ablatis 20. vtrinque, inter 5℞. & 380. Diuisis igitur 380 per 5. fiet 1℞. 76. numerus quæsitus. qui additus ad 20. facit 96. & detractus ex 100. relinquit 24. Perspicuum autem est, quadruplam proportionem esse 96. ad 24

Sit deinde inueniendus numerus, quo addito ad 20. & subtracto à 100. residuum ad summam habeat proportionem quadruplam. Ponatur numerus ille 1℞. eritque vt prius, summa 1℞ + 20. & residuum 100 — 1℞. Vt igitur residuum istud illius summæ sit quadruplum; erit æquatio inter 4℞ + 80. & 100 — 1℞ & addita 1℞ vtrinque. inter 5℞ + 80. & 100. Et ablatis 80. vtrinq;, inter 5℞. & 20 Diuisis ergo 20. per 5. fiet 1℞ 4. numerus quæsit⁹. Hic n. additus ad 20. facit 24. Et ablatus ex 100. relinquit 96. qui numerus numeri 24. quadruplus est.

Sit denique inueniendus numerus, quo addito ad 100. & dempto ex 20. summa illa ad hoc residuum proportionem habeat septuplam, quæ maior est, quam quintupla inter 100. & 20. Ponatur ille numerus 1℞. Fietque summa 1℞ + 100. & residuum 20 — 1℞. Vt igitur summa illa sit septupla huius residui; erit æqualitas inter 1℞ + 100 & 140 — 7℞. Et additis 7℞. vtrinque, inter 8℞ + 100. & 140 Et ablatis 100. vtrinque, inter 8℞ & 40 Diuisis igitur 40. per 8. fiet 1℞. 5. numerus quæsitus. Hic enim additus ad 100. facit 105. detractus autem ex 20. relinquit 15. Habentque. 105. ad 15. proportionem septuplam.

Si proportio data in vltimo exemplo esset quadrupla, minor videlicet proportione inter 100. & 20. incideremus in æquationem impossibilem. quod experiri licebit.

XVI. 16 *Datis duobus numeris, alium inuenire, ad quem si adiicietur alter datorum, & ab eodem alter detrahatur; summa ad residuum proportionem habeat datam.*

Dati numeri sint 100. & 20. inueniendusque primo sit numerus, ad quem si addantur 100. & ab eodem tollantur 20. summa illa sit residui huius tripla. Ponatur numerus ille 1℞ Fietque summa 1℞ + 100. & residuum 1℞ — 20. Vt igitur summa illa sit huius residui tripla; erit æquatio inter 1℞ + 100. & 3℞ — 60. Et additis vtrinq; 60. inter 1℞ + 160. & 3℞. Et ablata 1℞ vtrinque, inter 160 & 2℞. Diuisis ergo 160 per 2. reperietur 1℞. 80.

1℞. 80. numerus quæsitus. Nam si ei addes 100. facies 180. & si demas 20. remanent 60. Estque tripla proportio 180. ad 60.

Sit deinde inueniendus numerus, ad quem si addantur 20. & ab eodem deducantur 100. summa illa residui huius sit tripla. Ponatur ille numerus 1℞. Fiet summa 1℞ + 20. & residuum 1℞ − 100. Vt ergo illa huius sit tripla; erit æquatio inter 1℞ + 20. & 3℞ − 300. Et additis 300. vtrinque, inter 1℞ + 320. & 3℞. Et ablata 1℞ vtrinque, inter 320. & 2℞. Diuisis igitur 320. per 2. fiet 1℞. 160. numerus quæsitus. Nam si ei addes 20. conficies 180. & si demes 100. relinques 60. Estque inter 180. & 60. proportio tripla.

17 *Propositum numerum in duos diuidere bis, ita vt maior numerus primæ diuisionis ad minorem secundæ diuisionis habeat datam proportionem: Item maior secundæ diuisionis ad minorem primæ diuisionis, datam quoque habeat proportionem quamcunque.* XVII.

Propositus numerus 100. diuidendus sit bis in duos numeros, ita vt maior primæ diuisionis ad minorem secundæ diuisionis habeat proportionem triplam; maior vero secundæ diuisionis ad minorem primæ diuisionis proportionem decuplam. Ponatur maior pars primæ diuisionis 3℞. ideoque minor 100 − 3℞. Erit ergo minor pars secundæ diuisionis 1℞. Est enim tripla proportio 3℞. ad 1℞. ideoque maior pars secundæ diuisionis erit 100 − 1℞ Vt autem 100 − 1℞. habeant ad 100 − 3℞. proportionem decuplam, necesse est, æquationem esse inter 100 − 1℞. & 1000 − 30℞. Igitur additis 30℞ vtrinque, erit æquatio inter 100 + 29℞. & 1000. Ablatisque 100. vtrinque, erit æqualitas inter 29℞. & 900. Diuisis igitur 900. per 29. deprehendetur 1℞. $31\frac{1}{29}$. Et quia maior pars primæ diuisionis posita fuit 3℞. erit ipsa pars maior $93\frac{3}{29}$. ac proinde minor $6\frac{26}{29}$. Rursus quia minor pars secundæ diuisionis posita fuit 1℞. erit ipsa pars minor $31\frac{1}{29}$. ideoque maior $68\frac{28}{29}$. Estque numerus $93\frac{3}{29}$. ad $31\frac{1}{29}$. triplus: Et $68\frac{28}{29}$. ad $6\frac{26}{29}$. decuplus.

| | |
|---|---|
| $93\frac{3}{29}$ | $31\frac{1}{29}$ |
| $6\frac{26}{29}$ | $68\frac{28}{29}$ |

18 *Datum numerum in duos diuidere ter, ita vt maior pars primæ diuisionis ad minorem secundæ datam habeat proportionem: Item maior secundæ diuisionis ad minorem tertiæ: Ac denique maior tertiæ diuisionis ad minorem primæ.* XVIII.

Datus numerus 100. sit ter diuidendus in duos, ita vt maior primæ diuisionis ad minorem secundæ proportionem habeat triplam: Maior autem secundæ diuisionis ad minorem tertiæ, proportionem duplam: Ac denique maior tertiæ diuisionis ad minorem primæ, proportionem quadruplam. Ponatur maior pars primæ diuisionis 3℞. ideoque minor 100 − 3℞. Erit ergo minor pars secundæ diuisionis 1℞. quippe cum tripla sit proportio 3℞. ad 1℞. ideoque maior pars secundæ diuisionis erit 100 − 1℞. quæ vt dupla sit minoris partis diuisionis tertiæ, erit minor pars tertiæ diuisionis $50 - \frac{1}{2}$℞. atque idcirco maior $50 + \frac{1}{2}$℞ Vt autem $50 + \frac{1}{2}$℞. ad 100 − 3℞. minorem partem primæ diuisionis proportionem habeat quadruplam, erit æquatio inter $50 + \frac{1}{2}$℞. & 400 − 12℞. Additisque 12℞. vtrinque, æqualitas erit inter $50 + 12\frac{1}{2}$℞. & 400. Et ablatis vtrinque 50. inter $12\frac{1}{2}$℞. & 350. Diuisis igitur 350. per $12\frac{1}{2}$. fiet 1℞. 28. Maior ergo pars primæ diuisionis, quæ fuit posita 3℞. erit 84. & minor 16. At minor pars secundæ diuisionis, quam posuimus 1℞. erit 28. ac maior 72. Denique minor pars tertiæ diuisionis, quæ posita est $50 - \frac{1}{2}$℞ erit 36. & maior 64. qui numeri satisfaciunt ænigmati proposito. quod experiri poteris.

| | | |
|---|---|---|
| 3℞ | 1℞ | $50 + \frac{1}{2}$℞ |
| 100 − 3℞ | 100 − 1℞ | $50 - \frac{1}{2}$℞ |

| | | |
|---|---|---|
| 84 | 28 | 64 |
| 16 | 72 | 36 |

19 *Duos numeros inuenire, qui inter se multiplicati procreent numerum in data proportione ad eorum summam.* XIX.

Sit productus ex multiplicatione ad summam triplus. Ponatur vnus numerus 1℞. alter vero quicunque numerus maior denominatore proportionis, V. g. 20. maior quam 3. Alias res non succedet. Ex 1℞. in 20. fiunt 20℞. Et summa ex 1℞ & 20. collecta est 1℞ + 20. Vt ergo ille productus ad hanc summam habeat proportionem triplam, erit æquatio inter 20℞. & 3℞ + 60. Et ablatis 3℞. vtrinque, inter 17℞. & 60. Diuisis ergo 60. per 17. fiet 1℞. $3\frac{9}{17}$. Sunt ergo duo numeri quæsiti $3\frac{9}{17}$. & 20. Ex ductu vnius in alium fit numerus $70\frac{10}{17}$. qui triplus est ad $23\frac{9}{17}$. eorum summam.

SI vnus numerus ponatur 1℞. & alter 4. maior videlicet, quam 3. denominator proportionis triplæ, inuenientur duo numeri 12. & 4. Nam ex 1℞. in 4. fit numerus 4℞ triplus summæ 1℞ + 4. Ergo æquatio erit inter 4℞ & 3℞ + 12. Ablatisque 3℞ vtrinque, inter 1℞. & 12. ac proinde 1℞ erit 12. vnus numerus, alter autem erit 4. vt posuimus.

20 *Dato numero quolibet, inuenire alium, ita vt ex hoc in illum procreetur numerus in data proportione ad eorum summam: ita tamen, vt denominator proportionis dato numero minor sit.* XX.

Dato numero 20. inueniendus sit alius, qui in illum ductus producat numerum triplum ad summam ex

ipsis collectam: cuius proportionis denominator 3. minor est dato numero 20. Alias res non succedet. Non differt hoc ænigma à præcedenti. Nam si numerus quæsitus ponatur 1℞ & alter numerus, 20. qui datus est, inuenietur numerus, vt ibi, qui in 20. ductus producat numerum triplum ad summam, &c.

XXI. 21 *Inuenire duos numeros in data proportione, qui inter se multiplicati faciant numerum in data proportione ad eorum summam.*

HOC ænigma à 19. non differt, nisi quod hic datur proportio, quam inuenti nnmeri habere debent.

Sint ergo inueniendi duo numeri in proportione sesquialtera, vt inter se multiplicati faciant numerum duodecuplum summæ eorum. Ponantur duo nnmeri 4℞. & 6℞. in proportione sesquialtera. Ex vno in alterum fiunt 24ȝ. eorumque summa est 10℞. Vt ergo 24ȝ. ad 10℞. proportionẽ habeant duodecuplam: erit æquatio inter 24ȝ. & 120℞. Diuisis ergo 120. per 24. proueniet 1℞ 5. quia denominationes Cossicæ ȝ. & ℞. collaterales sunt. Cum ergo primus numerus positus sit 4℞. & secundus 6℞. erit primus 20. & secundus 30. qui multiplicati inter se faciunt 600. qui numerus duodecuplus est eorum summæ 50.

Si proportio inter numerum ex multiplicatione factum ad summam debeat esse sesquiquinta. Positis numeris 4℞ & 6℞. in proportione sesquialtera. Vt numerus 24ȝ. ex multiplicatione factus ad summam 10℞ proportionem habeat sesquiquintam: erit æquatio inter 24ȝ. & 12℞. quia 12℞ ad 10℞ habent etiam proportionem sesquiquintam: qui quidem numerus 12 procreatus est ex 1 $\frac{1}{5}$. denominatore proportionis sesquiquintæ in 10. Diuisis igitur 12. per 24. fiet 1℞ $\frac{1}{2}$. atque adeo cum nnmeri positi sint 4℞ & 6℞. erunt duo numeri quæsiti 2. & 3. qui multiplicati inter se faciunt 6. numerum ad eorum summam 5. sesquiquintam.

XXII. 22 *Inuenire duos numeros, quorum summa sit datus quilibet numerus, & posteriore diuiso per priorem, Quotiens sit datus etiam numerus quiuis.*

VEL

*Datum numerum in duos partiri, vt posteriore diuiso per priorem, Quotiens sit quilibet numerus datus.*

Sit summa quæsitorum numerorum 100 & Quotiens 10. Sit primum prior numerus 1℞, atque idcirco posterior 100 — 1℞. Hoc diuiso per 1℞. fit Quotiens $\frac{100 - 1℞}{1℞}$. æqualis 10. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 100 — 1℞ & 10℞. Addita 1℞ vtrinque, erit æquatio inter 100. & 11℞. Diuisis autem 100. per 11. fit 1℞ $\frac{100}{11}$. hoc est, 9 $\frac{1}{11}$ prior numerus. Ergo posterior erit 90 $\frac{10}{11}$ siue $\frac{1000}{11}$. Constat autem si 90 $\frac{10}{11}$ per 9 $\frac{1}{11}$ siue $\frac{1000}{11}$ per $\frac{100}{11}$ diuidantur, Quotientem gigni 10.

Sit deinde posterior numerus 1℞. ideoque prior 100 — 1℞. Illo per hunc diuiso, fit Quotiens $\frac{1℞}{100 - 1℞}$. æqualis 10. Quæ æqnatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 1℞. & 1000 — 10℞. Et additis 10℞ vtrinque, erit æqualitas inter 11℞. & 1000. Diuisis ergo 1000. per 11. fiet Quotiens $\frac{1000}{11}$. siue 90 $\frac{10}{11}$. posterior numerus, priorque erit 9 $\frac{1}{11}$. siue $\frac{100}{11}$. vt prius.

IAM si numerus datus 100. secandus sit in duos, vt posteriore per priorem diuiso, Quotiens sit 10. soluetur quæstio eodem modo ponendo 1℞. pro priore, vel posteriore, & pro altero 100 — 1℞. vt liquet.

DENIQVE sit diuidendus numerus 100. in duas partes, vt posteriore per priorem diuisa, Quotiens sit $\frac{1}{2}$. Ponatur prior pars 1℞ & posterior 100 — 1℞. Hac diuisa per 1℞, fit Quotiens $\frac{100 - 1℞}{1℞}$. æqualis $\frac{1}{2}$. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 1℞. & 200 — 2℞. Additisque 2℞ vtrobique, erit æqualitas inter 3℞, & 200. Diuisis ergo 200. per 3 fiet 1℞ $\frac{200}{3}$. sine 66 $\frac{2}{3}$. pro priore parte. Posterior autem erit 33 $\frac{1}{3}$. siue $\frac{100}{3}$. Diuisis autem $\frac{100}{3}$. per $\frac{200}{3}$. fit Quotiens $\frac{1}{2}$. vt constat.

XXIII. 23 *Datum numerum in quinque partes secare, vt secunda primam contineat quotiescunque libuerit, & præterea quotlibet vnitates: Tertia secundam quotiescunque etiam libuerit, ac præterea quotuis vnitates: Quarta tertiæ sit multiplex data, minus quotuis vnitatibus: Ac tandem quinta à multiplici data quartæ deficiat quotlibet etiam vnitatibus, quando id fieri potest.*

DATVS numerus sit 100. secandus in quinque partes, ita vt secunda primam contineat bis, & præterea 2. Tertia secundam ter, ac præterea 3. Quarta tertiæ sit dupla minus 4. Ac tandem quinta à dupla quartæ deficiat 13 vnitatibus. Ponatur prima pars 1℞. Eritq; secunda 2℞ + 2. Tertia 6℞ + 9. Quarta 12℞ + 14. Et quinta 24℞ + 15. Summa omnium partium est 45℞ + 40. quæ æqualis debet esse dato numero 100. Ablatis 40. vtrinque: erit æquatio inter 45℞. & 60. Diuisisque 60. per 45. fiet 1℞. 1 $\frac{1}{3}$. prima pars. Ergo omnes quinque erunt 1 $\frac{1}{3}$. 4 $\frac{2}{3}$. 17. 30. 47.

Si numerus 100. secandus esset in quinque partes, vt secunda primam contineret ter, & præterea 4. Tertia secundam bis, & præterea 3. Quarta esset quintupla tertiæ, minus 6. Quinta denique esset quadrupla quartæ, minus 5. quæstio foret impossibilis. Nam posita prima parte 1℞ esset secunda 3℞ + 4. Tertia 6℞ + 11. Quarta 30℞ + 49. & quinta 120℞ + 191. quæ omnes partes faciunt 160℞ + 255. quæ summa æqualis deberet esse dato numero 100. totum parti, quod est absurdum. Propterea diximus in ænigmate [quando id fieri potest.]

24 *Datis duobus numeris, alium inuenire, qui cum minore numerum faciat æqualem ei, quem pars aliquota quæcunque inuenti numeri cum maiore efficit.* XXIV.

Sint dati duo numeri 20.& 30.inueniendusque sit alius, qui cum 20.summam faciat æqualem summæ ex 30.& sexta parte inuenti numeri collectæ. Ponatur numerus quæsitus 6𝓇. (Pono hunc numerum, vt habeat nominatam partem sine fractione. quod tamen opus non est.) Ergo 6𝓇 + 20. æquales sunt 1𝓇 + 30. Ablata 1𝓇 vtrinque, erit æquatio inter 5𝓇 + 20.& 30. Ablatisque rursum 20.vtrinque, inter 5𝓇 & 10. Diuisis ergo 10.per 5 fiet 1𝓇 2. Igitur 6𝓇 facient 12.numerum quæsitum. Hic enim cum 20.facit 32.& eius $\frac{1}{6}$ nimirum 2 cum 30. facit etiam 32.

25 *Inuenire duos numeros in data proportione, vt tantum fiat, minore detracto ex maiore, quantum maiore diuiso per minorem.* XXV.

Sint inueniendi duo numeri in proportione decupla. Ponantur 1𝓇 & 10𝓇. Detracto minore 1𝓇, ex maiore 10𝓇, supersunt 9𝓇. Et diuiso maiore 10𝓇. per minorem 1𝓇. fit Quotiens 10. Est ergo æquatio inter 9𝓇 & 10. Et diuisis 10. per 9. fit 1𝓇 1$\frac{1}{9}$. siue $\frac{10}{9}$. primus numerus. Alter ergo erit $\frac{100}{9}$. siue 11$\frac{1}{9}$. Nam si demantur 1$\frac{1}{9}$. ex 11$\frac{1}{9}$. remanent 10. Et diuisis 11$\frac{1}{9}$. per 1$\frac{1}{9}$. hoc est, $\frac{100}{9}$. per $\frac{10}{9}$. fit Quotiens etiam 10.

26 *Inuenire duos numeros in data proportione, quorum summa æqualis sit numero ex eorum multiplicatione inter se producto.* XXVI.

Sint inueniendi duo numeri in proportione decupla. Ponantur 1𝓇.& 10𝓇. Summa eorum est 11𝓇. Et ex vno in alterum fit numerus 10ʒ. Eritque æqualitas inter 11𝓇. & 10ʒ. Diuisis ergo 11. per 10. fit 1𝓇. 1$\frac{1}{10}$.primus numerus: propterea quod numeri Cossici collaterales sunt. Alter ergo erit 11. Tam enim summa eorum, quam numerus ex vno in alterum productus est 12$\frac{1}{10}$.

27 *Duos numeros inuenire in dato excessu, ita vt eorum quadrati datum etiam habeant excessum, qui tamen maior sit quadrato dati excessus numerorum.* XXVII.

Sint inueniendi duo numeri, quorum excessus 4.quadratorum vero excessus 144.qui maior est, quam 16. quadratus excessus 4. numerorũ dati. Ponatur minor numerus 1𝓇. ideoq; maior 1𝓇 + 4. quorum excessus 4. Quadrati sunt 1ʒ. & 1ʒ + 8𝓇 + 16. Excessus eorum 8𝓇 + 16 qui æqualis debet esse numero 144. Ablatis 16. vtrinque, erit æquatio inter 8𝓇 & 128. Diuisis ergo 128.per 8.erit 1𝓇. 16.minor numerus. Maior ergo erit 20.vt excessus sit 4.Quadrati sunt 256.& 400.quorum excessus 144.

Si datus excessus numerorum sit 1.& quadratorum 31. inuenientur numeri 15.& 16.nimirum duo numeri proximi conficientes datum excessum quadratorum. Atque ita quotiescunque excessus numerorum datur 1.& quadratorum numerus quiuis impar, erunt duo numeri quæsiti, duo proximi conficientes datum excessum quadratorum.

Quando excessus numerorum est 5.& quadratorum 30. reperies numeros $\frac{1}{2}$. & 5$\frac{1}{2}$.

Si numerorum excessus sit 10. & quadratorum 200.inuenies numeros 5.& 15.

Si excessus detur 2.inter numeros, & inter quadratos 22.erunt numeri quæsiti 4$\frac{1}{2}$.& 6$\frac{1}{2}$.

## SCHOLIVM.

*HOC problema sine Algebra solui etiam potest (quod quidem percommodum interdum erit in numeris Cossicis) hoc modo. Excessus datus quadratorum diuidatur per duplum excessus dati numerorum. Nam si ex Quotiente dematur semissis dati excessus numerorum, reliquus fiet minor numerus, qui ad datum excessum numerorum adiectus faciet numerum maiorem.*

*Sint enim inueniendi duo numeri, quorum excessus 6. & quadratorum excessus 1*𝓇*. Diuidatur 1*𝓇 *per 12. duplum scilicet numerum excessus 6.dati numerorum. Et ex Quotiente* $\frac{1}{12}$𝓇*. dematur numerus 3. semissis eiusdem excessus 6. numerorum. Nam reliquus numerus* $\frac{1}{12}$𝓇 − 3. *erit minor numerus quæsitus: ad quem si adicies datum excessum 6 facies* $\frac{1}{12}$𝓇 + 3. *maiorem numerum. Excessus enim horum duorum numerorum est 6. Et quadrati eorundem sunt* $\frac{1}{144}$ʒ — $\frac{1}{2}$𝓇 + 9. *&* $\frac{1}{144}$ʒ + $\frac{1}{2}$𝓇 + 9. *quorum excessus est 1*𝓇.

28 *Datis duobus numeris, alios duos in data proportione inuenire, quorum maior ad minorem datorum additus, tantum faciat, quantum minor ad maiorem adiectus.* XXVIII.

Sint dati numeri 9.& 30. inueniendique duo numeri in proportione quadrupla, &c. Ponatur minor 1𝓇. ideoque maior 4𝓇. Erit igitur æquatio inter 4𝓇 + 9.& 1𝓇 + 30. Ablata 1𝓇 vtrinque, erit æquatio inter 3𝓇 + 9.& 30. Et ablatis 9 vtrinque, inter 3𝓇. & 21. Diuisis ergo 21. per 3.fiet 1𝓇 7. minor numerus. Maior ergo erit 28. Et tam ex 28.& 9.quam ex 7.& 30.fiunt 37.

XXIX. 29 *Dato numero, alium inuenire, qui in datum ductus tantum faciat, quantum ad eundem additus*

Datus numerus sit 30. Pone quæsitum esse 1℞. qui ductus in 30. facit 30℞. additus vero ad 30. facit 1℞+30. Eritque æquatio inter 30℞. & 1℞+30. Ablata vtrinque 1℞. erit æquatio inter 29℞. & 30 Diuisis autem 30. per 29. erit 1℞ $\frac{30}{29}$. siue $1\frac{1}{29}$. Additis enim $1\frac{1}{29}$. ad 30. fiunt $31\frac{1}{29}$. quantum nimirum fit ex $1\frac{1}{29}$. in 30.

XXX. 30 *Dato numero, alium inuenire, vt eius pars aliquota data in datum numerum ducta tantum faciat, quantum totus numerus inuentus ad eundem datum numerum additus.*

Sit datus numerus 60. & data pars aliquota numeri inueniendi $\frac{1}{3}$. Ponatur $\frac{1}{3}$. numeri inueniendi 1℞. ac proinde totus numerus 3℞. Ex 1℞. id est, ex $\frac{1}{3}$. numeri quæsiti in 60. fit numerus 60℞. At ex 3℞ toto scilicet numero quæsito, & 60. fit numerus 3℞+60. Eritque æquatio inter 60℞. & 3℞+60. Ablatisque 3℞. vtrinque, inter 57℞. & 60. Diuisis ergo 60. per 57. fiet 1℞. $1\frac{1}{19}$. tertia pars numeri quæsiti, ac proinde numerus quæsitus $3\frac{3}{19}$. Nam ex $1\frac{1}{19}$. id est, ex $\frac{1}{3}$. numeri inuenti, in 60. fit numerus $63\frac{3}{19}$. æqualis summæ ex $3\frac{3}{19}$. & 60. collectæ.

XXXI. 31 *Datum numerum in duos partiri, ita vt minor sit maioris pars aliquota data, vel partes aliquota data, & contineat insuper datum alium numerum, si placet.*

Sit datus numerus 40. distribuendus primum in duos, vt minor sit $\frac{1}{7}$. maioris. Ponatur minor 1℞. eritque maior 7℞. qui æquales esse debent numero dato 40. Est igitur æquatio inter 8℞. & 40. Diuisisque 40. per 8. prodibit 1℞ 5. minor numerus. maior ergo erit 35. nimirum 7℞. Et manifestum est, 5. esse septimam partem numeri 35.

Sit deinde idem numerus 40. secandus in duos, vt minor constituat $\frac{3}{7}$. maioris. Ponatur minor 3℞. ideoque maior 7℞. vt ille huius $\frac{3}{7}$. contineat. Summa amborum est 10℞ æqualis dato numero 40. Diuisis ergo 40. per 10. reperietur 1℞. 4 ac proinde cum minor numerus positus sit 3℞ & maior 7℞. erit minor 12. & maior 28. continetque ille $\frac{3}{7}$. huius.

Si datus numerus 84. secandus sit in duos, vt minor maioris contineat $\frac{3}{4}$. & præterea 7. vnitates. ponemus maiorem esse 4℞. vt continere possit $\frac{3}{4}$. sine fractione. Eritque minor 3℞+7 Amborum summa est 7℞+7. æqualis dato numero 84. Ablatis 7. vtrinque, erit æquatio inter 7℞. & 77. Diuisisque 77. per 7. exibit 1℞ 11. Cum igitur maiorem posuerimus 4℞. & minorem 3℞+7. erit maior 44. & minor 40. continetque hic $\frac{3}{4}$. illius, nimirum 33. ac præterea 7.

XXXII. 32 *Duos numeros inuenire, ita vt si numerus productus ex eorum multiplicatione diuidatur per eorundem differentiam, Quotiens fiat datus quicunque numerus.*

Inueniendi sint duo numeri, ita vt numerus ex eorum multiplicatione productus si diuidatur per eorum differentiam, Quotientem faciat 30. Ponatur pro minore quilibet numerus minor dato Quotiente 30. nimirum 20. & maior ponatur 20+1℞. vt differentia eorum sit 1℞. Ex 20. in 20+1℞. fit numerus 400+20℞. quo diuiso per 1℞. eorum differentiam, fit Quotiens $\frac{400+20℞}{1℞}$. æqualis proposito numero 30. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad æqualitatem inter 30℞. & 400+20℞. Ablatis ergo 20. ℞ vtrobique, æquatio erit inter 10℞. & 400. Diuisisque 400. per 10. fiet 1℞. 40. pro differentia numerorum, qui quæruntur. Cum ergo minor sit 20. erit maior 60. nimirum 20+1℞. Iam vero ex 20. in 60. fit numerus 1200. quo diuiso per 40. differentiam numerorum, fit Quotiens 30.

XXXIII. 33 *Numerum inuenire, cuius duarum partium datarum quadrati summam conficiant, quæ ad aliam partem datam eiusdem numeri inueniendi proportionem habeat datam quamcunque.*

Sit inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{6}$. quadratos efficiant, quorum summa partis $\frac{1}{4}$. eiusdem numeri tripla sit. Ponatur numerus quæsitus 1℞. Partes datæ sunt $\frac{1}{3}$℞. & $\frac{1}{6}$.℞. quarum quadrati $\frac{1}{9}$ʒ. & $\frac{1}{36}$ʒ. summam conficiunt $\frac{5}{36}$ʒ. triplam ad $\frac{1}{4}$ ℞. hoc est, æqualem $\frac{3}{4}$℞. Diuisis ergo $\frac{3}{4}$. per $\frac{5}{36}$. fiet 1℞ $\frac{108}{20}$. id est, $\frac{27}{5}$. numerus quæsitus (propterea quod numeri Cossici collaterales sunt.) Huius enim $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{6}$ sunt $\frac{27}{15}$. & $\frac{27}{30}$. quarum quadrati $\frac{729}{225}$. & $\frac{729}{900}$. faciunt summam $\frac{3645}{900}$. quæ tripla est ad $\frac{81}{60}$. hoc est, ad $\frac{1}{4}$. inuenti numeri $\frac{27}{20}$.

XXXIV. 34 *Numerum inuenire, qui in se ductus, & productus numerus in datum quemuis numerum faciat numerum in data proportione ad cubum ex inuento numero procreatum.*

Sit datus numerus 20. inueniendusque sit alius, qui primum in se, deinde productus numerus in datum 20. gignat numerum quinruplum cubi ex inuento numero procreati. Ponatur numerus quæsitus 1℞. Ex 1℞ in se fit 1ʒ. Et ex 1ʒ. in 20. fit numerus 20ʒ. Cubus autem 1℞. est 1ℭ. ad quem 20ʒ. habere debent quintuplam proportionem. Igitur æquatio est inter 20ʒ. & 5ℭ. Diuisis ergo 20. per 5. fiet 1℞ 4. numerus quæsitus:

quia

quia numeri Cossici sunt collaterales. Hic enim numerus 4. ductus in se facit 16. Et ex 16. in 20. fit numerus 320. qui quintuplus est numeri 64. nimirum cubi ex inuento numero 4. procreati.

35 *Datum numerum in duos diuidere, vt alteruter eorum ductus in alium datum numerum excedat dato numero quolibet numerum productum ex altero numero in quemuis alium datum numerum.* XXXV.

Datus numerus 10. secandus sit primum in duos, vt productus numerus ex primo in 4. superet numerum productum ex secundo in 6. vnitate. Ponatur prima pars 1℞. ideoque secundæ 10 — 1℞. Ex 1℞. in 4. fiunt 4℞. Et ex 10 — 1℞ in 6. fiunt 60 — 6℞. Debetque hunc productum numerus 4℞. excedere Vnitate. Ac propterea æquatio erit inter 4℞. & 61 — 6℞. Additisque 6℞ vtrinque, inter 10℞. & 61. Diuisis igitur 61. per 10. fiet 1℞. 6 $\frac{1}{10}$. primus numerus. Secundus ergo erit 3 $\frac{9}{10}$. Ex primo in 4. fiunt 24 $\frac{4}{10}$. Et ex secundo in 6. fiunt 18 $\frac{54}{10}$. hoc est, 23 $\frac{4}{10}$. qui numerus vnitate superatur à 24 $\frac{4}{10}$.

Sit deinde idem numerus datus 10. secandus in duas partes, vt secunda pars ducta in 4. procreet numerum, qui vnitate superet productũ ex prima parte in 6. Ponatur rursum prima pars 1℞. & secunda 10 — 1℞. Ex 10 — 1℞. in 4. fit numerus 40 — 4℞. Et ex 1℞ in 6. fiunt 6℞. Hunc numerum ille productus superare debet Vnitate. Igitur æquatio erit inter 40 — 4℞. & 6℞ + 1. Ablataque Vnitate vtrinque, inter 39 — 4℞ & 6℞. Additisque 4℞ vtrinque, inter 39. & 10℞. Diuisis ergo 39. per 10. fiet 1℞. 3 $\frac{9}{10}$. primus numerus. Secundus igitur erit 6 $\frac{1}{10}$. Ex 6 $\frac{1}{10}$. in 4. fit numerus 24 $\frac{4}{10}$. Et ex 3 $\frac{9}{10}$. in 6. fiunt 18 $\frac{54}{10}$. siue 23 $\frac{4}{10}$. Manifestum autem est, numerum 24 $\frac{4}{10}$. vnitate superare numerum 23 $\frac{4}{10}$.

QVOD si excessus debeat esse 20. inter productos numeros: Ponatur primus numerus 1℞. & secundus 10 — 1℞. Ex 1℞ in 4. fit numerus 4℞. & ex 10 — 1℞ in 6. fit numerus 60 — 6℞. quem primum ille superare debeat numero 20. Erit igitur æquatio inter 4℞. & 80 — 6℞. Additisque 6℞ vtrinque, inter 10℞. & 80. Diuisis ergo 80. per 10. fiet 1℞ 8. primus numerus. Secundus ergo erit 2. Perspicuum autem est, numerum 32. qui fit ex primo 8. in 4. superare numerum 12. qui fit ex secundo 2. in 6. numero 20.

SED iam numerus 40 — 4℞ factus ex secundo 10 — 1℞. in 4. superare debeat numero 20. numerum 6℞. factum ex primo 1℞. in 6. Erit ergo æquatio inter 40 — 4℞. & 6℞ + 20. Additisque 4℞. vtrinque, inter 40. & 10℞ + 20. Ablatisque vtrinque 20. inter 20. & 10℞. Diuisis igitur 20. per 10. fiet 1℞ 2. primus numerus. Secundus ergo erit 8. Et certum est, numerum 32. ex secundo 8. in 4. factum, superare numerum 12. factum ex primo 2. in 6. numero 20.

36 *Datum numerum partiri in duas partes, quæ cum ipso progressionem Arithmeticam constituant.* XXXVI.

Datus numerus 20. diuidendus sit in duos, qui cum eodem numero 20. constituant tres numeros Arithmetice proportionales. Sit minor pars 1℞ & maior 20 — 1℞. Vt igitur 1℞. 20 — 1℞. 20. sint Arithmetice proportionales, erit idem excessus inter 1℞. & 20 — 1℞. qui inter 20 — 1℞ & 20. Sunt autem excessus 20 — 2℞. & 1℞. vt in hisce formulis subtractionum patet. Ergo æquatio erit inter 20 — 2℞. & 1℞. Et additis 2℞ vtrinque, inter 20. & 3℞ Diuisis ergo 20. per 3. fiet 1℞. 6 $\frac{2}{3}$. prima pars. Altera ergo erit 13 $\frac{1}{3}$. Constituuntque 6 $\frac{2}{3}$. 13 $\frac{1}{3}$. & 20. progressionem Arithmeticam, cum eundem excessum habeant 6 $\frac{2}{3}$.

| | |
|---|---|
| 20 — 1℞ | 20 + 0 |
| + 1℞ | 20 — 1℞ |
| 20 — 2℞ | 0 + 1℞ |

Aliter. Si 1℞. 20 — 1℞. 20. sunt Arithmetice proportionales; erit (vt lib. 5. Eucl. in 4. proprietate trium numerorum Arithmetice proportionalium diximus) summa primi & tertij, nimirum 1℞ + 20. æqualis duplo medij, nimirum 40 — 2℞. Additis ergo 2℞ vtrinque, existet æquatio inter 3℞ + 20. & 40. Ablatisque 20. vtrinque, inter 3℞. & 20. Ergo rursus 1℞ erit 6 $\frac{2}{3}$. vt prius.

37 *Inuenire duos numeros, qui inter se multiplicati faciant numerum, qui ad minorem habeat datam proportionem, & ad maiorem quoque proportionem datam, sed illa minorem.* XXXVII

Proportio producti ad minorem sit decupla, & ad maiorem sesquialtera. Ponatur productus 30℞. (Numerus enim 30℞ ad 3℞. habet proportionem decuplam, & ad 20℞. sesquialteram.) Erit minor numerus 3℞ & maior 20℞. qui inter se multiplicati debent facere 30℞. Faciunt autem 60ʒ. Est ergo æquatio inter 30℞ & 60ʒ. Diuisisque 30. per 60. exibit 1℞ $\frac{1}{2}$. quod numeri Cossici sint collaterales. Ergo minor numerus, quem posuimus 3℞. erit 1 $\frac{1}{2}$. Maior autem, qui positus est 20℞. erit 10. Atque ex 1 $\frac{1}{2}$. hoc est, ex 3. in 10. fit numerus $\frac{15}{1}$. siue 15. qui ad 1 $\frac{1}{2}$. vel ad $\frac{3}{2}$. habet proportionem decuplam, & ad 10. sesquialteram

## S C H O L I V M.

*Hoc ænigma sine Algebra soluetur, si pro numeris quæsitis accipiantur denominatores proportionum datarum. vt si inueniendi sint duo numeri, qui inter se multiplicati producant numerum, qui ad minorem habeat proportionem septuplam, & ad maiorem sextuplam: erunt duo numeri 7. & 6. Hi enim inter se multiplicati faciunt 42. numerum, qui ad 6. proportionem habet septuplam, & ad 7. sextuplam, vt patet.*

XXXVIII 38 *Datum numerum in quotuis partes Arithmetice proportionales diuidere, quarum differentia data sit: quando id fieri potest.*

Datus numerus 120. diuidendus sit in sex partes, quæ ordine sese excedant binario. Ponatur prima pars 1℞. Erit secunda 1℞+2. Tertia 1℞+4. Quarta 1℞+6. Quinta 1℞+8. & sexta 1℞+10. quæ omnes simul faciunt summam 6℞+30. æqualem dato numero 120. Ablatis ergo 30. vtrinque, erit æquatio inter 6℞ & 90. Diuisisque 90. per 6. fiet 1℞. 15. prima pars. Sunt ergo sex partes, 15. 17. 19. 21. 23. 25. quæ binario se excedunt, & summam faciunt 120.

DEBET autem datus numerus maior esse summa terminorum totidem Arithmeticæ progressionis, vno minus, in quot partes datus numerus iubetur distribui; quæ quidem à dato excessu incipiat. Vt in dato exemplo, maior quam summa 30. quinque terminorum 2. 4. 6. 8. 10. Alias res non succedet, quia incideremus in æquationem inter duos numeros omnino inæquales. Atque idcirco diximus in ænigmate, [quando id fieri potest.]

XXXIX. 39 *Datum numerum in quotuis partes Arithmetice proportionales partiri, quarum prima data sit: quando id fieri potest.*

Sit datus numerus 60. diuidendus in 11. partes Arithmeticam progressionem constituentes, cuius primus terminus sit 5. Pone differentiam progressionis 1℞. Erunt ergo 11. termini hi. 5. 5+1℞. 5+2℞. 5+3℞. 5+4℞. 5+5℞. 5+6℞. 5+7℞. 5+8℞ 5+9℞. 5+10℞. quorum summa 55℞+55. æqualis esse debet dato numero 60. Ablatis ergo vtrinque 55. erit æquatio inter 55℞ & 5. Diuisisque 5 per 55. fit 1℞. $\frac{1}{11}$. differentia progressionis. Erunt ergo 11. partes quæsitæ hæ. 5. 5$\frac{1}{11}$. 5$\frac{2}{11}$. 5$\frac{3}{11}$. 5$\frac{4}{11}$. 5$\frac{5}{11}$. 5$\frac{6}{11}$. 5$\frac{7}{11}$. 5$\frac{8}{11}$. 5$\frac{9}{11}$. 5$\frac{10}{11}$. quæ omnes simul faciunt 60.

DEBET autem datus numerus maior esse numero, qui fit ex numero terminorum in primum terminum datum. Vt in dato exemplo maior, quam 55. qui numerus fit ex numero terminorum, videlicet ex 11. in primum terminum 5. Hanc ob causam dictum est in ænigmate [quando id fieri potest.]

XL. 40 *Datis duobus numeris, inuenire alios duos in data proportione, vt productus ex maiore horum in maiorem illorum faciat numerum, qui dato quolibet numero superet productum ex minore in minorem.*

DATI numeri sint 5. & 9. oporteatque inuenire duos alios in proportione tripla, quorum maior ductus in 9. faciat numerum, qui superet productum ex minore in 5. numero 110. Ponatur minor 1℞. ideoque maior 3℞. Ex 3℞. in 9 fiunt 27℞. & ex 1℞ in 5. fiunt 5℞. Superat autem numerus 27℞. numerum 5℞. numero 22℞. qui æqualis debet esse numero 110. Diuisis ergo 110. per 22. fiet 1℞ 5. primus numerus: ideoque maior erit 15. Ex 15. in 9. fit numerus 135. qui superat 25. numerum ex 5. in 5. factum numero 110.

XLI. 41 *Datis duobus numeris, inuenire alios duos in data proportione: vt productus ex maiore horum in minorem illorum superet dato numero eum, qui ex minore in maiorem fit. Vel certe hic productus illum dato numero excedat.*

Sint dati numeri 5. & 9. oporteatque duos alios inuenire in dupla proportione, quorum maior ductus in 5. producat numerum, qui 10. vnitatibus superet productum ex minore in 9. Ponatur minor 1℞. ac propterea maior 2℞. (Debet autem hic maior in minorē datum producere numerum maiorem eo, qui ex minore in datum maiorem fit, vt nimirum ille hunc superare possit. Vnde si dati numeri forent 2. & 9. quæstio esset impossibilis; quippe cum ex 2℞. in 2. fiat numerus 4℞. minor numero 9℞. qui fit ex 1℞. in 9.) Ex 2℞ in 5. fit numerus 10℞. Et ex 1℞ in 9. fit numerus 9℞. quem ille superat 1℞. Est igitur æquatio inter 1℞. & 10. Diuisisque 10. per 1. fit 1℞ 10. minor numerus, ac proinde maior erit 20. Vides ergo numerum 100. factum ex 20. in 5. superare 90. numerum ex 10. in 9. factum 10. vnitatibus.

XLII. 42 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt summa quadratorum ex ipsis descriptorum ad eorum summam habeat datam proportionem.*

Sint inueniendi duo numeri in quintupla proportione, ita vt summa quadratorū ex ipsis descriptorum, ad inuentorum numerorum summam habeat proportionem decuplam. Ponatur minor numerus 1℞. ideoq; maior 5℞ quadrati sunt 1ʒ & 25ʒ. eorumq; summa 26ʒ. decupla summæ eorum, quæ est 6℞. Erit ergo æquatio inter 26ʒ. & 60℞. Diuisis autem 60. per 26. fiet 1℞. 2$\frac{4}{13}$. siue $\frac{30}{13}$. minor numerus, (quod numeri Cossici collaterales sint.) atque adeo maior $\frac{150}{13}$. siue 11$\frac{7}{13}$. Quadrati sunt $\frac{900}{169}$. & $\frac{22500}{169}$. quorum summa $\frac{23400}{169}$. decupla est ad $\frac{180}{13}$. summam inuentorum numerorum.

IISDEM positis, si proportio inuenienda sit æqualitatis. erit æquatio inter 26ʒ. & 6℞. Diuisis ergo 6 per 26. fiet 1℞ $\frac{3}{13}$. minor numerus. (quia Cossici numeri sunt collaterales.) Maior autem erit $\frac{15}{13}$. Quadrati sunt $\frac{9}{169}$. & $\frac{225}{169}$. eorumque summa $\frac{234}{169}$. æqualis summæ $\frac{18}{13}$. ex inuentis numeris collectæ.

Et si proportio inuenienda sit minoris inæqualitatis, vt subdupla, erit numerus 26ʒ. subduplus numeri 6℞. hoc est hic illius erit duplus. Igitur erit æquatio inter 52ʒ. & 6℞. Vel inter 26ʒ. & 3℞. Diuisisque 6. per 52. vel 3. per 26 fiet 1℞. $\frac{3}{26}$. minor numerus. Maior ergo erit $\frac{15}{26}$. Quadrati sunt $\frac{9}{676}$. & $\frac{225}{676}$. eorumque summa $\frac{234}{676}$. subdupla summæ $\frac{18}{26}$. ex inuentis numeris collectæ: quippe cum hæc illius sit dupla.

43 Datu

43 *Datis duobus numeris, inuenire alios duos in data proportione, vt maior horum ad maiorem datorum additus faciat numerum in data quacunque proportione ad summam ex minoribus collectam. dummodo hæc secunda proportio data sit inter proportionem datorum numerorum, & proportionem alteram datam.* XLIII.

Sint dati numeri 10. & 12. oporteatque inuenire alios duos in proportione quintupla, vt summa ex maiore, & 12. tripla sit ad summam ex minore, & 10. Est autem proportio tripla inter proportionem 12. ad 10. & proportionem quintuplam, hoc est, maior quam illa, & minor, quam hæc. Ponatur minor numerus 1℞ ideoq; maior 5℞ Ex 5℞. & 12. fit numerus 5℞+12. Et ex 1℞. & 10. numerus 1℞+10. cuius ille triplus esse debet. Ergo æquatio erit inter 5℞+12. & 3℞+30. Ablatisque vtrinque 12. inter 5℞. & 3℞+18. Et rursum ablatis 3℞. vtrinque, inter 2℞. & 18. Diuisis igitur 18. per 2. fiet 1℞. 9. minor numerus, ideoq; maior 45. Ex 45. & 12. fit numerus 57. qui triplus est ad numerum ex 9. & 10. collectum, nimirum ad 19.

44 *Datis duobus numeris, inuenire alios duos in data proportione, vt subtracto minore horum ex datorum maiore, reliquus numerus ad eum, qui relinquitur, detracto maiore ex minore, proportionem habeat datam quamcunque.* XLIIII.

Sint dati duo numeri 60. & 100. oporteatque alios duos inuenire in proportione quintupla, vt minore ex 100. subtracto, reliquus numerus ad eum, qui relinquitur, detracto maiore ex 60. proportionem habeat vigecuplam. Ponantur duo numeri in proportione quintupla, 1℞. 5℞. Dempta 1℞. ex 100. reliquus numerus est 100—1℞. Demptis autem 5℞ ex 60. remanent 60—5℞. eritque numerus 100—1℞. ad 60—5℞. vigecuplus: h. e. æquatio erit inter 100—1℞ & 1200—100℞. Additis 100℞. vtrinq;, erit æqualitas inter 100+99℞. & 1200. Ablatisq; 100. vtrinq; inter 99℞ & 1100. Diuisis ergo 1100. per 99 fiet 1℞. 11 $\frac{11}{99}$. vel $\frac{1100}{99}$. minor numerus, ac proinde maior $\frac{5500}{99}$. vel 55 $\frac{55}{99}$. Prior ex 100. detractus relinquit 88 $\frac{88}{99}$. posterior vero ex 60. subtractus relinquit 4 $\frac{44}{99}$. Habentque 88 $\frac{88}{99}$. hoc est $\frac{8800}{99}$, ad 4 $\frac{44}{99}$. siue ad $\frac{440}{99}$. proportionem eandem quam 20. ad 1.

45 *Datis duobus numeris, alios duos in data proportione inuenire, vt maiore ex maiore detracto, & minore ex minore, numeri remaneant æquales: debet autem proportio data esse maior proportione datorum numerorum.* XLV.

Sint dati duo numeri 100. & 60. oporteatque inuenire alios duos in septupla proportione, vt maiore detracto ex 100. & minore ex 60. numeri reliqui sint æquales. Ponantur numeri in proportione septupla, 1℞. 7℞. eruntq; reliqui numeri 100—7℞. & 60—1℞. æquales, Additis ergo vtrinq; 7℞ erit æquatio inter 100. & 60+6℞. Et ablatis 60. vtrinque, inter 40 & 6℞. Diuisis autem 40. per 6. erit 1℞. 6 $\frac{2}{3}$. minor numerus, maior autem huius septuplus, 46 $\frac{2}{3}$. Ablato illo ex 60. & hoc ex 100. reliqui fiunt numeri æquales 53 $\frac{1}{3}$.

46 *Tres numeros in data proportione Geometrica continua inuenire, vt productus ex multiplicatione, quorumcunque duorum inter se, æqualis sit reliquo, vel ad ipsum habeat quamlibet proportionem datam.* XLVI.

Sint inueniendi tres numeri in proportione tripla, sitque primum productus ex minimo in medium, maximo æqualis. Ponantur tres numeri tripli, 1℞. 3℞. 9℞. Ex 1℞. in 3℞. fit numerus 3ʒ. æqualis 9℞. Diuisis ergo 9. per 3: fiet 1℞. 3. quia numeri Cossici collaterales sunt. Tres ergo numeri quæsiti sunt 3. 9. 27. Atque ex 3. in 9. fit numerus 27. maximo 27. æqualis.

Sit deinde productus ad maximum quadruplus, ita vt productus 3ʒ. ad 9℞. proportionem habeat quadruplam, hoc est, æquatio sit inter 3ʒ. & 36℞. Diuisis ergo 36. per 3. fiet 1℞. 12. eruntque tres numeri tripli, 12. 36. 108. Et ex 12. in 36. fit numerus 432. ad 108. quadruplus.

Sit rursum productus ad maximum subduplus, ita vt productus 3ʒ. ad 9℞. proportionem habeat subduplam: hoc est, æquatio fiat inter 6ʒ. & 9℞. Diuisis ergo 9. per 6. fiet 1℞ $\frac{3}{2}$. sunt ergo tres numeri tripli $\frac{3}{2}$. $\frac{9}{2}$. $\frac{27}{2}$. Et ex $\frac{3}{2}$. in $\frac{9}{2}$. fit numerus $\frac{27}{4}$. subduplus ad $\frac{27}{2}$.

IAM vero ex secundo 3℞. in tertium 9℞. fiat numerus 27ʒ. qui æqualis debeat esse primo nimirum 1℞. Diuisa 1. per 27. fit 1℞. $\frac{1}{27}$. Tres ergo numeri tripli sunt $\frac{1}{27}$. $\frac{3}{27}$. $\frac{9}{27}$. Et ex $\frac{3}{27}$. in $\frac{9}{27}$. fit numerus $\frac{27}{729}$. æqualis primo $\frac{1}{27}$.

At si productus 27ʒ. ex secundo in tertium debeat ad primum 1℞. habere proportionem triplam, erit æqualitas inter 27ʒ & 3℞. Diuisis ergo 3. per 27. fiet 1℞. $\frac{1}{9}$. eruntque tres numeri tripli $\frac{1}{9}$. $\frac{3}{9}$. $\frac{9}{9}$. Et ex $\frac{3}{9}$ in $\frac{9}{9}$. hoc est, ex $\frac{1}{3}$. in 1. fit $\frac{1}{3}$. qui numerus triplus est primi $\frac{1}{9}$.

POSREMO ex primo 1℞. in tertium 9℞ produci debeat numerus æqualis secundo 3℞. hoc est, æquatio esse debeat inter 9ʒ. qui numerus fit ex primo in tertium, & 3℞ Diuisis ergo 3. per 9. fiet 1℞ $\frac{1}{3}$. Eruntque tres numeri tripli $\frac{1}{3}$. 1. 3. Et ex primo $\frac{1}{3}$. in tertium 3. fit 1. æqualis secundo 1.

Si vero productus ex primo 1℞. in tertium 9℞. id est, 9ʒ. debeat habere ad secundum 3℞. proportionem sextuplam, erit æquatio inter 9ʒ & 18℞. Diuisis ergo 18. per 9. fiet 1℞. 2. Eruntque tres numeri tripli, 2. 6. 18. Atque ex 2. in 18. fit numerus 36. sextuplus secundi numeri 6.

47 *Datum numerum partiri in duas partes: vt maiore diuisa per minorem, Quotiens sit datus idem numerus.* XKVII.

Sit datus numerus 40. & datus Quotiens itē 40. Ponatur minor pars 1℞. & maior 40.—1℞ Hac per illā

diuisa, fit quotiens $\frac{40-1℞}{1℞}$. æqualis 40. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 40 − 1℞. & 40 ℞. Additaque 1. ℞ vtrinque, erit æquatio inter 40. & 41 ℞. Diuisis ergo 40. per 41. fiet 1℞ $\frac{40}{41}$. minor pars. Maior proinde erit 39 $\frac{1}{41}$. Quia per illam diuisa, fit Quotiens 40.

Si maior pars ponatur 1℞. & minor 40 − 1℞. Diuisa illa per hanc, fit Quotiens $\frac{1℞}{40-1℞}$. æqualis 40. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 1℞. & 1600 − 40℞. Additisque 40 ℞ vtrinque, inter 41℞. & 1600. Diuisis igitur 1600. per 41. fit maior pars 39 $\frac{1}{41}$. ac proinde minor $\frac{40}{41}$. vt prius.

XLVII. 48 *Duos numeros inuenire, vt primus cum quolibet multiplici secundi faciat numerum æqualem ei, qui conflatur ex secundo & quouis multiplici primi. Vel vt primus cum data parte secundi tantum faciat, quantum secundus cum data parte primi. Vel denique, vt si primus sumat multiplicem quemcunque secundi, & secundus quemlibet multiplicem primi: Aut si primus accipiat partem datam secundi, & secundus datam partem primi; fiant duo numeri in data quauis proportione.*

Debeat primus cum triplo secundi facere tantum; quantum secundus cum quintuplo primi. Ponatur primus 1℞. & secundus quiuis numerus, videlicet 50 Ergo 1℞ + 150. & 50 + 5℞. æquales sunt. Ablataq; 1℞ vtrinque, erit æquatio inter 150. & 50. + 4℞. Et rursum ablatis 50. vtrinq;, inter 100. & 4℞. Diuisis igitur 100. per 4. fiet 1 ℞. 25 Numeri ergo quæsiti sunt 25. & 50. Nam primus 25 cum triplo secundi, hoc est, cum 150. facit 175. quantum secundus 50. cum quintuplo primi, id est, cum 125.

DEBEAT deinde primus cum $\frac{1}{7}$. secundi, & secundus cum $\frac{1}{3}$. primi facere vnum eundemque numerum. Ponatur primus 3℞. vt habeat $\frac{1}{3}$. sine fractione Secundus autem quilibet numerus habens $\frac{1}{7}$ sine fractione, nimirum 21. Primus igitur cum $\frac{1}{7}$. secundi faciet 3℞ + 3. Secundus vero cum $\frac{1}{3}$. primi faciet 21 + 1℞. Est ergo æquatio inter 3℞ + 3. & 21 + 1℞. Ablataque 1℞ vtrinque, inter 2℞ + 3. & 21. Ablatisque rursum 3. vtrinque inter 2℞. & 18. Diuisis ergo 18. per 2 fiet 1℞ 9. Primus igitur positus 3℞. erit 27. & secundus 21. vt posuimus Nam & 27. cum $\frac{1}{7}$. numeri 21. & 21. cum $\frac{1}{3}$. numeri 27. facit 30.

SED iam primus cum quadruplo secundi, & secundus cum triplo primi facere debeant duos numeros in proportione dupla. Ponatur primus 1℞. & secundus quiuis numerus, videlicet 6. Primus igitur cum quadruplo secundi faciet 1℞ + 24. Secundus vero cum triplo primi faciet 6 + 3℞. Si ergo statues 1℞ + 24. maiorem, qui duplus debet esse ad 6 + 3℞. erit æquatio inter 1℞ + 24. & 12 + 6℞. Ablataque 1℞ vtrinque, inter 24. & 12 + 5℞. Ablatisque rursum 12. vtrinque inter 12. & 5℞. Diuisis igitur 12. per 5. fiet 1℞ $\frac{12}{5}$. id est, 2 $\frac{2}{5}$ primus numerus: secundus vero erit 6. vt positum fuit. Iam primus cum quadruplo secundi facit 26 $\frac{2}{5}$. secundus autem cum triplo primi facit $\frac{66}{5}$. id est, 13 $\frac{1}{5}$. habetque numerus 26 $\frac{2}{5}$. ad 13 $\frac{1}{5}$. proportionem duplam.

Si vero statues 6 + 3℞ maiorem, qui ad 1℞ + 24. duplus debet esse, erit æquatio inter 6 + 3℞. & 2℞ + 48. Et ablatis 2℞ vtrinque, inter 6 + 1℞ & 48 ablatisq; rursum 6. vtrinque, inter 1℞. & 42. fietque 1℞ 42. primus numerus, secundus autem erit 6. vt posuimus. Primus cum quadruplo secundi facit 66. at vero secundus cum triplo primi facit 132. qui numerus ad 66. proportionem habet duplam.

DENIQVE primus cum $\frac{1}{7}$. secundi, & secundus cum $\frac{1}{3}$ primi facere debeant duos numeros in sextupla proportione. Ponatur primus 3℞. vt habeat $\frac{1}{3}$. sine fractione, & secundus quilibet numerus habens $\frac{1}{7}$. sine fractione, nimirum 7. Primus ergo cum $\frac{1}{7}$. secundi faciet 3℞ + 1. Secundus vero cum $\frac{1}{3}$ primi facit 7 + 1℞. Et quia hi duo numeri debent habere proportionem sextuplam, erit necessario 7 + 1℞ maior. Nam si ducatur in 6. vt fiat æqualis numero 3℞ + 1. producetur numerus 42 + 6℞. qui numero 3℞ + 1. æqualis esse nequit. Igitur æquatio erit inter 18℞ + 6. & 7 + 1℞. Ablataq; 1℞ vtrinque, inter 17℞ + 6. & 7. Ablatisq; rursum 6. vtrinq, inter 17℞. & 1. Diuisa igitur 1. per 17. fiet 1℞ 1. $\frac{1}{17}$. Et quia primus numerus positus fuit 3℞. erit primus numerus $\frac{3}{17}$. & secundus 7. vt positus fuit. Primus cum $\frac{1}{7}$ secundi facit 1 $\frac{3}{17}$. id est, $\frac{20}{17}$. Secundus cum $\frac{1}{3}$ primi facit 7 $\frac{1}{17}$. hoc est, $\frac{120}{17}$. qui numerus ad $\frac{20}{17}$. proportionem habet sextuplam.

XLIX 49 *Datum numerum distribuere in quotuis partes in data proportione Geometrica continua.*

Sit datus numerus 4665. secandus in 5. numeros continue sextuplos. Pone 5. numeros in sextupla proportione. 1℞. 6℞. 36℞. 216℞. 1296℞. Horum summa 1555℞. æqualis esse debet dato numero 4665. diuisis ergo 4665. per 1555. fiet 1℞ 3. eruntque quinque numeri in proportione sextupla continua. 3. 18. 108. 648. 3888. qui simul additi faciunt 4665.

Si secandus sit numerus 20. in tales quinque partes, inuenies 1555℞. æquales 20. Diuisisque 20. per 1555. fiet 1℞ $\frac{4}{311}$. Eruntque quinque partes in proportione sextupla $\frac{4}{311}$. $\frac{24}{311}$. $\frac{144}{311}$. $\frac{864}{311}$. $\frac{5184}{311}$. facientes summam 20.

L. 50 *Inuenire quotuis numeros in data proportione Geometrica continua, quorum summa dato cuicunque numero sit æqualis.*

Sint inueniendi 5 numeri in proportione continua sextupla, facientes 4665. vel 20. Hoc ænigma à proxime præcedenti non differt. Nam si summa data secetur in 5. numeros in sextupla proportione continua, factum erit, quod iubetur.

51 *Datum numerum in tres numeros partiri, vt minores duo datam habeant differentiam: Item duo maiores aliam differentiam.* LI.

Sit datus numerus 445. & minorum differentia 10. & maiorum 20. Ponatur minimus numerus 1℞. eritque medius 1℞ + 10, ac maximus 1℞ + 30. Horum summa 3℞ + 40. æqualis esse debet dato numero 445. Ablatis vtrinque 40. erit æquatio inter 3℞ & 405. Diuisis igitur 405. per 3. inuenietur 1℞. 135 minimus numerus. atque idcirco medius erit 145. & maximus 165. qui ænigmati satisfaciunt, quod summam conficiant 445.

Si datus numerus sit 200. erunt 3℞ + 40. æquales 200. & ablatis vtrinque 40. erit æquatio inter 3℞. & 160. Diuisisque 160. per 3. erit 1℞. 53$\frac{1}{3}$. primus numerus, secundus erit 63.$\frac{1}{3}$. & tertius 83$\frac{1}{3}$. qui habent datos excessus, & conficiunt 200.

Aliter. Ponatur medius 1℞ eritque minimus 1℞ − 10. & maximus 1℞ + 20. quorum summa 3℞ + 10. æqualis esse debet dato numero 445. vel 200. Ablatis 10. vtrinque, erit æquatio inter 3℞. & 435. vel 190. Facta diuisione, erit 1℞. 145. vel 63$\frac{1}{3}$. primus numerus. Ergo in primo exemplo erunt tres numeri 135. 145. 165. In secundo autem, 53$\frac{1}{3}$. 63$\frac{1}{3}$. 83$\frac{1}{3}$. vt prius.

52 *Tres numeros inuenire, vt minorum differentia sit data: Item maiorum differentia alia data: Et omnes tres datum numerum conficiant.* LII.

Sit minorum differentia 10. & maiorum 20. eorumque summa 445. vel 200. Hoc etiam problema non differt à proxime antecedenti. Si namque data summa distribuatur in tres partes datorum excessuum, factum erit, quod præcipitur.

53 *Datum numerum partiri in tres, vt vteruis extremorum cum medio ad alterum extremum proportionem habeat datam.* LIII.

Sit primum diuidendus datus numerus 100. in tres, vt primus cum medio ad tertium habeat proportionem triplam: tertius vero cum medio ad primum quadruplam. Ponatur primus 1℞. Eruntque alij duo simul 4℞. vt ad primum possint habere proportionem quadruplam. Horum ergo summa 5℞. æqualis esse debet dato numero 100 Diuisis igitur 100. per 5 fiet 1℞. 20. primus numerus, ideoque alij duo simul, 80. Ponatur deinde tertius 1℞. ideoq; medius 80 − 1℞. Igitur primus 20. cum medio 80 − 1℞. hoc est, 100 − 1℞ ad tertium 1℞. triplus est, atque idcirco æquatio erit inter 100 − 1℞ & 3℞. Additaque vtrinque 1℞. inter 100. & 4. ℞. Diuisisque 100. per 4. fiet 1℞ 25. tertius numerus. Medius ergo erit 55. qui relinquitur, detracto tertio 25. ex 80. Tres propterea numeri erunt 20. 55. 25. qui simul efficiunt 100. & primus cum medio efficit 75. numerum triplum ad tertium 25. At tertius cum medio facit 80. numerum quadruplum ad primum 20.

Si datus sit numerus 60. secandus in tres, vt primus cum medio ad tertium habeat proportionem noncuplam, sed tertius cum medio ad primum, quadruplam, procedemus eodem modo. Nam si primus ponatur 1℞. erunt alij duo simul. 4℞ atque idcirco 5℞ æquales 60. dato numero. Diuisis ergo 60. per 5. fiet 1℞. 12. primus numerus; ideoque alij duo facient 48. Rursum si tertius ponatur 1℞. facient alij duo simul 9℞. vt ad tertium habere possint proportionem noncuplam. Igitur 10℞. æquales erunt dato numero 60. Diuisisque 60. per 10. fiet 1℞. 6. tertius numerus. Medius autem erit 42. qui relinquitur, si tertius 6 ex 48. dematur. Quocirca tres numeri quæsiti erunt 12. 42. 6. qui simul conficiunt 60. Et primus cum medio facit numerum 54. qui ad tertium 6. noncuplus est. Tertius vero cum secundo facit 48. qui numerus ad primum 12. quadruplus est.

Sit deinde idem numerus 100. distribuendus in tres, vt tam primus cum secundo ad tertium, quam tertius cum secundo ad primum habeat proportionem triplam. Ponatur primus 1℞ & secundus, ac tertius 3℞. vt ad primum habeant proportionem triplam. Horum summa 4℞ æqualis est 100. Diuisis igitur 100. per 4. fiet 1℞. 25. primus numerus; ideoque secundus, ac tertius facient 75. Ponatur deinde tertius 1℞, ideoque secundus 75 − 1℞. Igitur primus cum secundo faciet summam 100 − 1℞. triplam ad tertium, id est, ad 1℞. siue æqualem 3℞. Addita 1℞. vtrobique, erit æqualitas inter 100. & 4℞ Diuisis igitur 100. per 4. fiet 1℞. 25. tertius numerus, ac proinde secundus erit 50. nimirum 75 − 1℞. Itaque tres numeri erunt 25. 50. 25. Et tam summa primi, & secundi ad tertium, quam summa tertij ac secundi ad primum, proportionem habet triplam.

Si vtraque proportio deberet esse quadrupla, reperirentur tres numeri 20 60. 20.

54 *Inuenire tres numeros, ita vt primus cum secundo proportionem ad tertium habeat datam Item tertius cum secundo ad primum datam proportionem habeat: Omnesque tres conficiant summam datam.* LIIII.

HOC ænigma à præcedenti diuersum non est. Nam si data summa diuidatur in tres numeros, vt iubetur, expeditum erit ænigma, non aliter, ac præcedens.

55 *Numerum inuenire, ita vt quadratus ex parte eius aliquota data descriptus, & quadratus alterius cuiusuis partis eius aliquota, conficiant ipsum numerum, vel alium qui ad inuentum numerum proportionem habeat datam.* LV.

INVENIENDVS sit numerus, ita vt quadratus ex eius semisse descriptus, & quadratus ex eiusdem parte sexta descriptus, efficiant ipsum numerum, vel alium, qui ad inuentum proportionem habeat octuplam supertripartientem quartas. Ponatur numerus esse 6℞. vt sine

vt fine fractione habeat partes expressas. Eius semissis est 3℞ & sexta pars 1℞. Harum partium quadrati sunt 9ʒ & 1ʒ. qui faciunt 10ʒ. numerum æqualem 6℞. Diuisis ergo 6. per 10. fiet 1℞. $\frac{3}{5}$. (quod numeri Cossici collaterales sint,) ac proinde 6℞. erunt $\frac{18}{5}$. numerus quæsitus. Semissis eius $\frac{9}{5}$. facit quadratum $\frac{81}{25}$. Et eius sexta pars $\frac{3}{5}$ facit quadratum $\frac{9}{25}$. qui cum $\frac{81}{25}$. facit $\frac{90}{25}$. id est, $\frac{18}{5}$. numerum quæsitum.

SED iam duo quadrati facere debeant numerum, qui ad inuentum numerum habeat proportionem octuplam supertripartientē quartas. Ponatur numerus esse 1℞. Eius semissis est $\frac{1}{2}$. ℞ & sexta pars $\frac{1}{6}$℞. Quadrati harum partium sunt $\frac{1}{4}$ʒ. & $\frac{1}{36}$ʒ. qui simul faciunt $\frac{10}{36}$ʒ. qui numerus ad 1℞. habere debet proportionem octuplam supertripartientem quartas, cuius videlicet denominator est $8\frac{3}{4}$. Hic autem ductus in 1℞. facit $8\frac{3}{4}$℞. cui numero æqualis esse debet numerus $\frac{10}{36}$ʒ. Diuisis ergo $8\frac{3}{4}$. per $\frac{10}{36}$. fiet 1℞. $31\frac{1}{2}$ siue $\frac{63}{2}$. numerus inuentus (quod numeri Cossici collaterales sint.) eius enim semissis $\frac{63}{4}$. facit quadratum $\frac{3969}{16}$. Et eiusdem sexta pars $\frac{63}{12}$. facit quadratum $\frac{3969}{144}$. qui cum priori quadrato $\frac{3969}{16}$. id est, cum $\frac{35721}{144}$. facit numerum $\frac{39690}{144}$. qui ad inuentum $\frac{63}{2}$ proportionem habet octuplam supertripartientem quartas. quippe cum iste per hunc diuisus Quotientem faciat $8\frac{3}{4}$.

LVI. 56 *Datum numerum partiri in duos, vt data pars primi cum secundo tantum faciat, quantum secundi pars alia data cum primo efficit.*

Numerus datus 44. secandus sit in duos, vt $\frac{1}{5}$. primi cum secundo, & $\frac{1}{3}$. secundi cum primo, faciant duos numeros æquales. Ponatur primus 1℞. ideoque secundus 44 − 1℞. Quinta pars primi, nimirum $\frac{1}{5}$℞. cum secundo facit 44 − $\frac{4}{5}$℞. Et tertia pars secundi, nimirum $\frac{44 - 1℞}{3}$ cum primo facit 1℞ + $\frac{44 - 1℞}{3}$. Est ergo æquatio inter 44 − $\frac{4}{5}$℞. & 1℞ + $\frac{44 - 1℞}{3}$. Ablata 1℞. vtrinque, erit æquatio inter 44 − $\frac{9}{5}$℞ & $\frac{44 - 1℞}{3}$. quæ æquatio per multiplicationem in crucem (supposita 1. priori numero, vt fiat hæc fractio $\frac{44 - \frac{9}{5}℞}{1}$) reducetur ad æqualitatē inter 132 − $\frac{27}{5}$℞ & 44 − 1℞. Et additis $\frac{27}{5}$℞. vtrinq; inter 132. & 44 + $\frac{22}{5}$℞ Ablatisq; 44. vtrinque inter 88 & $\frac{22}{5}$℞. Diuisis igitur 88. per $\frac{22}{5}$. fiet 1℞. 20. primus numerus. Secundus vero erit 24. Vbi vides quintam partem primi, nimirum 4. cum secundo facere 28. quantum scilicet facit tertia pars secundi, nimirum 8. cum primo.

LVII. 57 *Duos numeros inuenire, ita vt primus, accepto quolibet numero à secundo, faciat numerum, qui ad reliquum secundi proportionem habeat datam. Item secundus, accepto quolibet etiam numero à primo, faciat numerum, qui ad reliquum primi proportionem etiam habeat datam.*

SINT inueniendi duo numeri, vt primus accipiens 40. à secundo faciat numerum reliqui secundi quadruplum. At secundus accipiens 30. à primo faciat numerum residui primi noncuplum. Ponatur primus 1℞ Si igitur accipiat 40. à secundo, habebit 1℞ + 40. ac proinde secundo remanent $\frac{1}{4}$. ℞ + 10. vt nimirum ille ad hunc proportionem habeat quadruplam. Ergo antequam secundus daret primo 40. habuit $\frac{1}{4}$℞ + 50. Ac proinde si accipiat 30. à primo habebit $\frac{1}{4}$℞ + 80. qui numerus ad reliquum primi, videlicet ad 1℞ − 30. debet habere proportionem noncuplam. Erit ergo æquatio inter $\frac{1}{4}$℞ + 80 & 9℞ − 270. Additisque 270. vtrinque, inter $\frac{1}{4}$℞ + 350. & 9℞. Ablataque $\frac{1}{4}$℞. vtrinque. inter 350. & $8\frac{3}{4}$℞. Diuisis igitur 350. per $8\frac{3}{4}$ fiet 1℞. 40. primus numerus. Secundus autem erit 60. nimirum $\frac{1}{4}$℞ + 50. Primus igitur 40. accipiens 40 à secundo, habebit 80. qui numerus quadruplus est numeri 20 qui secundo remanet. Secundus autem 60. accipiens 30. à primo habebit 90 qui numerus noncuplus est numeri 10. qui primo relinquitur, postquam 30. dederit secundo.

Si inueniendi sint duo numeri, vt primus accipiens 10. à secundo habeat numerum quintuplum reliqui secundi, at secundus accipiens 5. à primo, habeat numerum duplum reliqui primi; inuenies duos numeros 15. & 15. Nam posito primo 1℞ si accipiat 10. à secundo, habebit 1℞ + 10. qui numerus quintuplus est numeri $\frac{1}{5}$℞ + 2 atque hic secundo superest, postquam primo dederit 10. ergo prius habuit $\frac{1}{5}$℞ + 12. Si igitur accipiat 5. a primo, habebit $\frac{1}{5}$℞ + 17. qui numerus duplus esse debet numeri 1℞ − 5 qui primo superest, postquam dederit 5. secundo. hoc est, æqualitas erit inter $\frac{1}{5}$℞ + 17. & 2℞ − 10. Additisque 10. vtrobique, inter $\frac{1}{5}$℞ + 27. & 2℞. Et si auferatur $\frac{1}{5}$℞. vtrobique, inter 27. & $1\frac{4}{5}$℞. Diuisis igitur 27. per $1\frac{4}{5}$. hoc est, per $\frac{9}{5}$. fiet 1℞ 15. pro primo numero. Et quia secundus habebat $\frac{1}{5}$℞ + 12 erit quoque secundus numerus 15. Atque duo hi numeri 15. & 15. quæstioni satisfaciunt. Nam si primus accipiat 10. à secundo, habebit 25. qui numerus quintuplus est reliqui, qui secundo superest, nimirum numeri 5. Secundus vero accipiens 5. à primo, habebit 20. numerum videlicet duplum numeri 10. qui primo superest.

LVIII. 58 *Tres numeros inuenire, vt bini quique faciant tres numeros propositos, dummodo semissis summæ propositorum numerorum maior sit singulis propositis numeris.*

DEBEAT primus cum secundo efficere 20. secundus cum tertio 30. ac tertius cum primo 40. qui omnes simul faciunt numerum 90. cuius semissis 45. maior est quam 20. & quam 30. & quam 40. Quod si tertius numerus effectus deberet esse 50. vel maior, res non succederet; quia omnes tres efficerent 100. vel maiorem numerum, cuius semissis esset vel æqualis vni eorum, nimirum 50. vel minor. Vt si tertius esset 51. vel 60. essent omnes tres 101. vel 110. cuius semissis $50\frac{1}{2}$. vel 55. minor esset tertio 51. vel 60. Sed operatio ipsa probe te docebit an quæstio possibilis sit, nec ne. Ponatur ergo summa trium numerorum quæsitorum esse 1℞. Et quia primus ac secundus conficiunt 20. erit tertius 1℞ − 20. Item quia secundus ac tertius faciunt 30. erit primus 1℞ − 30. Denique quia tertius ac primus faciunt 40. erit secundus 1℞ − 40. Hi omnes tres simul conficiunt 3℞ − 90. quę summa æqualis debet esse summæ omnium, quę posita est 1℞. Est ergo æquatio inter 1℞. & 3℞ − 90. Addiusque 90. vtrinque, inter 1℞ + 90. & 3℞. Ablataque 1℞. vtrinque, inter 90. & 2℞. Diuisis igitur 90 per 2. fiet 1℞.

fiet 1℞.45.summa omnium trium quæsitorum numerorum. Et quoniam primus inuentus fuit 1℞—30.erit ipse primus 15. Secundus autem erit 5.nimirum 1℞—40. Ac tertius 25.videlicet 1℞—20. Itaque tres numeri ordine inuenti sunt 15.5.25.manifestumque est, primum ac secundum efficere 20.secundum ac tertium 30.tertium denique ac primum 40.

Aliter. Ponatur primus 1℞.eritq; propterea secundus 20—1℞ vt enm primo, nimirum cum 1℞.facere possit 20.qui secundus numerus habebitur, si primus 1℞.ex 20.dematur. Tertius autem erit 10+1℞.vt cum secundo, id est, cum 10—1℞.facere possit 30.habebiturque hic tertius, si secundus 20—1℞.dematur ex 30. Iam tertius 10+1℞.cum primo 1℞ facit 2℞+10. qui numerus æqualis debet esse 40. Demptis igitur 10. vtrinque, erit æquatio inter 2℞.& 30. Diuisisque 30.per 2.fiet 1℞.15.pro primo numero. Secundus ergo 20—1℞.erit 5. Et tertius 10+1℞ erit 25.vt prius.

59 *Quatuor numeros inuenire, ita vt terni quique efficiant quatuor numeros propositos; dummodo tertia pars summæ propositorum numerorum maior sit singulis propositis numeris.* LIX.

DEBEAT primus, secundus, ac tertius facere 20. Secundus, tertius, & quartus 22. Tertius, quartus, ac primus 24. Quartus denique, primus, & secundus 27.qui omnes quatuor faciunt 93.cuius numeri pars tertia 31. maior est quam 20. & quam 22.& quam 24.& quam 27. Quod si quartus deberet esse 40.res non succederet, quia omnes quatuor efficerent 106.cuius tertia pars $35\frac{1}{3}$.non maior est, quam 40.sed minor. Impossibilitatem porro quæstionis ipsamet operatio indicabit. Ponatur summa omniũ quatuor esse 1℞. Et quia primus secũdus & tertius faciunt 20.erit quartus 1℞—20. Eadem ratione erit primus 1℞—22. Et secundus 1℞—24. Ac tertius denique 1℞—27. Hi omnes quatuor faciunt 4℞—93.quæ summa æqualis debet esse summæ omnium quam posuimus 1℞. Est igitur æquatio inter 1℞.& 4℞—93. Additisque 93. vtrinque, inter 1℞+93.& 4℞ Ablataque 1℞ vtrinque, inter 93.& 3℞. Diuisis igitur 93.per 3.fiet 1.℞31. Et quoniam primus fuit inuentus 1℞—22.erit ipse primus 9. Eademque de causa secundus 7. Tertius 4.& quartus 11.qui quatuor numeri problema efficiunt.

Hoc ænigma alio modo soluemus in quinque numeris in ænigmate 127.

## SCHOLIVM.

*EADEM arte inuenientur quinque numeri, vt quaterni quique efficiant quinque numeros propositos; dummodo quarta pars summæ propositorum numerorũ singulis numeris propositis maior sit. Item sex numeri, si tamen quinta pars maior sit, &c. Et sic deinceps quotcunque numeri, si modo pars summæ determinata à numero propositorum numerorum, vno minus, maior sit singulis numeris propositis.*

60 *Tres numeros inuenire, vt bini quique simul sumpti excedant reliquum dato numero.* LX.

STATVATVR primum & secundum superare tertium 20. vnitatibus: Excessum secundi ac tertij simul supra primum esse 30.vnitatum: Et denique excessum inter tertium ac primum simul, & secundum esse 40.vnitatum. Ponantur omnes tres esse 1℞. Et quoniam primus & secundus superant tertium 20. vnitatibus; addito communi tertio, [a] superabunt quoque primus, secundus & tertius simul, tertium duplicatum eisdem 20.vnitatibus; ideoque omnes tres æquales erunt tertio duplicato, vna cum 20. quia numerus compositus ex tertio duplicato, & 20.superat quoque tertium duplicatum 20.vnitatibus. Si igitur à summa omnium trium, quam posuimus 1℞.auferamus 20.remanebit tertius duplicatus 1℞—20.atque idcirco tertius simplex erit $\frac{1}{2}$℞—10. Eadem ratione primus erit $\frac{1}{2}$℞—15.& secundus $\frac{1}{2}$℞—20. Summa ergo omnium trium $\frac{3}{2}$℞—45.æqualis erit summæ omnium trium numerorum quæsitorum, quam posuimus esse 1℞; ita vt æquatio sit inter 1℞.& $\frac{3}{2}$℞—45. Additisque 45.vtrinque, inter 1℞+45.& $\frac{3}{2}$℞. Ablataque 1℞.vtrinque, inter 45.& $\frac{1}{2}$℞ Diuisis igitur 45.per $\frac{1}{2}$.fiet 1℞90. Cum ergo primus inuentus sit $\frac{1}{2}$℞—15. erit ipse primus 30. Eandemq; ob causam erit secundus 25.& tertius 35.qui tres numeri problema conficiunt.

[a] 16. pronũ. primi

Aliter. Ponatur tertius 1℞. Et quoniam primus ac secundus superant tertium 20.vnitatibus; erunt primus & secundus simul 1℞+20.cum hic numerus excedat quoque 1℞ 20.vnitatibus. Ponatur deinde secundus 25.semissis videlicet summæ 50.ex 20.& 30.collectæ. Cum ergo primus & secundus simul inuenti sint esse 1℞+20.si dematur secundus 25.relinquetur primus 1℞—5. Quia vero tertius cum primo superare debet secundum 40.vnitatibus: Faciunt autem tertius 1℞.& primus 1℞—5.numerum 2℞—5. qui æqualis erit numero 65.cum hic secundum 25.superet 40.vnitatibus: atque ita æquatio erit inter 2.℞—5 & 65. Additisq; 5. vtrinque, inter 2℞.& 70. Diuisis igitur 70.per 2.fiet 1℞.35.tertius numerus. Primus erit 30.nimirum 1℞—5. Et secundus 25. vt supra.

Aliter. Ponatur primus & secundus simul 1℞, eritque propterea tertius 1℞—20.vt nimirum primus & secundus simul, id est, 1℞.superet tertium 20.vnitatibus: qui tertius habebitur, si ex primo & secundo 1℞. demantur 20. Ergo omnes tres erunt 2℞—20. Et quia secundus ac tertius superare debent primum numero 30.addito communi primo, superabunt omnes tres primum duplicatum eodem numero 30. Demptis igitur 30.ex omnibus tribus, id est, ex 2℞—20. remanebit primus duplicatus 2℞—50. ideoque simplex primus 1℞—25. Primus ergo 1℞—25.& tertius 1℞—20.faciunt summam 2℞—45 quæ ex omnibus tribus, id est, ex 2℞—20.subtracta relinquet secundum 25. Et quoniam primus ac tertius faciunt, vt dictum est proxime, summam 2℞—45.quæ debent secundum 25. superare numero 40. Si secundus 25. subtrahatur à prædicta summa, relinquetur numerus 2℞—70.æqualis dicto excessui 40. Additis igitur 70.vtrinque, erit æquatio inter 2℞.& 110. Diuisisq; 110.per 2.fiet 1℞.55. Primus ergo numerus 1℞—25 erit 30. Secundus vero est 25.& tertius 1℞—20.erit 35.vt prius.

SCHO-

## SCHOLIVM.

*SI primus ac secundus tertium superare debent 3. vnitatibus: secundus vero ac tertius primum 20. vnitatibus: Denique primus ac tertius secundum 1. vnitate, reperietur tertius numerus 10$\frac{1}{2}$. secundus 11$\frac{1}{2}$. & primus 2.*

LXI. 61 *Quatuor numeros inuenire, vt terni quique simul sumpti excedant reliquum dato numero: dummodo semissis summa ex quatuor numeris postulatis collecta maior sit singulis numeris datis.*

POSTVLETVR, vt primus, secundus, ac tertius simul excedant quartum 20. vnitatibus: Et secundus, tertius, ac quartus primum 30. vnitatibus: Et tertius, quartus, ac primus secundum 40. vnitatibus: Ac denique quartus, primus ac secundus tertium 50. vnitatibus. Vbi vides, quatuor numeros datos facere 140. cuius numeri semissis 70. maior est singulis datis. Nam si conditio hæc non adsit, erit quæstio impossibilis. Vt si vltimus excessus detur 90. facient omnes excessus numerum 180. cuius semissis 90. maior non est dato excessu 90. quæstio erit inexplicabilis. Ponantur ergo omnes quatuor numeri 1℞. Et quoniam primus, secundus, ac tertius excedunt quartum 20. vnitatibus; addito communi quarto, [a] superabunt quoque primus, secundus, tertius ac quartus quartum duplicatum ijsdem 20. vnitatibus: ideoque omnes quatuor æquales erunt quarto duplicato, vna cum 20. quia numerus compositus ex quarto duplicato, & 20. superat quoque quartum duplicatum 20. vnitatibus. Si igitur à summa omnium quatuor, quam posuimus 1℞. auferantur 20. remanebit quartus duplicatus 1℞ − 20. atq; adeo quartus simplex erit $\frac{1}{2}$.℞ − 10. Eadē ratione erit primus $\frac{1}{2}$℞ − 15. Et secundus $\frac{1}{2}$ − 20. Et tertius $\frac{1}{2}$℞ − 25. Summa ergo omnium quatuor 2℞ − 70. æqualis erit priori summæ omnium quatuor, quam posuimus 1℞. ita vt æquatio sit inter 1℞. & 2℞ − 70. Additisque 70. vtrinque, inter 1℞ + 70. & 2℞. Ablataq; 1℞. vtrinque, inter 70. & 1℞. Erit igitur 1℞ 70. Cum ergo primus inuentus sit $\frac{1}{2}$℞ − 15. erit ipse primus 20. Eandemque ob causam secundus erit 15. Tertius 10. & quartus 25. qui omnes quæstionem expediunt.

[a] 16. pronūc. primi

Aliter. Ponatur quartus 1℞. Et quoniam primus, secundus, ac tertius excedunt quartum 20. vnitatibus: Erunt illi tres simul 1℞ + 20. cum hic numerus superet 1℞. similiter 20. vnitatibus. Rursus quia secundus, tertius, & quartus excedunt primū 30 vnitatibus; ponatur summa secūdi ac tertij 25. semissis videlicet primorū duorum excessuum 20. & 30. simul. Quia igitur primus, secundus, ac tertius faciunt, vt diximus, 1℞ + 20. si auferatur secundus, ac tertius simul, nimirum 25 reliquus erit primus 1℞ − 5. exceditque summa 1℞ + 25. ex secundo, tertio, & quarto collecta, primum 1℞ − 5. numero 30. vt patet, si primus 1℞ − 5. auferatur ex 1℞ + 25 summa secundi, tertij, & quarti. Rursus, quia primus inuentus est 1℞ − 5. Secundus vero ac tertius faciunt 25. quartus denique positus est 1℞. erunt omnes quatuor 2℞ + 20. Cum ergo tertius, quartus, ac primus excedant secundum numero 40. Addito communi secundo, [b] excedent omnes quatuor secundum duplicatum eodem numero 40. Ablatis igitur 40. ex summa 2℞ + 20. omnium quatuor, relinquetur secundus duplicatus 2℞ − 20. ipseque secundus semel sumptus erit 1℞ − 10. qui subtractus ex 25 summa secundi ac tertij, reliquum faciet tertium 35 − 1℞. Quoniam vero quartus, primus, & secūdus faciunt 3℞ − 15. debentq; superare tertium numero 50. superant autem tertium 35 — 1℞. numero 4℞ — 50. vt constat, si tertius 35 — 1℞. detrahatur ex prædicta summa 3℞ — 15. Est ergo æquatio inter 4℞ — 50. & 50. Additisque 50. vtrinq;, inter 4℞. & 100. Diuisis ergo 100. per 4. fiet 1℞ 25 Primus ergo 1℞ — 5. erit 20. Secundus 1℞ — 10. erit 15. Tertius 35 — 1℞. erit 10. Et quartus 1℞. erit 25. quemadmodum prius.

[b] 16. pronūc primi

Aliter. Ponatur summa omnium 1℞. Et quia priores tres excedere debent quartum numero 20. diuidenda erit 1℞. in duas partes, quarum maior minorem superet numero 20. Maior enim pars erit summa priorum trium, & minor pars erit quartus numerus. Diuisio autem hæc ita fiet, vt in scholio ænigmatis 1. tradidimus. Demat ur numerus 20. ex 1℞. vt reliquus sit numerus 1℞ — 20 Huius enim semissis $\frac{1}{2}$℞ — 10. erit minor pars. Et si ad hanc addatur idem numerus 20. fiet maior pars $\frac{1}{2}$℞ + 10. Erit ergo quartus numerus $\frac{1}{2}$.℞ — 10. & priores quatuor $\frac{1}{2}$℞ + 10. pari ratione, quia secundus, tertius, & quartus debent excedere primum numero 30. demantur 30. ex 1℞. Reliqui enim numeri 1℞ — 30. semissis $\frac{1}{2}$℞ — 15. erit primus numerus. Item quia tertius, quartus, & primus superare debent secundum numero 40. si demantur 40. ex 1℞. erit reliqui numeri 1℞ — 40. semissis $\frac{1}{2}$℞ — 20. secundus numerus. Denique quia quartus, primus & secundus superare debent tertium numero 50. si tollantur 50. ex 1℞. erit reliqui numeri 1℞ — 50. semissis $\frac{1}{2}$℞ — 25. tertius numerus. Omnes 4. inuenti $\frac{1}{2}$℞ — 15. $\frac{1}{2}$℞ — 20. $\frac{1}{2}$℞ — 25. & $\frac{1}{2}$℞ — 10. faciunt summam 2℞ — 70. quæ æqualis esse debet summæ omnium, quam posuimus 1℞. Est ergo æquatio inter 1℞. & 2℞ — 70. Additisq; 70. vtrinque, inter 1℞ + 70. & 2℞. Ablataque 1.℞. vtrinque, inter 70. & 1℞. eritq; 1℞ 70. & $\frac{1}{2}$℞ 35. Primus ergo $\frac{1}{2}$℞ — 15. erit 20. Secundus $\frac{1}{2}$℞ — 20. erit 15. Tertius $\frac{1}{2}$℞ — 25. erit 10. Et quartus $\frac{1}{2}$℞ — 10. erit 25. veluti prius.

## SCHOLIVM.

*EODEM modo reperientur quinque numeri, vt quaterni quique superent reliquum dato numero; dummodo tertia pars summæ ex quinque postulatis excessibus maior sit singulis numeris. Pari ratione inuenientur sex, si tamen quarta pars maior sit, &c. Atque ita deinceps quotcunque numeri, si modo pars summa denominata à numero datorum excessuum, minus duobus, maior sit singulis excessibus datis.*

LXII. 62 *Tres numeros inuenire, quorum maximus medium superet data parte minimi: Medius quoque minimum superet data parte maximi: Minimus denique datam medij partem excedat numero dato.*

SVPERET maximus medium tertia parte minimi: Medius minimum tertia parte maximi: Minimus denique tertiam item partem medij excedat 10. vnitatibus. Ponatur minimus 1℞ + 10. & medius 3℞ Ita enim

minimus

minimus tertiam medij partem superabit numero 10. Et quoniam medius minimum superare debet tertia parte maximi. Superat autem medius 3℞. minimum 1℞+10 numero 2℞−10. vt patet, si subtractio fiat 1℞+10. ex 3℞. Igitur tertia pars maximi erit 2℞−10. atq; idcirco maximus erit 6℞−30. Rursus quoniam maximus medium superare debet tertia parte minimi: Superat aũt maximus 6℞−30. medium 3℞. numero 3℞−30 qui æqualis erit tertiæ parti minimi: ideoq; minimus erit 9℞−90. Fuit aũt min.m⁹ positus 1℞+10. Est ergo æquatio inter 9℞−90 & 1℞+10. Additisq; 90. vtrinq; inter 9℞ & 1℞+100. Ablataq; 1℞. vtrinq; inter 8℞ & 100. Diuisis ergo 100. per 8. fiet 1℞. 12$\frac{1}{2}$. Igitur minim⁹ 1℞+10. erit 22$\frac{1}{2}$. Medius 3℞. erit 37$\frac{1}{2}$. Maximus denique 6℞—30. erit 45. Nam maximus 45. superat medium 37$\frac{1}{2}$. numero 7$\frac{1}{2}$. qui tertia pars est minimi 22$\frac{1}{2}$. Medius vero 37$\frac{1}{2}$. superat minimum 22$\frac{1}{2}$. numero 15 qui tertia pars est maximi 45. Minimus deniq; 22$\frac{1}{2}$. superat 12$\frac{1}{2}$. tertiam partem medij 37$\frac{1}{2}$. numero 10. vt propositum est.

QVOD si maximus medium superare debeat semisse minimi: medius minimum quarta parte maximi: Et minimus tertiam partem medij numero 8. Ponatur minimus 1℞+8. Et medius 3℞. vt ille tertiam huius partem excedat octonario. Et quia medius minimum superare ponitur quarta parte maximi: Superat autem medius 3℞ minimum 1℞+8. numero 2℞—8. Igitur quarta pars maximi erit 2℞—8. ac proinde maximus erit 8℞—32. Rursus quia maximus medium superare debet semisse minimi; Superat autem maximus 8℞—32. medium 3℞. numero 5℞—32. qui æqualis erit semissi minimi; propterea que minimus erit 10℞—64. Fuit autem idem positus 1℞+8. Est ergo æquatio inter 10℞—64. & 1℞+8. Additisque 64. vtrinque, inter 10℞. & 1℞+72. Ablataque 1℞. vtrinque, inter 9℞. & 72. Diuisis ergo 72. per 9. fiet 1℞. 8. Ac proinde minimus 1℞+8. erit 16. Medius vero 3℞ erit 24. Maximus denique 8℞—32. erit 32.

SI quis proponeret, maximum debere superare medium semisse minimi: Medium quoque minimum semisse maximi: Minimum denique semissem medij binario; quæstio esset impossibilis, vt ipsa operatio per Algebram abunde docebit. Ponatur enim minimus 1℞+2. Et quia debet superare semissem medij binario, erit medius 2℞. Quia vero minimum medius superare debet semisse maximi. Superat autem medius 2℞. minimum numero 1℞−2. qui semissis debet esse maximi. Maximus ergo erit 2℞−4. quod est absurdum, cum medius inuentus sit 2℞. maior quam 2℞−4.

63 *Tres numeros inuenire, ita vt si quisque proxime sequenti det datam sui partem, inter eos, qui dederunt, & acceperunt, reperiatur æqualitas.* LXIII.

DET primus secundo tertiam sui partem: Secundus tertio quartam sui partem: Et tertius primo quintam sui partem: Et cum sibi mutuo dictas partes dederint, & ab alijs acceperint, fiant tres numeri æquales. Ponatur primus 3℞. vt tertiam partem habeat sine fractione. Secundus autem, 4. vnitatum, vt quartam partem sine fractione habeat. Si ergo hic secundus 4. accipiat $\frac{1}{3}$ primi 3℞. nimirum 1℞. atque det $\frac{1}{4}$. nimirum 1. tertio, habebit ipse secundus 3+1℞. Ac

$$\begin{array}{rcl} 2℞ & + & 0 \\ -\ 1℞ & + & 3 \\ \hline +\ 1℞ & + & 3 \end{array}$$

tantundem habere debet primus, vbi dederit, acceperitque, quæ iubentur. At primus 3℞. si tertiam partem dederit 1℞. & acceperit 3−1℞. tum demum habebit 1℞+3. vel 3+1℞ vt patet, si addantur 3−1℞. ad 2℞. quod hæc formula docet. Inuenies autem 3−1℞. si reliquum primi, nimirum 2℞. dempseris ex 3+1℞ Ergo 3−1℞. erit quinta pars tertij: quandoquidem eam dans reliquo primi, nimirum 2℞. facit 3+1℞. Igitur tertius erit 15—5℞. qui si dederit primo quintam sui partem, hoc est, 3−1℞ remanebunt illi 12−4℞. Et si à secundo 4. acceperit quartam partem, nimirum 1. habebit 13−4℞. qui numerus æqualis esse debet 3+1℞. quantum scilicet tam primus, quam secundus habet, vt dictum est. Est ergo æquatio inter 13−4℞. & 3+1℞. Additisque 4℞. vtrinque, inter 13. & 3+5℞. Ablatisque 3. vtrinque, inter 10 & 5℞. Diuisisque 10. per 5. fiet 1℞ 2. Ac propterea primus numerus 3℞. erit 6. Secundus 4. vt posuimus, & tertius 15−5℞. erit 5. Si namque primus 6. dederit tertiam sui partem 2. acceperitque quintam partem tertij, videlicet 1 habebit 5. Ac tantundem habebit secundus 4. si dederit quartam sui partem 1. tertio, acceperitque tertiam partem primi. Item tantum quoque habebit tertius 5. si dederit primo quintam partem, id est, 1. acceperitque à secundo 4. quartam partem, videlicet 1. quod est propositum.

QVOD si primus secundo debeat dare $\frac{1}{2}$. Secundus tertio $\frac{1}{4}$. & tertius primo $\frac{1}{3}$. Ponatur primus 2℞. vt habeat $\frac{1}{2}$. sine fractione; Secundus autem 4. vt habeat $\frac{1}{4}$. sine fractione. Secundus igitur postquam dederit $\frac{1}{4}$. tertio, sumpseritque $\frac{1}{2}$. à primo, habebit 1℞+3. Ac tantundem habere debet primus, postquam dederit $\frac{1}{2}$. secundo, acceperitque $\frac{1}{3}$ à tertio. At primus postquam dederit $\frac{1}{2}$. secundo, habebit 1.℞. reliquam, quæ cum 3. facit 1.℞+3. Est ergo 3. tertia pars tertij, ideoque tertius erit 9. Reliquum est, vt tertius 9. postquam dederit $\frac{1}{3}$. primo, sumpseritque $\frac{1}{4}$. à secundo, habeat quoque 1℞+3. Habebit autem, si imperata fecerit, 7. Ergo æqualitas est inter 7. & 1℞+3. Ablatisque 3. vtrinque, inter 4 & 1℞. Igitur 1℞ erit 4. ideoque primus, quem posuimus 2℞ erit 8. Secũdus 4. & tertius 9. Nam primus 8. si det $\frac{1}{2}$ accipiatque $\frac{1}{3}$. tertij, habebit 7. quemadmodum secundus, si det $\frac{1}{4}$. & accipiat $\frac{1}{2}$. primi. Necnon tertius, si det $\frac{1}{3}$. sumatque $\frac{1}{4}$. secundi. Omnesque tres numeri faciunt 21. triplum videlicet numeri 7. quem quisque facit. quemadmodum etiam in primo exemplo omnes tres numeri 6.4.5. faciunt 15. triplum scilicet numeri 5. quem quisque facit. In secundo porro exemplo huius ænigmatis vides, non esse necessarium, vt partes datæ habeant denominatores, qui semper crescant ordine, vt in primo exemplo contigit.

64. *Quatuor numeros inuenire ea lege, vt cum quiuis eorum proxime insequenti datam sui partem dederit, inter eos qui dederunt, & acceperunt, reperiatur æqualitas.* LXIIII.

DET primus secundo tertiam sui partem: Secundus tertio quartam: Tertius quarto quintam Et quartus primo sextam. Ac tandem, postquam dederint, acceperintq; dictas partes, fiant 4. numeri æquales. Ponatur

primus 3℞. vt tertiam partem ſine fractione habeat. Secundus autem 4. vnitatum, vt quartam partem habeat ſine fractione. Si ergo hic ſecundus accipiat $\frac{1}{3}$. primi 3℞. nimirum 1℞. atque det $\frac{1}{4}$. videlicet 1. tertio, habebit ipſe 1℞ + 3. Ac tantundem oportet habere primum, poſtquam ſecundo dederit $\frac{1}{3}$. nimirum 1℞. acceperitq; à quarto partem ſextam. Sed ſi det $\frac{1}{3}$. videlicet 1℞. ſuperſunt illi 2℞. quæ cum 3 — 1℞. conſtituunt 1℞ + 3. vt ex hac formula colligitur. Inuenies autem 3 — 1℞. ſi 2℞. tolles ex 1℞ + 3. Ergo ſexta pars quarti erit 3 — 1℞. Et ipſe quartus erit 18 — 6℞. Hic quartus ſi det $\frac{1}{6}$. remanebunt illi 15 — 5℞. & ſi accipiat $\frac{1}{5}$. tertij, debet habere 1℞ + 3. ſicut tam primus, quam ſecundus. Sed ſi addantur 6℞ — 12. ad 15 — 5℞. fit 1℞ + 3. vt in hac formula apparet, Inuenies autem 6℞ — 12. ſi 15 — 5℞ demantur ex 1℞ + 3. Igitur $\frac{1}{5}$. tertij erit 6℞ — 12. ipſeque tertius erit 30℞ — 60. Reliquum eſt iam, tertium hunc habere quoque 1℞ + 3. poſtquam quarto dederit $\frac{1}{5}$. videlicet 6℞ — 12. acceperitque $\frac{1}{4}$. ſecundi 4. At ſi det $\frac{1}{5}$. ſuperſunt illi 24℞ — 48. Et ſi acceperit $\frac{1}{4}$. à ſecundo, nimirum 1. habebit 24℞ — 47. qui numerus æqualis debet eſſe 1℞ + 3. Additis igitur 47. vtrinque, erit æqualitas inter 24℞ & 1℞ + 50. Ablataque 1℞. vtrinque, inter 23℞. & 50 Diuiſis ergo 50. per 23. fiet 1℞ $\frac{50}{23}$. Quocirca primus numerus 3℞ erit $\frac{150}{23}$. Et ſecundus 4. ſiue $\frac{92}{23}$. Ac tertius 30℞ — 60. erit $\frac{120}{23}$. Quartus denique 18 — 6℞ erit $\frac{114}{23}$. qui ænigma conficiunt. Et ſi abſtuleris denominatores, erunt quatuor numeri quæſiti integri 150 92. 120. 114. propterea quod numeratores eandem proportionem habent, quam ipſæ minutiæ, propter eundem denominatorem, vt ad finem lib. 9. Eucl. demonſtrauimus. [a] Et partes in quæſtione expreſſæ ita ſe habent ad numeros integros, vt ad dictas minutias. quia ita ſe habet V. g. $\frac{1}{3}$. numeri 12. ad 12. vt $\frac{1}{3}$. numeri 90. ad 90 &c. Itaq; ſi primus 150. det $\frac{1}{3}$. nimirum 50. ſupererunt 100. & ſi accipiat $\frac{1}{6}$. quarti 114. nimirum 19. habebit 119. Item ſi ſecundus 92. det $\frac{1}{4}$. ſui numeri nimirum 23. remanebunt 69. & ſi accipiat $\frac{1}{3}$. primi 150 nimirum 50. habebit ſimiliter 119. Sic quoque ſi tertius 120. det $\frac{1}{5}$. ſui numeri, hoc eſt, 24. remanebunt 96. & ſi accipiat $\frac{1}{4}$. ſecundi 92. nimirum 23. habebit 119. Denique eodem modo, ſi quartus 114. det $\frac{1}{6}$. ſui numeri, videlicet 19. ſupererunt 95. & ſi accipiat $\frac{1}{5}$. tertij 120. nimirum 24. habebit 119.

$$\begin{array}{rr} 2℞ & +\ 0 \\ -\ 1℞ & +\ 3 \\ \hline +\ 1℞ & +\ 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 15 & -\ 5℞ \\ -\ 12 & +\ 6℞ \\ \hline +\ 3 & +\ 1℞ \end{array}$$

[a] 15. quinti

HIC etiam omnes 4 numeri inuenti 150. 92. 120. 114. efficiunt 476. quadruplum videlicet numeri 119. quem vnuſquiſque facit.

## SCHOLIVM.

*EODEM modo inuenientur 5. numeri, vel plures, ita vt, poſtquam vnuſquiſque ſequenti partem datam dederit, tandem fiant 5. numeri æquales, vel plures. Omnesque ſimul facient ſemper ſummam, quæ toties numerum, quem ſinguli faciunt, continebit, quot ſunt ipſi numeri.*

*Sint enim inueniendi 5. numeri, vt cum primus dederit $\frac{1}{3}$. ſecundo, acceperitque $\frac{1}{5}$. à quinto: Secundus vero dederit $\frac{1}{2}$. tertio, acceperitque $\frac{1}{3}$. à primo: Item tertius dederit $\frac{1}{7}$. quarto, acceperitque $\frac{1}{2}$. à ſecundo: Quartus autem dederit $\frac{1}{6}$. quinto acceperitque $\frac{1}{7}$. a tertio. Quintus denique dederit $\frac{1}{5}$. primo, acceperitque $\frac{1}{6}$. a quarto; fiant tandem 5. numeri æquales. Ponatur primus 3℞. vt habeat $\frac{1}{3}$. ſine fractione Secundus vero 2. vt habeat $\frac{1}{2}$. ſine fractione. Si ergo ſecundus det $\frac{1}{2}$. tertio, id eſt, 1. remanebit illi 1 Et ſi accipiat $\frac{1}{3}$. a primo, nimirum 1℞. habebit 1℞ + 1. quem numerum vnuſquiſque tandem habere debet. Primo autem ſi det $\frac{1}{3}$. ſecundo, ſupererunt 2℞. quæ cum $\frac{1}{5}$ quinti facere debent 1℞ + 1. At 2℞. cum 1 — 1℞. faciunt 1℞ + 1. vt conſtat, ſi 2℞. detrahantur ex 1℞ + 1. Igitur quinta pars quinti erit 1 — 1℞ & totus quintus 5 — 5℞. Huic quinto, ſi det $\frac{1}{5}$. remanebunt 4 — 4℞. quæ cum $\frac{1}{6}$ quarti facere debent 1℞ + 1. Faciunt autem 4 — 4℞ cum 5℞ — 3. numerum 1℞ + 1. vt patet, ſi 4 — 4℞. detrahantur ex 1℞ + 1. Igitur $\frac{1}{6}$. quarti numeri erit 5℞ — 3. totusque quartus erit 30℞ — 18. Huic quarto ſi det $\frac{1}{6}$. quinto, ſupererunt 25℞ — 15. quæ cum $\frac{1}{7}$. tertij facere debent 1℞ + 1. Faciunt autem 25℞ — 15. cum 16 — 24℞. numerum 1℞ + 1. vt patet, ſi 25℞ — 15. demantur ex 1℞ + 1. Igitur 16 — 24℞. erunt $\frac{1}{7}$ tertij numeri, totusque tertius erit 112 — 168℞. Huic tertio, ſi det $\frac{1}{7}$. quarto, remanent 96 — 144℞. quæ cum $\frac{1}{2}$. ſecundi, id eſt, cum 1. facit 97 — 144℞. quæ æqualia debent eſſe 1℞ + 1. Additis 144℞. vtrinque, erit æquatio inter 97. & 145℞ + 1. Ablataque 1. vtrinque, inter 96. & 145℞. Diuiſis igitur 96. per 145. fiet 1℞. $\frac{96}{145}$. Ergo primus numerus poſitus 3℞. erit $\frac{288}{145}$. Secundus autem poſitus 2. erit $\frac{290}{145}$. Tertius deinde inuentus 112 — 168℞. erit $\frac{112}{145}$. Quartus deinde qui inuentus fuit 30℞ — 18. erit $\frac{270}{145}$. Quintus denique inuentus 5 — 5℞. erit $\frac{245}{145}$. Et deletis denominatoribus, erunt quinque numeri inuenti integri. 288. 290. 112. 270. 245. qui problemati ſatisfaciunt. Nam ſi datas partes dent, & recipiant, vnuſquiſque habebit 241. qui numerus quintuplicatus facit 1205. ſummam omnium quinq; numerorum inuentorum.*

LXV. 65 *Datum numerum in duas partes diuidere, ita vt poſterior pars cum data parte aliquota prioris faciat datum quemlibet numerum.*

SIT numerus 60. diſtribuendus in duos, ita vt poſterior cum $\frac{1}{5}$ prioris efficiat 28. Ponatur prior pars 5℞. vt dare poſſit $\frac{1}{5}$. ſine fractione: eritque poſterior pars 60 — 5℞. quæ ſi acceperit $\frac{1}{5}$ prioris, nimirum 1℞. habebit 60 — 4℞ qui numerus æqualis debet eſſe dato numero 28. Additis igitur 4℞. vtrinque, erit æquatio inter 60 & 4℞ + 28. Ablatiſque 28. vtrinque, inter 32. & 4℞. Diuiſis ergo 32. per 4. fiet 1℞. 8. Ac propterea prior pars 5℞. erit 40. poſterior vero 20. quæ ſi acceperit $\frac{1}{5}$. prioris, nimirum 8. habebit 28.

## SCHOLIVM.

*Hoc idē ſine Algebra efficietur hoc modo. Dēpto numero dato, q. effici debet, à num. dato, q. diſtribuend^9 eſt, diuidatur reliquus num. p denomi-*

*denominatorem partis datæ, minus vno. Quotiens namque per denominatorem partis multiplicatus, exhibebit priorem numerum, &c. Vt in dato exemplo, si datus numerus 28. demantur ex diuidendo numero 60. & reliquus numerus 32. diuidatur per 4. (numerum videlicet vnitate minorem denominatore quintæ partis) fiet Quotiens 8. quo ducto in 5. denominatorem partis quintæ, producetur prior numerus 40. Posterior ergo erit 20.*

*Si idem numerus 60. secandus sit in duos, ita vt posterior cum $\frac{1}{5}$. prioris efficiat 59. Dempto numero 59. ex 60. & reliquo numero 1. diuiso per 4 fit Quotiens $\frac{1}{4}$. qui ductus in 5. faciet $\frac{5}{4}$. priorem numerum. Posterior ergo erit $58\frac{3}{4}$. Nam si huic addatur $\frac{1}{5}$. prioris, nimirum $\frac{1}{4}$. conflabitur datus numerus 59.*

66 *Duos numeros inuenire, quorum summa æqualis sit dato numero, & posterior cum data parte prioris efficiat datum quoque alium numerum.* LXVI.

HOC ænigma cum præcedenti coincidit. Nam si summa data secetur in duas partes, vt ibi imperatur, inuenti erunt duo numeri quæsiti. Vt si inueniendi sint duo numeri, quorum summa 60 & posterior numerus cum $\frac{1}{5}$. prioris faciat 28. diuidendus erit numerus 60. vt dictum est, eruntque quæsiti numeri 40. & 20.

Si vero inueniendi sint duo numeri, quorum summa 60. & posterior cum $\frac{1}{5}$. prioris faciat 59. erit prior numerus $1\frac{1}{4}$. posterior autem $58\frac{3}{4}$. vt in scholio præcedenti patuit.

67 *Tres numeros inuenire, ita vt, cum vnusquisque à summa reliquorum duorum datam partem acceperit, fiant tres numeri æquales.* LXVII.

FAC, vt si primus sumat à summa reliquorum duorum $\frac{1}{3}$. Secundus à summa reliquorum duorum $\frac{1}{4}$. Et tertius à summa duorum reliquorũ $\frac{1}{5}$. fiant tres numeri æquales. Ponatur primus 1℞. summa vero reliquorum duorum ponatur numerus 3. vt habeat $\frac{1}{3}$. sine fractione. Si igitur primus à duobus reliqnis accipiat $\frac{1}{3}$. habebit 1℞+1. Et quia secundus à summa reliquorum duorum accipiens $\frac{1}{4}$. debet etiam facere 1℞+1. diuidenda erit summa omnium trium, nimirum 1℞+3. in duas partes, quarum posterior cum $\frac{1}{4}$. prioris faciat 1℞+1 Posterior enim pars erit secundus numerus, & pars prior summa primi ac tertij. Diuisio autem hæc fiet, vt in scholio ænigmatis 65 docui, hoc modo. Dempto numero 1℞+1. qui effici debet, ex summa 1℞+3. omniũ trium, diuidatur reliquus numerus 2. per denominatorem partis quartæ, vno minus, nimirum per 3. & quotiens $\frac{2}{3}$. per denominatorem 4. multiplicetur. Procreatus enim numerus $\frac{8}{3}$. erit prior pars, quæ ablata ex summa 1℞+3. omnium trium, relinquet partem posteriorẽ 1℞+$\frac{1}{3}$. pro secundo numero. Huic enim si addatur $\frac{1}{4}$. prioris partis $\frac{8}{3}$. (quæ est summa primi ac tertij) nimirum $\frac{2}{3}$. fiet numerus 1℞+1.

Rursus quia tertius sumens $\frac{1}{5}$. à summa primi & secundi debet etiam facere 1℞+1. diuidenda erit summa 1℞+3. omnium trium eodem modo in duas partes, quarum posterior cum $\frac{1}{5}$. prioris faciat 1℞+1. quod ita fiet. Dempto numero 1℞+1. qui effici debet, ex summa 1℞+3. omnium trium, diuidatur reliquus numerus 2. per denominatorem partis quintæ, vno minus, hoc est, per 4. Et quotiens $\frac{2}{4}$. vel $\frac{1}{2}$. in denominatorem 5 ducatur. Productus enim numerus $\frac{5}{2}$. erit prior pars, summa videlicet primi ac secundi. quæ pars ablata ex summa 1℞+3. omnium trium, reliquam faciet partem posteriorem 1℞+$\frac{1}{2}$. Hæc enim accipiens $\frac{1}{5}$. summæ primi ac secundi, quæ fuit $\frac{5}{2}$. hoc est, $\frac{1}{2}$. faciet quoque 1℞+1. Reliquum iam est, vt omnes tres numeri inuenti 1℞. 1℞+$\frac{1}{3}$. 1℞+$\frac{1}{2}$. conficiant summam 1℞+3. omnium trium. Faciunt autem 3℞+$\frac{5}{6}$. Est ergo æquatio inter 1℞+3. & 3℞+$\frac{5}{6}$. Et ablata 1℞ vtrinque, inter 3. & 2℞+$\frac{5}{6}$. Ablatisque $\frac{5}{6}$. vtrinque, inter $2\frac{1}{6}$ & 2℞. Diuisis igitur $2\frac{1}{6}$ per 2. fiet 1℞ $\frac{13}{12}$. pro primo numero quæsito qui positus fuit 1℞. Secundus, qui inuentus fuit 1℞+$\frac{1}{3}$. erit $\frac{34}{24}$. siue $\frac{17}{12}$. Tertius denique, quem inuenimus esse 1℞+$\frac{1}{2}$. erit $\frac{38}{24}$. hoc est, $\frac{19}{12}$. Et si neglexeris denominatores, erunt tres numeri quæsiti integri 13. 17. 19 problema propositum absoluentes. Nam & primus 13. cum $\frac{1}{3}$. secundi & tertij, id est, cum 12 & secundus 17. cum $\frac{1}{4}$ primi & tertij, hoc est, cum 8. & tertius 19 cum $\frac{1}{5}$. primi & secundi, nimirum cum 6. facit 25.

Hic autem summa trium numerorum inuentorum 49. non est tripla numeri 25. quem vnusquisque facit: quemadmodum in ænigmate 63. fiebat.

68 *Quatuor numeros inuenire ea conditione, vt cum vnusquisque à summa reliquorum trium datam partem acceperit, fiant quatuor numeri æquales.* LXVIII.

STATVAMVS, vt si primus sumat $\frac{1}{3}$. summæ aliorum trium: Secundus $\frac{1}{4}$. summæ aliorum trium: Tertius $\frac{1}{5}$. summæ trium reliquorum. Quartus denique $\frac{1}{6}$. summæ aliorum trium; quatuor numeri fiant æquales. Ponatur primus 1℞. & summa aliorum trium numerus 3 habens $\frac{1}{3}$. sine fractione. Primus igitur sumens $\frac{1}{3}$. huius summæ, videlicet 1. faciet 1℞+1. Et quia secundus cum $\frac{1}{4}$. summæ reliquorum trium debet etiam facere 1℞+1. diuidenda erit summa 1℞+3 omnium quatuor in duas partes, quarum posterior cum $\frac{1}{4}$. prioris faciat 1℞+1. sicut in præcedenti problemate. Posterior enim pars erit secundus numerus, & prior summa primi, tertij, & quarti. Inuenta autem fuit in præcedenti problemate pars posterior 1℞+$\frac{1}{3}$. pro secundo numero.

DEINDE quia tertius sumens $\frac{1}{5}$. summæ primi, secundi, & quarti debet similiter conficere 1℞+1. diuidenda rursum erit summa 1℞+3. omnium quatuor in duas partes, quarum posterior cum $\frac{1}{5}$. prioris faciat 1℞+1. Inuenta fuit in præcedenti problemate posterior pars 1℞+$\frac{1}{2}$ pro tertio numero

POSTREMO quia quartus accipiens $\frac{1}{6}$. summæ reliquorum trium debet etiam facere 1℞+1. diuidemus summam 1℞+3. omnium quatuor in duas partes, quarũ posterior cum $\frac{1}{6}$. prioris faciat 1℞+1. quod per scholium ænigmatis 65. ita fiet. Dempto numero 1℞+1. qui effici debet, ex summa 1℞+3. omnium, quatuor, diuidatur reliquus numerus 2. per denominatorem partis $\frac{1}{6}$ vno minus, nimirum per 5. & quotiens, $\frac{2}{5}$. in ipsum denominatorem 6. ducatur. Productus enim numerus $\frac{12}{5}$. erit prior pars, summa scilicet primi

II 2 secundi

ſecundi ac tertij. quæ pars ſubtracta ex ſumma 1℞+3. omnium quatuor, reliquam faciet partem poſteriorem 1℞+$\frac{1}{3}$. Hæc enim cum $\frac{1}{3}$. prioris, hoc eſt, cum $\frac{2}{3}$. faciet 1℞+1. Reliquum iam eſt, vt omnes 4. numeri inuenti 1℞. 1℞+$\frac{1}{3}$. 1℞+$\frac{1}{2}$. 1℞+$\frac{3}{5}$. integrent ſummam 1℞+3. omnium quatuor. Faciunt autem 4℞+$\frac{43}{30}$. Eſt igitur æqualitas inter 1℞+3. & 4℞+$\frac{43}{30}$. Ablataq; 1℞ vtrinque, inter 3 & 3℞+$\frac{43}{30}$. Ablatiſq; $\frac{43}{30}$. vtrinque, inter 1$\frac{17}{30}$. & 3℞. Diuiſis ergo 1$\frac{17}{30}$. ſiue $\frac{47}{30}$. per 3. fiet 1℞ $\frac{47}{90}$. pro primo numero quæſito, quem poſuimus eſſe 1 ℞. Secundus inuentus 1℞+$\frac{1}{3}$. erit $\frac{231}{270}$. hoc eſt, $\frac{77}{90}$. Tertius aũt inuentus 1℞+$\frac{1}{2}$. erit $\frac{184}{180}$. id eſt $\frac{92}{90}$. Quartus deniq; inuẽtus 1℞+$\frac{3}{5}$. erit $\frac{505}{450}$. ſiue $\frac{101}{90}$. Et ſi abieceris denominatores, inuẽti erunt quatuor numeri integri 47. 77. 92. 101. qui quæſtioni ſatisfaciunt. Nam & primus 47 cum $\frac{1}{3}$. ſecundi, tertij, & quarti, id eſt, cum 90. & ſecundus 77. cum $\frac{1}{4}$. primi, tertij, & quarti, hoc eſt, cum 60. & tertius 92. cum $\frac{1}{5}$. primi, ſecundi, ac quarti, id eſt, cum 45. & quartus 101. cum $\frac{1}{6}$ primi, ſecundi, & tertij, videlicet cum 36. facit 137.

Hic etiam ſumma quatuor numerorum inuentorum 317. quadrupla non eſt numeri 137. quem vnuſquiſque facit, quemadmodum in ænigmate 64. fiebat.

## SCHOLIVM.

LXIX. *NON aliter inuenientur 5. numeri, vel 6. vel plures ita vt ſi vnuſquiſque à ſumma reliquorum acceperit datam partem, fiant totidem numeri æquales.*

69 *Tres numeros inuenire ea lege, vt ſi vnuſquiſque proxime inſequenti det imperatam ſui partem, poſtquam mutuo dederunt, & acceperunt, ſinguli habeant eundem numerum datum.*

SINT inueniendi tres numeri, vt ſi primus det $\frac{1}{3}$. ſecundo; ſecundus $\frac{1}{4}$. tertio; & tertius $\frac{1}{5}$. primo, fiant tres numeri 30. 30. 30. In ænigmate 63. inuenimus tres numeros eadem conditione, niſi quod tres numeros æquales, qui fieri debent, non determinauimus ad certum numerum, vt hic. Ergo inuentis, per ænigma 63. tribus numeris 6. 4. 5. qui illi ænigmati ſatisfaciunt; vt inueniantur alij tres implentes conditiones huius ænigmatis ponantur pro tribus numeris tot radices, quot vnitates ſunt in tribus numeris inuentis, nimirum 6℞. 4℞. 5℞. Si ergo primus 6℞ det $\frac{1}{3}$ ſupererunt 4℞. & ſi à tertio 5℞. accipiat $\frac{1}{5}$. habebit 5℞. qui numerus æqualis debet eſſe imperato numero 30. Quocirca diuiſis 30. per 5. fiet 1℞. 6. ac proinde primus 6℞. erit 36. ſecundus 4℞. erit 24. & tertius 5℞ erit 30. Nam primus 36. amittens $\frac{1}{3}$. habebit 24. & accipiens $\frac{1}{5}$. tertij, nimirum 6. habebit 30. Ita quoque ſecundus 24. dans $\frac{1}{4}$ habebit 18. & recipiens $\frac{1}{3}$. primi, nimirum 12 habebit 30. Ac tandem tertius 30. abijciens $\frac{1}{5}$ habebit 24. & reſumens $\frac{1}{4}$. à ſecundo, nimirum 6. habebit quoque 30. vt alij.

Aliter. Quoniam ſinguli conficere debent 30. erunt omnes tres numeri quæſiti 90. At tres numeri poſiti 6℞. 4℞. 5℞. faciunt 15℞. qui numerus æqualis eſſe debet numero 90. Diuiſis ergo 90. per 15. fiet 1. ℞. 6. veluti prius.

## SCHOLIVM.

*AD eundem modum in ænigmate 64. 67. & 68, determinari poterit numerus, quem ſinguli conficere debent. Vt ſi in præcedenti problemate 68. quilibet quatuor numerorum debeat efficere 100. Quoniam 4. numeri inuenti fuerunt 47. 77. 92. 101. Ponemus 4 numeros eſſe 47℞. 77℞. 92℞. 101℞. facietque primus cum $\frac{1}{3}$. reliquorum trium, nimirum cum 90℞. numerorum 137℞. qui æqualis eſſe debet imperato numero 100. Diuiſis ergo 100. per 137. fiet 1℞. $\frac{100}{137}$. Igitur primus numerus 47℞. erit $\frac{4700}{137}$. Secundus $\frac{7700}{137}$. Tertius $\frac{9200}{137}$. & quartus $\frac{10100}{137}$. qui conditionem problematis implent, dummodo denominatores non abijciantur. Nam primus $\frac{4700}{137}$. cum $\frac{1}{3}$. reliquorum trium, id eſt, cum $\frac{9000}{137}$. facit $\frac{13700}{137}$. videlicet 100. Sic etiam ſecundus $\frac{7700}{137}$. cum $\frac{1}{4}$. reliquorum trium, id eſt, cum $\frac{6000}{137}$. facit $\frac{13700}{137}$. hoc eſt, 100. Eundem numerum 100. facit tam tertius cum $\frac{1}{5}$. reliquorum trium quam quartus cum $\frac{1}{6}$. trium reliquorum.*

PORRO in ænigmate 68. & 67. ſi vnuſquiſque numerorum facere debeat certum quendam numerum determinatum, locum non habebit ſecunda ſolutio præſentis ænigmatis 69. quia ſumma trium numerorum in 67. ænigmate, vel 4. numerorum in 68. ænigmate inuentorum, non eſt tripla, vel quadrupla numeri, quem quiſque conficit, poſtquam imperata impleuerit, vt ibi diximus. Solum ergo adhiberi poterit in ænigmate 63. vt in hoc ænigmate 69. factum eſt: nec non in ænigmate 64. vt iam iam videbis.

Sint enim inueniendi 5. numeri, vt ſi primus dederit $\frac{1}{3}$. ſecundo, acceperitque $\frac{1}{8}$ à quinto: Secundus vero dederit $\frac{1}{4}$. tertio, acceperitque $\frac{1}{3}$. à primo: Tertius vero dederit $\frac{2}{7}$. quarto, ſumpſeritque $\frac{1}{9}$. à ſecundo: Quartus autem dederit $\frac{1}{6}$. quinto acceperitque $\frac{1}{7}$. à tertio: Quintus denique dederit $\frac{2}{3}$. primo, acceperitque $\frac{1}{6}$. à quarto; fiant tandem quinque numeri æquales, quorum quiſque 1205 vnitates contineat. In ſcholio ænigmatis 64. inuenti ſunt 5. numeri ea conditione, quam hic expreſſimus, 288. 290. 112. 270. 245. quorum vnuſquiſque, ſi imperata impleuerit, habet 241. Debet autem, vt hic iubetur, quilibet habere 1205. Ponantur ergo quinque numeri, 288℞. 290℞. 112℞. 270℞. 245℞. Si hi numeri imperata executi fuerint, habebit vnuſquiſque 241℞ vt dictum eſt, qui numerus æqualis eſſe debet dato numero 1205. Diuiſis igitur 1205. per 241. fiet 1℞. 5. Igitur primus numerus poſitus 288℞ erit 1440. Secundus poſitus 290℞. erit 1450. Tertius poſitus 112℞. erit 560. Quartus poſitus 270℞. erit 1350. Quintus denique poſitus 245℞. erit 1225. Nam ſi imperata fecerint hi 5. numeri, deprehendes, vnumquemque habere 1205.

Aliter. Quoniam vnuſquiſque facere debet 1205. erit ſumma omnium quinque, 6025. Sed quinque numeri poſiti 288℞. 290℞. 112℞. 270℞. 245℞. faciunt ſummam 1205℞. Diuiſis igitur 6025 per 1205. fiet 1. ℞. 5. veluti prius.

*70 Datum*

70 *Datum numerum in tres, quatuor, vel plures partiri ea conditione, vt si quisque proxime sequenti det imperatam sui partem, postquam mutuo dederint, & acceperint, fiant tres numeri, vel quatuor, vel plures æquales.* LXX.

HOC ænigma à præcedenti non differt. Nam si datus numerus in tot partes æquales distribuatur, quot in ænigmate exprimuntur; inueniendi erunt per ænigma præcedens, eiusque scholium, (adhibito tamen ænigmate 63. & 64. eiusque scholio) totidem numeri, qui propositam conditionem seruantes faciant totidem numeros æquales vni parti numeri dati, qui in totidem partes fuit distributus. In hos enim numeros inuentos datus numerus diuidendus est, quippe cum omnes simul faciant summam triplam, vel quadruplam numeri, quem vnusquisque inuentorum facere debet, vt dictum est.

V.g. Si numerus 90. distribendus sit in tres, vt cum primus dederit $\frac{1}{3}$. secundo; secundus $\frac{1}{4}$. tertio; & tertius $\frac{1}{5}$. primo fiant tres numeri æquales: distribuatur datus numerus 90. in tres partes æquales 30. 30. 30. ac per ænigma 69 reperiantur tres numeri, vt seruata conditione præscripta, vnusquisque faciat 30. Inuenti numeri erunt 36. 24. 30. atque in hos distribuendus est datus numerus 90. Nam si præscriptam legem obseruent, faciet vnusquisque 30.

PARI ratione, si numerus 6025. distribuendus sit in quinque partes, vt cum prima dederit $\frac{1}{3}$. secundæ; secunda $\frac{1}{2}$. tertiæ; tertia $\frac{1}{7}$. quartæ; quarta $\frac{1}{6}$. quintæ: & quinta $\frac{1}{5}$. primæ, singuli habeant eundem numerum: distribuendus erit datus numerus in quinque æquales partes 1205. 1205. 1205. 1205. 1205. & per scholium præcedentis ænigmatis (adiuuante scholio ænigmatis 64.) inueniendi quinque numeri, vt seruata lege præscripta, vnusquisque faciat 1205. qui quidem sunt, vt in proximo scholio patuit, 1440. 1450. 560. 1350. 1225. Atque in hos distribuendus est datus numerus 6025.

71 *Datis duobus numeris, alium quendam inuenire, qui vtrumque datum multiplicans faciat maiorem quidem quadratum, minorem vero latus eius quadrati.* LXXI.

SINT dati duo numeri 200. & 5. sitque numerus, quem quærimus, 1℞. Ex 1℞. in 200. fit numerus 200℞. Et ex 1℞ in 5. fit numerus 5℞ qui debet latus esse illius: atque adeo in se ductus faciet numerum æqualem 200℞. Facit autem numerus 5℞. in se 25ℨ. Est ergo æquatio inter 200℞. & 25ℨ. Diuisis igitur 200. per 25. fiet 1℞. 8. numerus quæsitus (quod numeri Cossici sint collaterales.) Hic enim multiplicans 200. facit quadratum 1600. cuius latus est numerus 40. ex 8. in 5. productus.

Si numeri dati sint 20. & 15. reperietur numerus $\frac{4}{45}$. Nā si ponatur numerus quæsitus 1℞ fiunt ex 1℞ in 20. & 15. numeri 20℞ & 15℞. Et ex 15℞ in se fit numerus 225ℨ. qui æqualis debet esse quadrato 20℞. Diuisis igitur 20. per 225. fit 1℞. $\frac{20}{225}$. siue $\frac{4}{45}$. numerus quæsitus. Hic enim multiplicans 20 & 15. facit $\frac{80}{45}$. siue $\frac{16}{9}$. quadratum, cuius latus est numerus $\frac{60}{45}$. siue $\frac{4}{3}$. productus ex $\frac{4}{45}$. in 15.

72 *Duos numeros inuenire, ita vt summa ex ipsis confecta, & excessus quadratorum, qui ex ipsis fiunt datos numeros efficiant: dummodo datus quadratorum excessus minor sit, quam datæ summæ quadratus.* LXXII.

SIT eorum summa data 20. & excessus quadratorum datus 80. qui excessus minor est quadrato 400. datæ summæ 20.

Ponatur primus numerus 1℞. ideoque secundus 20 — 1℞. vt eorum summa sit 20. Quadrati eorum 1ℨ. & 400 — 40℞ + 1ℨ. cum ex ductu 20 — 1℞. in 20 — 1℞. fiat numerus 400 — 40℞ + 1ℨ. vt in hac formula apparet. Detracto illo quadrato ex hoc, remanet excessus 400 — 40℞. æqualis 80. Additis 40℞. vtrinque, erit æquatio inter 400. & 80 + 40℞. Ablatisque 80. vtrinque, inter 320. & 40℞. Diuisis ergo 320. per 40. fiet 1℞. 8, primus numerus, secundus vero positus 20 — 1℞. erit 12. Summa numerorum 8. & 12. est 20. & quadratorum 64. & 144. excessus 80.

| | |
|---|---|
| | 20 — 1℞ |
| | 20 — 1℞ |
| | — 20℞ + 1ℨ |
| 400 — 20℞ | |
| 400 — 40℞ + 1ℨ | |

QVOD si detur eadem summa numerorum 20. & excessus quadratorum 400. qui minor non est quadrato 400. qui ex summa fit: erit quæstio impossibilis. Nam posito primo numero 1℞. & secundo 20 — 1℞. erunt rursus eorum quadrati 1ℨ. & 400 — 40℞ + 1ℨ. quorum excessus 400 — 40℞. æqualis debet esse numero 400. quod fieri non potest.

DETVR rursus numerorum 20. & excessus quadratorum item 20. Posito primo numero 1℞. & secundo 20 — 1℞. erit eorum summa 20. & excessus quadratorum 400 — 40℞. æqualis 20. Additis ergo vtrinque 40℞. erit æquatio inter 20 + 40℞. & 400. Ablatisque 20. vtrinque, inter 380. & 40.℞ Diuisis ergo 380. per 40. fiet 1℞. $9\frac{1}{2}$. primus numerus. Secundus ergo erit $10\frac{1}{2}$. quorum summa 20. & excessus quadratorum $\frac{441}{4}$. $\frac{361}{4}$. numerus $\frac{80}{4}$. hoc est, 20.

73 *Datum numerum in duos diuidere, vt excessus quadratorum, qui ex ipsis fiunt, sit quilibet numerus minor quadrato dati numeri.* LXXIII.

SIT datus numerus 20. diuidendus in duos, vt excessus quadratorum ex ipsis factorum sit 80. Hoc ænigma à præcedenti diuersum non est. Nam si reperiantur duo numeri, quorum summa datus numerus 20. & excessus quadratorum ex ipsis factorum 80. erit summa data 20. in illos duos numeros distribuenda, &c.

LXXIIII. 74 *Duos numeros inuenire in data proportione, ita vt summa quadratorum, qui ex ipsis fiunt, ad excessum numerorum inuentorum proportionem habeat datam.*

SINT inueniendi duo numeri in proportione tripla, & summa quadratorum ex ipsis procreatorum ad summam inuentorum numerorum proportionem habeat decuplam. Ponatur minor numerus 1℞. maior 3℞. ad illum triplus. Excessus est 2℞. Et quadratorum 1ʒ. 9ʒ. summa 10ʒ. decupla ad 2℞. Ergo æquatio est inter 10ʒ. & 20℞. Diuisis igitur 20. per 10. fiet 1℞. 2. minor numerus, (quia numeri Cossici collaterales sunt) maiorque erit 6. Excessus eorum est 4. & summa quadratorum 4. 36. est 40. qui numerus excessus 4. decuplus est.

LXXV. 75 *Duos numeros in data proportione reperire, ita vt excessus quadratorum ipsorum ad excessum inuentorum numerorum proportionem habeat datam.*

NVMERI quæsiti habeant proportionem triplam, & ad eorum excessum habeat excessus quadratorum proportionem duodecuplam. Ponatur minor numerus 1℞. maior 3℞. illius triplus. Excessus eorum est 2℞. Quadratorum 1ʒ. & 9ʒ. est 8ʒ. duodecuplam habens proportionem ad 2℞. Igitur æquatio erit inter 8ʒ. & 24℞. Diuisis ergo 24. per 8 fiet 1℞ 3. minor numerus (quod collaterales sint numeri Cossici) maiorque erit 9. Excessus eorum est 6. Et quadratorum 9. & 81. excessus 72. ad 6. proportionem habet duodecuplam.

LXXVI. 76 *Duos numeros interuenire in data proportione, ita vt numerus ex vno in alterum procreatus ad eorum summam datam habeat proportionem.*

HABEANT quæsiti numeri proportionem quadruplam, & numerus ex vno in alterum genitus ad eorum summam, proportionem septuplam. Ponatur minor 1℞. maior 4℞. illius quadruplus. Summa eorum est 5℞. Et ex 1℞ in 4℞. fit numerus 4ʒ. qui septuplam proportionem habere debet ad 5℞. Ergo æquatio erit inter 4ʒ. & 35℞. Diuisisque 35 per 4. fiet 1℞. $\frac{35}{4}$ minor numerus quod numeri Cossici sint collaterales Maior ergo erit $\frac{140}{4}$. Summa eorum est $\frac{175}{4}$. Ex $\frac{35}{4}$. in $\frac{140}{4}$. fit numerus $\frac{4900}{16}$. qui ad $\frac{175}{4}$ proportionem habet septuplam.

LXXVII 77 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt numerus ex vno in alterum procreatus ad eorum excessum datam habeat proportionem.*

HABEANT quæsiti numeri proportionem quadruplam, & numerus ex vno in alterum productus ad eorum excessum proportionem septuplam. Ponatur minor 1℞ & maior 4℞. illius quadruplus. Excessus eorum est 3℞. Et productus ex 1℞. in 4℞ est 4ʒ. qui septuplam habere debet proportionem ad 3℞. Ergo æquatio erit inter 4ʒ & 21℞. Diuisisque 21. per 4. fiet 1℞. $\frac{21}{4}$. minor numerus. quod numeri Cossici collaterales sint. Maior ergo erit $\frac{84}{4}$. Excessus eorum est $\frac{63}{4}$ Ex $\frac{21}{4}$. in $\frac{84}{4}$. fit numerus $\frac{1764}{16}$. qui ad $\frac{63}{4}$. proportionem habet f.ptuplam.

LXXVIII. 78 *Duos numeros inuenire in data proportione, ita vt quadratus minoris ad maiorem numerum proportionem habeat datam.*

HABEANT numeri quæsiti proportionem triplam, & quadratus minoris ad maiorem, sextuplam. Ponatur minor 1℞. & maior 3℞. illius triplus. Quadratus minoris est 1ʒ. qui sextuplus esse debet maioris numeri 3℞. Ergo æquatio est inter 1ʒ. & 18℞. Diuisisque 18. per 1. fiet 1℞. 18. minor numerus, quod numeri Cossici sint collaterales. Maior ergo erit 54. Quadratus minoris, nimirum 324. ad maiorem 54. proportionem habet sexcuplam.

LXXIX. 79 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt quadratus minoris ad Quotientem, si maior per minorem diuidatur, proportionem habeat quamcunque datam.*

HABEANT numeri quæsiti proportionem quadruplam, at quadratus minoris ad Quotientem, diuiso maiore per minorem, duplam. Ponantur quæsiti numeri 1℞. 4℞. Diuiso maiore per minorem, fit Quotiens 4. ad quem 1ʒ. quadratus minoris, proportionem debet habere duplam: ita vt æquatio sit inter 1ʒ. & 8. Diuisis 8 per 1. fit 1ʒ. 8. & 1℞. √ʒ 8. minor numerus. Maior ergo erit √ʒ 128. ad √ʒ 8. quadruplus. Diuiso maiore per minorem, fit Quotiens √ʒ 16 id est, 4 ad quem 8. quadratus minoris proportionem habet duplam.

LXXX. 80 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt quadratus minoris ad eorum summam habeat proportionem datam quamlibet.*

HABEANT quæsiti numeri proportionem triplam, & quadratus minoris sexcuplam ad eorum summam. Ponatur minor 1℞. & maior 3℞. illius triplus. Quadratus minoris est 1ʒ. qui sexcuplam proportionem habere debet ad 4℞. summam videlicet amborum. Ergo æquatio erit inter 1ʒ. & 24℞. Diuisisque 24. per 1. fiet 1℞. 24. quod numeri Cossici sint collaterales. Numeri ergo quæsiti sunt 24. 72. in proportione tripla. Et quadratus minoris 576. sexcuplam proportionem habet ad 96. summam ex ambobus collectam.

81 Duos

81 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt quadratus minoris ad eorum excessum habeat datam proportionem.* LXXXI.

HABEANT quæsiti numeri proportionem triplam, & quadratus minoris sexcuplam ad eorum excessum. Ponatur minor 1℞ & maior 3℞. illius triplus. Excessus illorum est 2℞. ad quem quadratus 1ʒ. minoris habere debet sexcuplam proportionem. Ita vt æquatio sit inter 1. ʒ. & 12℞. Diuisis ergo 12. per 1. fiet 1℞. 12. propterea quod numeri Cossici collaterales sunt. Numeri igitur sunt quæsiti 12. 36. triplam habentes proportionem. Et quadratus minoris, videlicet 144. ad 24. excessum eorum sexcuplus est.

82 *Duos numeros in data proportione inuenire. ita vt quadratus maioris ad minorem habeat proportionem datam.* LXXXII.

HABEANT quæsiti numeri proportionem triplam, & quadratus maioris ad minorem, sexcuplam. Ponatur minor 1℞. & maior 3℞. illius triplus. Quadratus maioris 9ʒ. ad minorem 1℞ proportionem habere debet sexcuplam. Erit ergo æquatio inter 9ʒ. & 6℞. Diuisisque 6. per 9. fiet 1℞ $\frac{6}{9}$ siue $\frac{2}{3}$. quod numeri Cossici sint collaterales. Numeri ergo quæsiti sunt $\frac{2}{3}$. $\frac{6}{3}$ proportionem habentes triplam. Et quadratus maioris, nimirum $\frac{36}{9}$. proportionem sexcuplam habet ad minorem $\frac{2}{3}$. siue ad $\frac{6}{9}$.

83 *Duos numeros in data proportione inuenire, vt quadratus maioris ad Quotientem, diuiso maiore per minorem, proportionem habeat datam quamcunque.* LXXXIII

HABEANT quæsiti numeri proportionem quadruplam, at quadratus maioris ad Quotientem, diuiso maiore per minorem, duplam. Ponantur numeri quæsiti 1℞. 4℞. Diuiso hoc per illum, fit Quotiens 4. ad quem 16ʒ. quadratus maioris proportionem debet habere duplam: ita vt æquatio sit inter 16ʒ. & 8. Diuisis 8. per 16. fit 1ʒ. $\frac{1}{2}$ & 1℞. √ʒ $\frac{1}{2}$. minor numerus. Maior ergo erit √ʒ8. illius quadruplus. Diuiso maiore per minorem, fit Quotiens √ʒ 16. id est, 4. ad quem 8. quadratus maioris proportionem habet duplam.

84 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt quadratus maioris ad eorum summam habeat datam proportionem.* LXXXIV

HABEANT numeri quæsiti proportionem triplam, & quadratus maioris sexcuplam ad eorum summam. Ponatur minor 1℞. & maior 3℞. illius triplus. Quadratus maioris 9ʒ. sexcuplus esse debet ad eorum summam 4℞. Est igitur æquatio inter 9ʒ. & 24℞. Diuisisque 24. per 9. fiet 1℞ $\frac{24}{9}$. vel $\frac{8}{3}$. quod numeri Cossici sint collaterales. Ac proinde numeri quæsiti triplam habentes proportionem erunt $\frac{8}{3}$. $\frac{24}{3}$. Et quadratus maioris $\frac{576}{9}$. sexcuplus est ad $\frac{32}{3}$. eorum summam: hoc est, ad $\frac{96}{9}$.

85 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt quadratus maioris ad eorum excessum habeat proportionem datam.* LXXXV.

HABEANT numeri quæsiti proportionem triplam, & quadratus maioris ad eorum excessum, decuplam. Ponatur minor 1℞. & maior 3℞. illius triplus. Excessus eorum est 2℞. ad quem quadratus maioris 9ʒ. decuplus esse debet. Est igitur æquatio inter 9ʒ. & 20℞. Diuisisque 20. per 9. fiet 1℞. $\frac{20}{9}$. propterea quod numeri Cossici collaterales sunt. Numeri ergo quæsiti sunt $\frac{20}{9}$. $\frac{60}{9}$. in proportione tripla. Excessus eorum est $\frac{40}{9}$ ad quem decuplus est quadratus maioris $\frac{3600}{81}$. siue $\frac{400}{9}$.

86 *Datis duobus numeris, alium tertium inuenire, ita vt omnium trium duo quicunque simul additi, & in reliquum multiplicati, tres numeros constituant in excessu æquali, hoc est, Arithmetice proportionales.* LXXXVI

DATI duo numeri sint 3 & 5. ponaturque tertius inuentus 1℞. Hic cum 3. facit 1℞ + 3. quæ summa ducta in reliquum 5. facit 5℞ + 15. vnum numerum. Deinde 1℞. cum 5 facit 1℞ + 5 quæ summa ducta in reliquum 3. facit 3℞ + 15. alterum numerum. Denique ex 3 & 5. fit numerus 8. qui ductus in tertium 1℞ facit 8℞. tertium numerum. Opus est iam, hos tres numeros 5℞ + 15. 3℞ + 15. & 8℞. esse Arithmetice proportionales. quod tribus modis fieri potest. Aut enim maximus est 5℞ + 15 & medius 3℞ + 15. & minimus 8℞. Aut maximus erit 5℞ + 15. medius 8℞ & minimus 3 + 15℞. Aut denique maximus erit 8℞. medius 5℞ + 15. & minimus 3℞ + 15. neque enim maximus esse potest 3℞ + 15. cum minor sit, quam 5℞ + 15.

SINT primum 5℞ + 15 3℞ + 15. 8℞. Arithmetice proportionales. Igitur (vt lib. 5. Eucl. in 4. proprietate trium numerorum Arithmetice proportionalium diximus) summa extremorum 13℞ + 15. æqualis erit duplo medij, hoc est, numero 6℞ + 30. Ablatisq; 6℞ vtrinque, æquatio erit inter 7℞ + 15 & 30. Ablatisque rursum 15 vtrinque, inter 7℞. & 15. Diuisis ergo 15. per 7. fiet 1℞. $\frac{15}{7}$ numerus quæsitus. Vel si dicti tres numeri sunt Arithmetice proportionales, habebunt eundem excessum. Sed 5℞ + 15. excedit 3℞ + 15. numero 2℞. Et 3℞ + 15. excedit 8℞ numero 15 − 5℞. vt ex regula subtractionis patet. Est ergo æqualitas inter 2℞ & 15 − 5℞. Additisque 5℞. vtrinque, inter 7℞. & 15 fietque rursus 1℞. $\frac{15}{7}$ Iam $\frac{15}{7}$. cum 3. faciunt $5\frac{1}{7}$. hoc est, $\frac{36}{7}$. qui numerus ductus in reliquum 5 facit $\frac{180}{7}$. primum numerum. Deinde ex $\frac{15}{7}$. & 5 fit summa $7\frac{1}{7}$. hoc est, $\frac{50}{7}$; quæ ducta in 3. reliquum numerum facit $\frac{150}{7}$. numerum medium. Denique ex 3.

& 5. fit summa 8. quæ ducta in reliquum numerum $\frac{15}{7}$. facit $\frac{120}{7}$. tertium numerum. Habentque hi tres numeri $\frac{180}{7}$. $\frac{150}{7}$. $\frac{120}{7}$. eundem excessum $\frac{30}{7}$. siue $4\frac{2}{7}$.

SINT deinde 5ϱ + 15. 8ϱ. 3ϱ + 15. Arithmetice proportionales. Igitur summa extremorum 8ϱ + 30. æqualis erit duplo medij, numero videlicet 16ϱ. Ablatisque 8ϱ vtrinque, æquatio erit inter 30. & 8ϱ. Diuisisque 30 per 8. fiet 1ϱ. $\frac{30}{8}$ hoc est $\frac{15}{4}$. Vel dicti tres numeri habebunt eundem excessum. Est autem inter 5ϱ + 15 & 8ϱ. excessus 15 — 3ϱ. At inter 8ϱ. & 3ϱ + 15. excessus est 5ϱ — 15. Est ergo æquatio inter 15 — 3ϱ. & 5ϱ — 15. Additisque 15. vtrinque, inter 30 — 3ϱ & 5ϱ. Additisque rursum 3ϱ vtrinque, inter 30 & 8ϱ fietque rursum 1ϱ. $\frac{30}{8}$ siue $\frac{15}{4}$. Iam ex $\frac{15}{4}$ & 3. fit summa $6\frac{3}{4}$. siue $\frac{27}{4}$. quæ ducta in reliquum numerum 5 facit $\frac{135}{4}$. primum numerum. Deinde ex $\frac{15}{4}$ & 5. fit summa $8\frac{3}{4}$. siue $\frac{35}{4}$. quæ ducta in reliquum numerum 3 facit $\frac{105}{4}$. numerum tertium. Denique ex 3 & 5 fit summa 8. quæ ducta in reliquum numerum $\frac{15}{4}$. facit $\frac{120}{4}$. medium numerum: Habentque hi tres numeri, $\frac{135}{4}$. $\frac{120}{4}$. $\frac{105}{4}$. eundem excessum $\frac{15}{4}$. siue $3\frac{3}{4}$.

POSTREMO sint 8ϱ. 5ϱ + 15. 3ϱ + 15. Arithmetice proportionales. Igitur summa extremorum 11ϱ + 15. æqualis erit duplo medij hoc est numero 10ϱ + 30. Ablatisque 10ϱ. vtrinque, æquatio erit inter 1ϱ + 15. & 30. Ablatisque rursum 15 vtrinque, inter 1ϱ. & 15 fietque 1ϱ. 15. numerus quæsitus. Vel dicti tres numeri habebunt eundem excessum. Est autem inter 8ϱ. & 5ϱ + 15. excessus 3ϱ — 15. At inter 5ϱ + 15. & 3ϱ + 15 excessus est 2ϱ. Est ergo æqualitas inter 3ϱ — 15. & 2ϱ. Additisque 15. vtrinque, inter 3ϱ. & 2ϱ + 15. Ablatisq; 2ϱ. vtrinq; , inter 1ϱ. & 15. fietq; rursus 1ϱ. 15. numerus quæsitus. Iam ex 15. & 3 fit summa 18. quæ ducta in reliquum numerum 5. facit 90. numerum medium. Deinde ex 15. & 5. fit summa 20. quæ ducta in reliquum numerum 3. facit 60 tertium numerum. Denique ex 3. & 5. fit summa 8. quæ ducta in reliquum numerum 15. facit 120. primum numerum: Habentque tres hi numeri 120. 90. 60. eundem excessum 30.

HOC quæsitum soluemus etiam in ænigmate 131. vbi dabuntur duo numeri, ita vt tres numeri producti non possint tribus modis esse proportionales Arithmetice, vt hic, sed duobus tantum modis.

LXXXVII 87 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt excessus quadratorum, qui ex ipsis fiunt, ad eorum summam habeat proportionem datam.*

HABEANT quæsiti numeri proportionem triplam, & excessus quadratorum ad summam eorum, octuplam. Ponatur minor 1ϱ & maior 3ϱ illius triplus. Summa eorum est 4ϱ. & excessus quadratorum 1ℨ 9ℨ. est 8ℨ. qui ad 4ϱ proportionem habere debet octuplam. Erit ergo æquatio inter 8ℨ. & 32ϱ. Diuisisque 32. per 8. fiet 1ϱ 4. minor numerus: propterea quod numeri Cossici sunt collaterales. Maior autem erit 12. Excessus quadratorum 16. 144. est 128. qui ad 16. amborum summam proportionem habet octuplam.

LXXXVIII 88 *Duos numeros in dato excessu inuenire, ita vt excessus quadratorum, qui ex ipsis fiunt, superet datum excessum quouis numero dato: dummodo quadratus excessus numerorum quæsitorum dati minor sit summa ex eodem excessu, & postulato numero collecta.*

SIT excessus numerorum quæsitorum 7. Excessus autem quadratorum, qui ex quæsitis numeris fiunt, maior sit, quam 7. postulato numero 100. Ponatur minor numerus 1ϱ maior 1ϱ + 7. vt nimirum illum superet numero 7. Quadrati horum numerorum 1ℨ. & 1ℨ + 14ϱ + 49. se mutuo excedunt numero 14ϱ + 49. qui superare debet 7. numero 100. hoc est, æqualitas esse debet inter 14ϱ + 49 & 107. Ablatisque 49. vtrinque, inter 14ϱ. & 58. Diuisis ergo 58 per 14. fit 1ϱ. $4\frac{1}{7}$. minor numerus: maior ergo erit $11\frac{1}{7}$. Vt minorem superet numero 7. Quadrati numerorum $\frac{841}{49}$. $\frac{6084}{49}$. se mutuo excedunt numero $\frac{5243}{49}$. qui datum numerorum excessum 7. superat numero 100. hoc est, æqualis est numero 107. cum 107. faciant $\frac{5243}{49}$.

HÆC quæstio solui potuit, quia quadratus dati excessus 7. nimirum numerus 49. minor est summa 107. ex dato excessu 7. & numero postulato 100. collecta. Quod si proponantur inueniendi duo numeri in dato excessu 7. ita vt excessus quadratorum ipsorum maior sit, quam 7. numero 10. quæstio erit impossibilis, quod optime ex ipsa operatione disces. Posito enim minore numero 1ϱ. & maiore 1ϱ + 7. vt se mutuo superent septenario. Quadrati horum numerorum rursum se excedunt numero 14ϱ + 49. qui superare debet 7. numero 10. quod est absurdum, cum illum superet numero 14ϱ + 42. qui maior est, quam 7. Causa est, quia quadratus 49. excessus 7. minor non est summa 17.

LXXXIX 89 *Duos numeros in dato excessu inuenire, ita vt excessus quadratorum, qui ex ipsis fiunt, ad excessum datum datam habeat proportionem, & insuper contineat datum numerum, dummodo quadratus dati excessus minor sit summa, quæ ex numero, qui ex ductu denominatoris datæ proportionis in ipsum excessum fit, & ex dato numero colligitur.*

DATVS excessus sit 4. & excessus quadratorum, qui ex quæsitis numeris fiunt, ad 4. habeat proportionem quincuplam & insuper contineat 20. vnitates. Ponatur minor numerus 1ϱ. & maior 1ϱ + 4. vt illum quaternario superet. Quadratorum 1ℨ. & 1ℨ + 8ϱ + 16. est 8ϱ + 16. qui quinquies continere debet datum excessum 4 & præterea 20. Quintuplum autem excessus 4. cum 20. facit 40. cui numero æqualis esse debet excessus quadratorum 8ϱ + 16. Ablatis igitur 16. vtrinque, erit æqualitas inter 24. & 8ϱ. Diuisisque 24. per 8. fiet 1ϱ. 3 minor numerus. maior ergo erit 7. Eorum excessus 4. Quadratorum 9. 49. excessus 40. continet excessum 4. quinquies, ac præterea 20. vnitates.

HÆC etiam quæstio solui potuit, quia quadratus 16. dati excessus 4. minor est summa ex quincuplo excessus 4. & numero 20. collecta. Quod si excessus detur 4. & proportio tripla, & insuper tres vnitates, quæstio fiet

ſtio fiet impoſſibilis. quod facile ex ipſa operatione cognoſcetur. Poſito enim minore numero 1℞. & maiore 1℞ + 4. erit exceſſus quadratorum 8℞ + 16. qui æqualis debet eſſe ſummæ ex triplo exceſſus 4. & numero 3. collecta, hoc eſt, numero 15. quod eſt abſurdum. Cauſa eſt, quia quadratus 16. exceſſus 4. non eſt minor numero 15.

90 *Datum numerum quadratum in duos numeros quadratos diſtribuere.* XC.

HOC ænigma ſine Algebra ſoluimus lib. 8. noſtræ Geometriæ practicæ, propoſ. 9. vbi propoſitum quadratum numerum non in duos ſolum, ſed in quotuis numeros quadratos partiti ſumus. Per Algebram autem idem hoc modo expediemus. Sit quadratus numerus 16. diuidendus in duos quadratos. Ponatur primus quadratus 1ʒ. ac proinde ſecundus 16 − 1ʒ. Finge huius latus eſſe quotcunque radices, minus tot vnitatibus, quot ſunt in latere dati quadrati, nimirum 2℞ − 4. Huius quadratum 4ʒ + 16 − 16℞. æquale debet eſſe quadrato 16 − 1ʒ. Addito 1ʒ. vtrinque, erit æquatio inter 5ʒ + 16 − 16℞. & 16. Additisque rurſum 16℞. inter 5ʒ + 16. & 16℞ + 16. Ablatisque 16. vtrinque inter 5ʒ & 16℞. Diuiſis igitur 16. per 5. fiet 1℞. $\frac{16}{5}$. quia numeri Coſſici collaterales ſunt. Huius radicis quadratus $\frac{256}{25}$ erit primus, quem poſuimus 1ʒ. Secundus autem 16 − 1ʒ. erit $\frac{144}{25}$. cuius radix $\frac{12}{5}$. & ambo quadrati conficiunt $\frac{400}{25}$. nimirum 16.

Aliter. Ponatur latus primi quadrati eſſe 1℞. Latus vero ſecundi quadrati eſſe quotuis radices, minus latere dati quadrati, nimirum 5℞ − 4. Quadrati numeri horum laterum 1ʒ. & 25ʒ + 16 − 40℞ ſimul æquales debent eſſe dato quadrato 16. Additis 40℞ vtrinque, erit æquatio inter 26ʒ + 16. & 40℞ + 16. Ablatisq; 16. vtrinque, inter 26ʒ. & 40℞. Diuiſis ergo 40. per 26. fiet 1℞ $\frac{20}{13}$. (quod numeri Coſſici ſint collaterales) cuius quadratum $\frac{400}{169}$. erit primus numerus quadratus. Secundus autem erit $\frac{2304}{169}$. qui relinquitur, ſi ille ex 16. detrahatur. Eius latus eſt $\frac{48}{13}$. & ambo quadrati conficiunt $\frac{2704}{169}$. hoc eſt, 16.

## SCHOLIVM.

*QVOD ſi minorem numerum quadratum iterum partiemur in duos quadratos, diuiſus erit datus quadratus in tres. Et ſi minimus rurſum ſecetur in duos, ſectus erit datus in quatuor. Atque ita deinceps in infinitum. Vides ergo propoſitum quadratum diuidi poſſe per Algebram in duos quadratos varijs modis: ita vt ſemper fiant diuerſi duo quadrati.*

*HOC problema ſolui etiam poteſt ſine Algebra, hoc modo. Propoſito quadrato, ducatur eius latus in quemcunq; numerum, & duplum producti numeri diuidatur per eiuſdem illius numeri quadratum auctum vnitate. Quotientis enim quadratus erit vnus quadratus quæſitus, quo ablato ex propoſito quadrato, relinquetur alter quadratus.*

*Vt ſi propoſitus ſit quadratus 36. ducatur eius latus 6. per 3. vt fiant 18. Et huius duplum 36. diuidatur per quadratum eiuſdem numeri 3. auctum vnitate, nimirum per 10. Quotiens enim $\frac{36}{10}$ ſiue $\frac{18}{5}$. quadratus $\frac{324}{25}$ id eſt, 12 $\frac{24}{25}$. erit vnus quadratus, quo ablato ex 36. erit alter 23 $\frac{1}{25}$. cuius latus $\frac{24}{5}$ ſiue 4 $\frac{4}{5}$. & ambo quadrati 12 $\frac{24}{25}$. & 23 $\frac{1}{25}$. faciunt 36*

*Nota tamen, latus propoſiti quadrati non eſſe ducendum per 1. quia duo quadrati eſſent propoſitus quadratus, & 0. quod eſt ineptum. Vt ſi 6. latus propoſiti quadrati 36. duceretur in 1. vt fiant 6. & huius producti numeri duplum 12. diuideretur per 2 nimirum per quadratũ vnitatis auctum vnitate, fieret Quotiens 6. cuius quadratum eſt 36. numerus propoſitus &c.*

91 *Datum numerum ex duobus quadratis compoſitum in alios duos quadratos diuidere.* XCI.

SIT numerus 34. ſiue quadratus, ſiue non quadratus, compoſitus ex duobus quadratis 9 & 25 diuidendus in alios duos quadratos. Sint latera quadratorum 3. & 5. ponaturque latus primi quadrati quæſiti 1℞ + 3. nimirum vna radix, plus latere primi quadrati dati. Latus vero ſecundi quadrati quæſiti, quotcunque radices minus latere ſecundi quadrati dati, nimirum 2℞ − 5 Quadrati horum laterum 1ʒ + 6℞ + 9. & 4ʒ − 20℞ + 25. faciunt ſummam 5ʒ + 34 − 14℞. æqualem dato numero 34. Additis ergo 14℞ vtrinque, erit æquatio inter 5ʒ + 34. & 14℞ + 34. Ablatisque 34. vtrinque, inter 5ʒ. & 14. ℞. Diuiſis igitur 14. per 5. fiet 1℞ [illegible]. propterea quod numeri Coſſici ſunt collaterales. Ergo latus primi quadrati quæſiti, quod poſuimus 1℞ + 3. erit $\frac{29}{5}$. Secundi vero quadrati latus, quod poſuimus 2℞ − 5. erit $\frac{28}{5}$ − 5. hoc eſt, $\frac{3}{5}$. Quadrati horum laterum inuentorum $\frac{841}{25}$. $\frac{9}{25}$. faciunt $\frac{850}{25}$. hoc eſt, numerum 34. datum.

92 *Duos numeros quadratos in dato exceſſu inuenire.* XCII.

DETVR exceſſus 70. Ponatur latus vnius quadrati 1℞. alterius vero latus 1℞. plus quotlibet vnitatibus, dummodo quadratus numerus ex ipſis deſcriptus minor ſit dato exceſſu, nimirum 1℞ + 8 Quadrati horum laterum 1ʒ & 1ʒ + 16℞ + 64. exceſſum habent 16℞ + 64. qui æqualis eſſe debet dato exceſſui 70. Ablatis vtrobique 64. erit æquatio inter 16℞. & 6. Diuiſis ergo 6. per 16. fiet 1℞ $\frac{3}{8}$. latus vnius quadrati. Latus alterius poſitum 1℞ + 8. erit 8 $\frac{3}{8}$ ſiue $\frac{67}{8}$. Quadrati horum laterum inuentorum ſunt $\frac{9}{64}$. & $\frac{4489}{64}$. quorum exceſſus $\frac{4480}{64}$. hoc eſt, 70.

MANIFESTVM autem eſt, alios atque alios duos numeros quadratos poſſe reperiri in dato eodem exceſſu, prout numerus abſolutus in ſecundi quadrati radice alius atque alius aſſumetur. Vt dato eodem exceſſu 70 ſi latus primi quadrati ponatur 1℞. & ſecundi 1℞ + 1. erunt quadrati 1ʒ. & 1ʒ + 2℞ + 1. & eorum exceſſus 2℞ + 1. qui æqualis debet eſſe dato exceſſui 70. Ablata 1. vtrinque, erit æqualitas inter 2℞. & 69. Diuiſis igitur 69. per 2. fiet 1℞. 34 $\frac{1}{2}$. ſiue $\frac{69}{2}$. cuius quadratus eſt $\frac{4761}{4}$. ſiue 1190 $\frac{1}{4}$. Latus autem ſecundi quadrati, quod poſuimus 1℞ + 1. erit 35 $\frac{1}{2}$. ſiue $\frac{71}{2}$. cuius quadratus eſt $\frac{5041}{4}$. ſiue 1260 $\frac{1}{4}$. qui priorem 1190 $\frac{1}{4}$ ſuperat numero 70.

SI exceſſus detur 100. ponaturque latus primi quadrati 1℞. & latus ſecundi 1℞ + 10. vbi quadratus numeri 10. non eſt minor exceſſu dato 100. ſed æqualis, erit quæſtio impoſſibilis. Nam quadrati 1ʒ. &

1ʒ +

qui quadrati debent esse. Detrahatur vnus ex altero, vt habeatur eorum excessus 3. quærantur que duo numeri, qui inter se multiplicati producant hunc eundem excessum 3. ita tamen, vt quadratũ semissis excessus ipsorum maius sit minore numero dato 4. atque adeo æqualis esse possit minori numero composito 1℞ + 4 & quadratum semissis summæ eorundem maius sit maiore numero dato 7. atque adeo æqualis esse possit maiori numero composito 1℞ + 7. quod cur fieri debeat, operatio docebit. Hi numeri erunt $\frac{1}{2}$. & 6. Nam inter se multiplicati producunt 3. Et excessus eorum est $5\frac{1}{2}$. hoc est, $\frac{11}{2}$. cuius semissis $\frac{11}{4}$. quadratum $\frac{121}{16}$. hoc est, $7\frac{9}{16}$. maius est, quam 4. Summa vero eorundem est $6\frac{1}{2}$. hoc est, $\frac{13}{2}$. cuius semissis $\frac{13}{4}$. quadratum $\frac{169}{16}$. hoc est, $10\frac{9}{16}$. maius est, quam 7. Inuenti autem sunt hi duo numeri $\frac{1}{2}$. & 6. sumpta ad libitum fractione $\frac{1}{2}$. cuius numerator vnitas vnus numerorum. Nam si eius denominator 2. ducatur in numerum 3. qui produci debet, fiet alter numerus 6. Quod si dati numeri forent 20. 23. habentes eundem excessum 3. non satisfacerent numeri $\frac{1}{2}$. & 6. Quare sumenda esset alia fractio, nimirum $\frac{1}{10}$. pro vno numero. Nam ex 10. denominatore in 3. fiet alter numerus 30. Et ex $\frac{1}{10}$. in 30. fit numerus 3. Et excessus eorum est $29\frac{9}{10}$. hoc est, $\frac{299}{10}$. cuius semissis $\frac{299}{20}$. quadratum $\frac{89401}{400}$. siue $223\frac{201}{400}$. maius est, quam 20. Item summa eorundem numerorum est $30\frac{1}{10}$. hoc est, $\frac{301}{10}$. cuius semissis $\frac{301}{20}$. quadratum $\frac{90601}{400}$. siue $226\frac{201}{400}$. maius est, quam 23. Atque ita, si hi numeri $\frac{1}{10}$. & 30. non satisfacerent, accipienda esset alia fractio maioris denominationis, &c. Ac toties iteranda operatio, donec duo numeri reperiantur proposito satisfacientes.

NOS rem exequamur cum numeris $\frac{1}{2}$. & 6. in proposito exemplo. quorum excessus $5\frac{1}{2}$. vel $\frac{11}{2}$. & huius semissis $\frac{11}{4}$. quadratum $\frac{121}{16}$. siue $7\frac{9}{16}$. æquale erit minori numero composito 1℞ + 4. Ablatis ergo 4. vtrobique, erit æquatio inter $3\frac{9}{16}$. & 1℞. atque idcirco 1℞ erit $3\frac{9}{16}$. quæ radix etiam inuenietur hoc modo. Summa numerorum $\frac{1}{2}$. & 6. est $6\frac{1}{2}$. siue $\frac{13}{2}$. & huius semissis $\frac{13}{4}$. quadratum $\frac{169}{16}$. siue $10\frac{9}{16}$. æquale erit maiori numero composito 1℞ + 7. Ablatis ergo 7. vtrobique, fiet æquatio inter $3\frac{9}{16}$. & 1℞. vt prius. Numerus igitur quæsitus est $3\frac{9}{16}$. Hic enim additus ad 4. & 7. faciet quadratos $7\frac{9}{16}$. & $10\frac{9}{16}$. siue $\frac{121}{16}$. & $\frac{169}{16}$. quorum latera $\frac{11}{4}$. & $\frac{13}{4}$.

QVOD si sumatur fractio $\frac{1}{3}$. & denominator 3. ducatur in excessum 3. producetur numerus 9. atque hi duo numeri $\frac{1}{3}$. & 9. multiplicati inter se facient 3. Eorum excessus est $8\frac{2}{3}$. siue $\frac{26}{3}$. & huius semissis $\frac{13}{3}$. quadratum $\frac{169}{9}$. siue $18\frac{7}{9}$. æquale erit minori numero composito 1℞ + 4. Ablatis ergo 4. vtrobique, æquatio erit inter 1℞. & $14\frac{7}{9}$. ideoque 1℞. erit $14\frac{7}{9}$. quæ etiam inuenietur hoc modo. Summa numerorum $\frac{1}{3}$. & 9. est $9\frac{1}{3}$. siue $\frac{28}{3}$. Huius semissis $\frac{14}{3}$. quadratũ $\frac{196}{9}$. siue $21\frac{7}{9}$. æquale erit maiori numero composito 1℞ + 7. Ablatis igitur 7. vtrinq; erit æquatio inter $14\frac{7}{9}$. & 1℞. vt prius. Numerus igitur quæsitus est $14\frac{7}{9}$. Hic enim additus ad 4. & 7. facit quadratos $18\frac{7}{9}$. & $21\frac{7}{9}$. siue $\frac{169}{9}$. $\frac{196}{9}$. quorum latera $\frac{13}{3}$. & $\frac{14}{3}$.

EX ipsa operatione intelligis, cur eligi debeant tales duo numeri producentes excessum datorum numerorum, quales diximus. Nam nisi quadratum semissis eorum excessus maius esset minore numero 4. non fieret æquatio inter ipsum, & minorem numerum compositum, vt patet, &c. Item constat, varios numeros inueniri posse, quorum quilibet additus ad datos duos numeros faciat duos quadratos, prout videlicet varij duo numeri accipientur, qui dictum excessum 3. producant. Ita vides, in dato exemplo inuentos esse duos numeros $3\frac{9}{16}$. & $14\frac{7}{9}$.

SED experiamur idem in datis numeris 20. & 23. Addita 1℞. vtrique, fient quadrati 1℞ + 20. & 1℞ + 23 fietq; æquatio (electis duobus numeris $\frac{1}{10}$. & 30. qui excessum 3. producant) inter $223\frac{201}{400}$. & 1℞ + 20. Item inter $226\frac{201}{400}$. & 1℞ + 23. Inuenieturque per vtramque æquationem 1℞. esse $203\frac{201}{400}$. qui numerus additus ad 20. & 23. facit quadratos $223\frac{201}{400}$. & $226\frac{201}{400}$. siue $\frac{89401}{400}$. & $\frac{90601}{400}$. quorum latera $\frac{299}{20}$. & $\frac{301}{20}$.

Aliter. Sint rursus dati duo numeri 4 & 7. Ponatur numerus quæsitus 1ʒ — 4. Huic enim si addantur 4. fit 1ʒ. quadratus. Et si eidem numero 1ʒ — 4. addantur 7. fit alius quadratus 1ʒ + 3. cuius latus statuatur 1℞. minus quotlibet vnitatibus, quæ superent 4 nimirum 1℞ — 5. cuius quadratum 1ʒ — 10℞ + 25. æquale esse debet quadrato 1ʒ + 3. Additis 10℞ vtrobique, erit æqualitas inter 1ʒ + 25. & 1ʒ + 10℞ + 3. Et si auferatur 1ʒ. vtrobique, inter 25. & 10℞ + 3. Ablatisque 3. vtrobique, inter 22. & 10℞ Diuisis igitur 22. per 10 fiet 1℞. $\frac{22}{10}$. siue $\frac{11}{5}$. à cuius quadrato $\frac{121}{25}$. si auferantur 4. (quia numerus quæsitus fuit positus 1ʒ – 4.) hoc est $\frac{100}{25}$. reliquus erit numerus quæsitus $\frac{21}{25}$. Hic enim additus ad 4. & 7. facit quadratos $4\frac{21}{25}$ & $7\frac{21}{25}$. siue $\frac{121}{25}$. & $\frac{196}{25}$. quorum latera $\frac{11}{5}$. & $\frac{14}{5}$.

SI numeri dati sint 20. & 23. ponendus erit numerus quæsitus 1ʒ — 20. vt additus ad 20. faciat quadratum 1ʒ. Et si eidem numero 1ʒ — 20. addantur 23. fiet alius quadratus 1ʒ + 3. cuius latus statuatur 1℞. minus quotlibet vnitatibus, quæ superent 20. nimirum 1℞ — 21. cuius quadratum 1ʒ — 42℞ + 441. æquale debet esse quadrato 1ʒ + 3. Additis 42℞ vtrobique, erit æqualitas inter 1ʒ + 441 & 1ʒ + 42℞ + 3 & si dematur 1ʒ. vtrobique, inter 441. & 42℞ + 3. Ablatisque 3. vtrobique, inter 438. & 42℞ Diuisis ergo 438. per 42. fiet 1℞. $10\frac{3}{7}$. siue $\frac{73}{7}$. à cuius quadrato $\frac{5329}{49}$. si auferantur 20. (quia numerus quæsitus positus fuit 1ʒ — 20.) hoc est. $\frac{980}{49}$. reliquus fiet numerus quæsitus $\frac{4349}{49}$. siue $88\frac{37}{49}$. qui additus ad 20. & 23. faciet quadratos $108\frac{37}{49}$. & $111\frac{37}{49}$. hoc est $\frac{5329}{49}$. & $\frac{5476}{49}$. quorum latera $\frac{73}{7}$. & $\frac{74}{7}$.

99 *Duobus numeris datis, alium inuenire, qui ab vtroque seorsum subtractus, relinquat quadratum.* XCIX.

SINT dati duo numeri 9. & 21. Ponatur numerus quæsitus 9 — 1ʒ. Hic namque ex 9. subtractus relinquit quadratum 1ʒ. vt in hac formula apparet. Idem autem numerus 9 — 1ʒ. detractus ex 21. relinquit 12 + 1ʒ. vt in hac altera formula liquet, qui numerus debet etiã esse quadratus. Statuatur eius latus 1℞. minus quotuis vnitatibus, ita tamen, vt earũ quadratus superet 12. nimirum 1℞ — 4. Huius quadratũ 1ʒ — 8℞ + 16. æquale debet esse

| | | |
|---|---|---|
| 9 | + | 0ʒ |
| 9 | — | 1ʒ |
| | + | 1ʒ |

| | | |
|---|---|---|
| 21 | + | 0ʒ |
| 9 | — | 1ʒ |
| 12 | + | 1ʒ |

qua-

quadrato 12+1ʒ. Additis 8℞. vtrinque, erit æquatio inter 1ʒ+16. & 1ʒ+8℞+12. Et si vtrobique auferatur 1ʒ. inter 16. & 8℞+12. Ablatisque 12. vtrinque, inter 4 & 8℞. Diuisis ergo 4. per 8. fiet 1℞. $\frac{4}{8}$. siue $\frac{1}{2}$. cuius quadratum $\frac{1}{4}$. si ex 9. auferatur, (propterea quod numerus positus fuit 9 − 1ʒ.) hoc est ex $\frac{36}{4}$. reliquus erit numerus quæsitus 8 $\frac{3}{4}$. siue $\frac{35}{4}$. qui videlicet detractus ex 9. & 21. relinquit quadratos $\frac{1}{4}$. & 12 $\frac{1}{4}$. siue $\frac{1}{4}$. & $\frac{49}{4}$. quorum latera $\frac{1}{2}$. & $\frac{7}{2}$.

C. 100 *Datis duobus numeris, alium inuenire, à quo vterque datorum detractus, quadratum relinquat.*

SINT dati duo numeri 20. & 30. Ponatur numerus quæsitus 1ʒ + 20. vt detractis 20. remaneat quadratus 1ʒ. Reliquum est, vt 1ʒ − 10. (qui numerus relinquitur, subductis 30. ex 1ʒ + 20. vt in formula apposita manifestum est,) sit etiam quadratus. Statuatur latus numeri 1ʒ − 10. vna radix, minus quotcunque vnitatibus, nimirum 1℞ − 2. Huius quadratum 1ʒ − 4℞ + 4. æquale debet esse quadrato 1ʒ − 10. Additis 4℞. vtrinque, erit æquatio inter 1ʒ + 4. & 1ʒ − 10 + 4℞. Et rursum additis 10 vtrinque, inter 1ʒ + 14. & 1ʒ + 4℞. Et si auferatur 1ʒ. vtrobiq;, inter 14. & 4℞. Diuisis ergo 14. per 4 fiet 1℞. $\frac{14}{4}$. siue $\frac{7}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{49}{4}$. si addantur 20. (quia numerus positus fuit 1ʒ + 20) hoc est, $\frac{80}{4}$. fiet numerus quæsitus $\frac{129}{4}$. hoc est, 32 $\frac{1}{4}$. à quo si demantur dati numeri 20. & 30. reliqui erunt quadrati 12 $\frac{1}{4}$. & 2 $\frac{1}{4}$. siue $\frac{49}{4}$. & $\frac{9}{4}$. quorum latera $\frac{7}{2}$. & $\frac{3}{2}$.

| | |
|---|---|
| 1ʒ + 20 | |
| + 30 | |
| 1ʒ − 10 | |

CI. 101 *Datum numerum in duos partiri, & insuper quadratum numerum inuenire, qui cum vtraque parte seorsum quadratum efficiat.*

SIT numerus datus 40. Cape duos numeros, quorũ quadrati simul minorẽ numerum efficiant, quã 40. nimirum 2. & 4. Vnicuiq; addita 1℞ fiũt numeri 1℞ + 2. & 1℞ + 4. quorũ quadrata sunt 1ʒ + 4℞ + 4. & 1ʒ + 8℞ + 16. Et si ab vtroq; dematur 1ʒ. remanebunt 4℞ + 4. & 8℞ + 16. partes numeri 40. diuidẽdi: quippe cum quilibet horum numerorum cum 1ʒ. faciat quadratum. Reliquum ergo est, vt duæ istæ partes efficiant 40. Efficiunt autem 12℞ + 20. qui numerus æqualis esse debet numero 40. Ablatis igitur 20. vtrobique, erit æquatio inter 12℞. & 20. Diuisisq; 20. per 12. fiet 1℞. $\frac{20}{12}$. siue $\frac{5}{3}$. cuius quadratus $\frac{25}{9}$. siue 2 $\frac{7}{9}$. erit is, qui quæritur. Partes autem numeri 40. videlicet 4℞ + 4. & 8℞ + 16. erunt 10 $\frac{2}{3}$. & 29 $\frac{1}{3}$. quæ simul efficiunt 40. Et vterque cum quadrato inuento 2 $\frac{7}{9}$. quadratum numerum efficit. Nam 2 $\frac{7}{9}$. cum 10 $\frac{2}{3}$. siue cum 10 $\frac{6}{9}$. facit 13 $\frac{4}{9}$. hoc est, $\frac{121}{9}$. quadratum, cuius latus $\frac{11}{3}$. Et idem quadratus 2 $\frac{7}{9}$. cum 29 $\frac{1}{3}$. siue cum 29 $\frac{3}{9}$. facit quadratum 32 $\frac{1}{9}$. siue $\frac{289}{9}$. cuius latus $\frac{17}{3}$.

CII. 102 *Datum numerum in duos partiri, & insuper numerum quadratum inuenire, à quo vtraque pars seorsum subtracta quadratum relinquat.*

SIT idem datus numerus 40. Latus quadrati quæsiti ponatur 1℞. plus tot vnitatibus, vt earum quadratum minus sit numero 40. nimirum 1℞ + 5. cuius quadratus 1ʒ + 10℞ + 25. à quo detractus numerus 10℞ + 25. relinquit quadratum 1ʒ. Vnus ergo numerorum, in quos diuidendus est 40. sit 10℞ + 25. quandoquidem detractus ex 1ʒ + 10℞ + 25. relinquit quadratum 1ʒ.

SVMATVR deinde alterius cuiusdam quadrati latus 1℞ + 4. ita vt numerus eius absolutus 4. minor sit numero absoluto 5. prioris lateris. Quadratus huius secundi lateris est 1ʒ + 8℞ + 16. qui detractus à priori quadrato 1ʒ + 10℞ + 25. relinquit 2℞ + 9. alterum numerorum, in quos diuidendus est 40. Atque ita quadratus, quem quærimus, est 1ʒ + 10℞ + 25. & partes numeri 40. sunt 10℞ + 25. & 2℞ + 9. Nam prior ex illo quadrato subductus relinquit quadratum 1ʒ. At posterior ex eodem quadrato sublatus relinquit 1ʒ + 8℞ + 16. quandoquidem hic ex illo quadrato demptus relinquit 2℞ + 9. quod etiã hæc formula docet qui numerus 1ʒ + 8℞ + 16. similiter quadratus est lateris 1℞ + 4. vt paulo ante patuit. Reliquum est, vt duæ hæ partes 10℞ + 25. & 2℞ + 9. efficiant datum numerum 40. Efficiunt autem 12℞ + 34. qui numerus æqualis debet esse numero 40. Ablatis ergo 34 vtrobique. erit æquatio inter 12℞. & 6. Diuisisque 6. per 12. fiet 1℞. $\frac{1}{2}$. Cum ergo latus quadrati quæsiti positum sit 1℞ + 5. erit ipsum latus 5 $\frac{1}{2}$. siue $\frac{11}{2}$. & quadratus quæsitus $\frac{121}{4}$. siue 30 $\frac{1}{4}$. Partes autem numeri 40. quas posuimus 10℞ + 25 & 2℞ + 9. erunt 30. & 10. quæ simul faciunt numerum datum 40. & detractæ ex quadrato inuento 30 $\frac{1}{4}$. relinquunt quadratos numeros $\frac{1}{4}$. & 20 $\frac{1}{4}$. siue $\frac{81}{4}$. quorum latera $\frac{1}{2}$. & $\frac{9}{2}$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1ʒ | + | 10℞ | + | 25 | |
| 0ʒ | + | 2℞ | + | 9 | |
| 1ʒ | + | 8℞ | + | 16 | |

CIII. 103 *Tres numeros inuenire, ita vt primus cum quolibet alio dato habeat ad summam reliquorum proportionem quamcunque datam: Item secundus cum eodem dato numero ad summam reliquorum habeat quoque datam quamuis proportionem: Tertius denique cum eodem numero dato habeat ad reliquorum summam proportionem quoque datam quamcunque.*

SIT datus numerus 73. inueniendique sint tres numeri, quorum primus cum 73. ad reliquorũm summam habeat proportionẽ duplam: Secundus cum 73. ad reliquorũ summam proportionem triplam: Tertius deniq; cum 73. ad summam reliquorum proportionem quadruplam. Ponatur summa omnium trium 1℞. Ergo primus erit $\frac{2}{3}$℞ − 73. vt cum 73 habeat $\frac{2}{3}$℞. numerum videlicet duplum ad $\frac{1}{3}$℞. summam reliquorum. Secundus autem erit $\frac{3}{4}$℞ − 73. vt cum 73. habeat $\frac{3}{4}$℞. numerum videlicet triplum ad $\frac{1}{4}$℞. summam reliquorum.

mm. Tertius denique erit $\frac{4}{5}$ ℞ $-$ 73. vt acceptis 73. habeat $\frac{4}{5}$ ℞ numerum scilicet quadruplum ad $\frac{1}{5}$ ℞. summam reliquorum. Quibus positis, cum primus acceptis 73. habeat $\frac{2}{3}$ ℞. qui duplus esse debet summæ reliquorum duorum. Facit autem secundus $\frac{3}{4}$ ℞ $-$ 73. cum tertio $\frac{4}{5}$ ℞ $-$ 73. summam $\frac{31}{20}$ ℞ $-$ 146. ad quam duplus esse debet numerus $\frac{2}{3}$ ℞. quem primus cum 73. habet. ac proinde numerus $\frac{62}{20}$ ℞ $-$ 292. duplus prædictæ summæ $\frac{31}{20}$ ℞ $-$ 146. æqualis erit numero $\frac{2}{3}$ ℞. Additis igitur 292. vtrobique, æquatio erit inter $\frac{62}{20}$ ℞. & $\frac{2}{3}$ ℞ $+$ 292. Ablatisque $\frac{2}{3}$ ℞. vtrobique, inter $\frac{146}{60}$ ℞. & 292. Diuisis igitur 292. per $\frac{146}{60}$. fiet 1℞ 120. Ergo primus numerus $\frac{2}{3}$ ℞ $-$ 73. erit 7. propterea quod $\frac{2}{3}$. numeri 120. sunt 80. à quibus si auferantur 73. reliquus fit numerus 7. Secundus autem $\frac{3}{4}$ ℞ $-$ 73. erit 17. quia $\frac{3}{4}$. numeri 120. sunt 90. à quibus si deducantur 73. reliquus fit numerus 17. Tertius denique $\frac{4}{5}$ ℞ $-$ 73. erit 23. quippe cum $\frac{4}{5}$. numeri 120. sint 96. à quibus si tollantur 73 supersint 23. Atque hi tres numeri 7. 17. 23. problemati satisfaciunt. Nam 7. cum 73. faciunt 80. qui numerus duplus est summæ 40. ex 17. & 23. collectæ. At 17. cum 73. faciunt 90. qui numerus triplus est summæ 30. ex 7. & 23. collectæ. Denique 23. cum 73. faciunt 96. qui numerus quadruplus est summæ 24. ex 7. & 17. collectæ.

104. *Tres numeros inuenire, ita vt primus cum data parte summæ aliorum duorum faciat numerum datum? Item secundus cum alia data parte aliorum duorum faciat quoque quemcunque numerum datum? Tertius denique cum quauis data parte aliorum duorum faciat similiter quemlibet datum numerum.* CIV.

DEBEAT primus cum $\frac{1}{2}$. secundi ac tertij facere 42. Secundus cum $\frac{1}{4}$. primi ac tertij, 36. Tertius cum $\frac{1}{12}$. primi ac secundi, 39. Ponatur primus 1 ℞. Erit ergo semissis aliorum duorum 42 $-$ 1 ℞. Ita enim primus cum hac semisse faciet 42. Ac proinde duplum huius semissis, nimirum 84. $-$ 2 ℞. erit summa secundi ac tertij.

Et quia secundus cum $\frac{1}{4}$. primi & tertii facere debet 36. si auferemus quartam partem primi, nimirum $\frac{1}{4}$ ℞. ex 36. reliqua erit quarta pars tertii, vna cum secundo, numerus scilicet 36. $-$ $\frac{1}{4}$ ℞. quem si detrahemus ex 84. $-$ 2 ℞. hoc est, ex summa secundi ac tertij, dabit reliquus numerus 48. $-$ 1 $\frac{3}{4}$ ℞. tres reliquas partes quartas tertij. ac proinde tertia pars huius numeri, nimirum 16. $-$ $\frac{7}{12}$ ℞. erit quarta pars tertij; quæ cum tribus quartis prædictis, hoc est, cum 48 $-$ $\frac{7}{4}$ ℞. faciet totum tertium numerum 64. $-$ $\frac{28}{12}$ ℞. siue 64. $-$ 2 $\frac{1}{3}$ ℞.

HVNC tertium si subducemus ex 84 $-$ 2 ℞. summa secundi ac tertij, reliquus fiet secundus 20 $+$ $\frac{1}{3}$ ℞.

QVIA vero tertius cum $\frac{1}{12}$ primi ac secundi, id est, cum $\frac{1}{12}$ ℞. & 1 $\frac{2}{3}$ $+$ $\frac{1}{36}$ ℞. (quæ simul faciunt 1 $\frac{2}{3}$ $+$ $\frac{1}{9}$ ℞) debet facere 39. Facit autem tertius 64 $-$ 2 $\frac{1}{3}$ ℞. cum 1 $\frac{2}{3}$ $+$ $\frac{1}{9}$ ℞. numerum 65 $\frac{2}{3}$ $-$ 2 $\frac{2}{9}$ ℞. Nam $-$ 2 $\frac{1}{3}$ cum $+$ $\frac{1}{9}$. facit $-$ 2 $\frac{2}{9}$. vt in hac formula apparet. qui numerus 65 $\frac{2}{3}$ $-$ 2 $\frac{2}{9}$ ℞. æqualis debet esse numero 39. Additis ergo 2 $\frac{2}{9}$ ℞. vtrobique, erit æqualitas inter 65 $\frac{2}{3}$ & 39 $+$ 2 $\frac{2}{9}$ ℞. Ablatisque 39. vtrobique, inter 26 $\frac{2}{3}$. siue $\frac{80}{3}$. & $\frac{20}{9}$ ℞. Diuisis ergo $\frac{80}{3}$. per $\frac{20}{9}$. fiet 1 ℞. 12. primus numerus. Ac proinde secundus, qui inuentus est 20 $+$ $\frac{1}{3}$ ℞. erit 24. Tertius autem inuentus 64 $-$ 2 $\frac{1}{3}$ ℞. erit 36. Atque tres hi numeri 12. 24. 36. problema absoluunt. Facienda autem semper est æquatio cum numero, quem tertius cum parte data aliorum facere debet, vt in nostro exemplo cum 39. factum est.

$$\begin{array}{r} -\ 2\frac{1}{3} \\ +\ \frac{1}{9} \\ \hline -\ 2\frac{2}{9} \end{array}$$

105 *Datum numerum partiri in duas partes, vt prior cum dato alio numero ad posteriorem cum quouis alio dato numero proportionem habeat datam quamcunque, si id fieri potest.* CV.

DATVS numerus 100. secandus sit in duas partes, vt prior cum 10. faciat numerum triplum numeri, quem posterior pars cum 20. efficit. Ponatur prior pars 1 ℞ ac proinde posterior 100 $-$ 1 ℞ Prior cum 10. facit 1 ℞ $+$ 10 & posterior cum 20. facit 120 $-$ 1 ℞. Vt ergo ille huius sit triplus, necessario erit æquatio inter 1 ℞ $+$ 10. & 360 $-$ 3 ℞. Additisque 3 ℞ vtrobique, inter 4 ℞ $+$ 10. & 360. Ablatisque 10 vtrobique, inter 4 ℞. & 350. Diuisis igitur 350 per 4 fiet 1 ℞. 87 $\frac{1}{2}$. prior pars. Posterior autem 100 $-$ 1 ℞. erit 12 $\frac{1}{2}$. Prior cum 10. facit 97 $\frac{1}{2}$. numerum triplum numeri 32 $\frac{1}{2}$. ex posteriori parte, & 20. conflati.

ADDITVM est in ænigmate, [si id fieri potest] quia sæpe erit quæstio impossibilis quod optime æquatio monebit. V.g. si datus numerus 100. diuidendus sit in duos, vt prior cum 10 faciat numerum septuplum numeri ex posteriori, & 20. conflati; fieri id nullo modo poterit. Posita enim priori parte 1 ℞. & posteriori 100 $-$ 1 ℞. prior cum 10. faciet 1 ℞ $+$ 10. posterior autē cum 20 faciet 120 $-$ 1 ℞. cuius ille non potest esse septuplus. Nam fieret æquatio inter 1 ℞ $+$ 10 & 840 $-$ 7 ℞. Et additis 7 ℞. vtrobique, inter 8 ℞ $+$ 10. & 840. Ablatisque 10. vtrobique, inter 8 ℞. & 830. Diuisis autem 830. per 8. fieret 1 ℞. 103 $\frac{3}{4}$. prior pars. quod est absurdum, cum maior sit dato numero 100.

VIDES igitur, quam expedite operatio ipsa nos instruat, quando quæstio proposita solui possit, & quando non. id quod ad initium huius lib. monuimus.

106 *Numerum inuenire, à quo detractis quotuis partibus aliquotis, si reliquus numerus per datum numerum multiplicetur, fiat numerus æqualis ei, qui ex inuento numero, & dato conflatur.* CVI.

SIT inueniendus numerus. à quo detractis $\frac{4}{7}$. si reliquus numerus $\frac{3}{7}$. multiplicetur per 10. tantum fiat, quantum ex numero inuento, & dato numero 10. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. Detractis $\frac{4}{7}$. remanent $\frac{3}{7}$ ℞. quibus multiplicatis per 10. fit numerus $\frac{30}{7}$ ℞. id est, 4 $\frac{2}{7}$ ℞. Et si ad positum numerum 1 ℞. addantur 10. fit numerus 1 ℞ $+$ 10. æqualis 4 $\frac{2}{7}$ ℞. Ablata ergo 1 ℞. vtrinque, erit æquatio inter 10. & 3 $\frac{2}{7}$ ℞. Diuisisque 10.

per 3 $\frac{2}{7}$. hoc est, per $\frac{23}{7}$. fiet 1℞. $\frac{70}{23}$. siue 3 $\frac{1}{23}$. numerus quæsitus. Subductis enim $\frac{4}{7}$. inuenti numeri $\frac{70}{23}$. nimirum $\frac{40}{23}$. si reliquus numerus $\frac{30}{23}$. nimirum $\frac{3}{7}$. eiusdem numeri inuenti, multiplicetur per 10. fiet numerus $\frac{300}{23}$. siue 13 $\frac{1}{23}$. Et si ad inuentum numerum $\frac{70}{23}$. addatur idem numerus datus 10. hoc est, $\frac{230}{23}$. fiet quoque numerus $\frac{300}{23}$. siue 13 $\frac{1}{23}$.

Hoc ænigma idem est, quod trigesimum, sed variata nonnihil pronunciatione.

CVII. *107 Duos numeros in data proportione inuenire, vt ex vno in alterum gignatur datus quiuis numerus.*

SINT inueniendi duo numeri in proportione sesquialtera, vt ex vno in alterum gignatur numerus 40. Ponantur numeri 2℞. 3℞. in proportione sesquialtera. Ex vno in alterum fit numerus 6ℨ. æqualis 40. Diuisis ergo 40. per 6. fit 1ℨ. $\frac{40}{6}$. Et $\sqrt{ℨ}$ $\frac{40}{6}$ erit valor vnius radicis. Et quia primus numerus positus fuit 2℞. & secundus 3℞. erit primus numerus $\sqrt{ℨ}$ $\frac{160}{6}$. & secundus $\sqrt{ℨ}$ $\frac{360}{6}$. Ex vno in alterum fit numerus $\sqrt{ℨ}$ $\frac{57600}{36}$. hoc est, $\frac{240}{6}$. siue 40.

SINT rursum inueniendi duo numeri in eadem proportione sesquialtera, vt ex vno in alterum fiat numerus 294. Positis rursum duobus numeris 2℞. 3℞. in proportione sesquialtera, gignetur ex vno in alterum numerus 6ℨ. æqualis 294. Diuisisque 294 per 6. fit 1ℨ. 49 cuius radix est 7. Ergo primus numerus 2℞. erit 14. & secundus 3℞. erit 21. Atque ex 14. in 21 fit propositus numerus 294. Vides ergo aliquando numeros quæsitos esse surdos, vt in priori exemplo, & aliquando rationales, vt in posteriori.

CVIII. *108 Duos numeros in qualibet proportione datos æqualiter minuere, ita vt reliquus maioris ad reliquum minoris habeat datam quamcunque proportionem, quæ maior sit proportione datorum numerorum.*

HOC ænigma idem est, quod octauum, alijs tamen verbis propositum. Nam & hic quæritur numerus, qui ex datis duobus detractus relinquat duos numeros in data proportione. Libuit tamen id ipsum hoc tenore proponere, & aliter soluere, quam ænigma octauum solutum fuit, vt discas aliorum quoque ænigmatum solutiones variare. Sint ergo dati duo numeri 3. & 2. in proportione sesquialtera minuendi æqualiter, hoc est, ab ipsis vnus idemque numerus auferendus, vt reliqui proportionem habeant v.g. vigecuplam. Ponamus minorem imminutum decreuisse vsque ad 1℞ ac proinde maiorem vsque ad 20℞. vt hic reliquus ad illum reliquum habeat proportionem vigecuplam. Si igitur ex maiore 3. auferemus 20℞. remanebit numerus 3 — 20℞ qui auferendus est ex 3. vt relinquantur 20℞. vt in hac formula apparet. Item si ex minore 2. detrahemus 1℞. reliquus erit numerus 2 — 1℞ qui ex 2. auferendus est, vt relinquatur 1℞. Quia vero ambo numeri ponuntur æqualiter imminuti, hoc est, ex vtroque idem numerus ablatus ponitur,

| | | |
|---|---|---|
| 3 | + | 0 ℞ |
| 3 | — | 20 ℞ |
| 0 | + | 20 ℞ |

erit æquatio inter 3 — 20℞. & 2 — 1℞. Additisque 20℞. vtrobique, inter 3 & 2 + 19℞. Ablatisque 2. vtrinque, inter 1. & 19℞. Eritque 1℞. $\frac{1}{19}$. Cum igitur ex 3. auferenda sint 3 — 20℞ & 2 — 1℞ ex 2. auferendus erit ex vtroque numero numerus 1 $\frac{18}{19}$. eruntque reliqui numeri $\frac{20}{19}$. & $\frac{1}{19}$. qui habent proportionem vigecuplam propositam.

CIX. *109 Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt qui fit ex vno in alterum cum summa quadratorum, qui ex ipsis fiunt, efficiat numerum datum.*

SINT inueniendi duo numeri in proportione sesquialtera, ita vt ex vno in alterum fiat numerus, qui cum quadratis ipsorum efficiat 100. Ponantur numeri quæsiti 3℞. 2℞. in proportione sesquialtera. Ex vno in alterum fit numerus 6ℨ. & eorum quadrati sunt 9ℨ. & 4ℨ. qui cum 6ℨ. faciunt 19ℨ. æquales 100. Diuisis igitur 100. per 19 fit 1ℨ. $\frac{100}{19}$. ergo 1℞ erit $\sqrt{ℨ}$ $\frac{100}{19}$. & 3℞. erunt $\sqrt{ℨ}$ $\frac{900}{19}$. pro primo numero, quem posuimus 3℞. & secundus numerus, qui positus fuit 2℞. erit $\sqrt{ℨ}$ $\frac{400}{19}$. ad quem $\sqrt{ℨ}$ $\frac{900}{19}$. proportionem habet sesquialteram. Ex vno in alterum fit numerus $\sqrt{ℨ}$ $\frac{360000}{361}$. hoc est, $\frac{600}{19}$. & summa quadratorum $\frac{900}{19}$. & $\frac{400}{19}$. est $\frac{1300}{19}$. quæ cum $\frac{600}{19}$. facit $\frac{1900}{19}$. hoc est, 100.

SINT rursus inueniendi duo numeri in proportione sesquialtera, ita vt numerus, qui ex vno in alterum fit, cum summa quadratorum, qui ex ipsis fiunt, faciat summam 2736. Repetita eadem operatione, erunt 19ℨ. æquales 2736. Diuisis ergo 2736. per 19. fiet 1ℨ. 144. & 1℞ 12. Igitur primus numerus positus 3℞. erit 36 & secundus, quem posuimus 2℞. erit 24. Ex 36. in 24. fiunt 864. quæ cum quadratis 576. 1296. faciunt 2736. ipsique numeri inuenti 36. & 24. proportionem habent sesquialteram.

CX. *110 Inuenire numerum, qui in se ductus, & productus in datum quemuis numerum, faciat numerum, qui habeat ad inuenti numeri cubum proportionem quamcunque datam.*

INVENIENDVS sit numerus, qui in se ductus, & hic productus in 10. faciat numerum in proportione quintupla ad inuenti numeri cubum, hoc est, qui quinquies eius cubum contineat. Ponatur quæsitus numerus 1℞. Hic in se ductus facit 1ℨ. & 1ℨ. in 10. facit 10ℨ. qui numerus debet esse quintuplus cubi ex 1℞. procreati. Est autem cubus numeri 1℞. 1ℭ. qui quinquies sumptus facit 5ℭ. æquales 10ℨ. Diuisis ergo 10. per 5. fiet 1℞ 2 numerus quæsitus. propterea quod numeri Cossici sunt collaterales. Nam ex 2. in 2. fit 4. & ex 4. in 10. fit numerus 40. quintuplus cubi 8 ex 2. procreati.

SI numerus ductus in se, & productus in 10. debet habere proportionem sesquialteram ad cubum, erit æquatio inter 10ℨ. & 1 $\frac{1}{2}$ ℭ. Diuisis igitur 10. per 1 $\frac{1}{2}$. siue per $\frac{3}{2}$. fiet 1℞ $\frac{20}{3}$. qui numerus in se ductus facit $\frac{400}{9}$.

eit $\frac{400}{9}$. & hic in 10. facit $\frac{4000}{9}$. Cubus autem numeri $\frac{20}{3}$. est $\frac{8000}{27}$. ad quem numerus $\frac{4000}{9}$. hoc est $\frac{12000}{27}$. proportionem habet sesquialteram.

SIC si numerus ductus in se, & productus in 10. debet ad cubum habere proportionem subduplam; Posito numero 1℞. fiet ex 1℞ in se numerus 1ʒ. & ex 1ʒ. in 10. numerus 10ʒ. qui subduplus esse debet 1ℭ. qui fit ex 1℞ in se cubice. Igitur æquatio erit inter 20ʒ. & 1ℭ. eritque 1℞ 20. Nam ex 20. in se, fit 400. & ex 400. in 10. fit 4000. qui subduplus est cubi 8000. qui fit ex 20. in se cubice.

111 *Datum numerum in duas partes secare, vt prior multiplicata per quemuis numerum producat numerum, qui superet numerum productum ex parte posteriore in quemlibet alium numerum, numero dato, quando id fieri potest.* CXI.

SIT numerus 30. diuidendus in duas partes, vt prior ducta in 10. procreet numerum, qui numero 20. superet numerum, quem posterior pars in 40. multiplicata producit. Ponatur prior pars 1℞ ideoque posterior 30 − 1℞. Ex 1℞. in 10. fit numerus 10℞. & ex 30 − 1℞. in 40. fit numerus 1200 − 40℞. quem prior productus superare debet numero 20. Ergo si posteriori addentur 20. fiet æqualitas inter 10℞. & 1220 − 40℞. Additisque 40℞. vtrinque, inter 50℞. & 1220. Diuisis ergo 1220. per 50. fiet 1℞. $24\frac{2}{5}$. prior pars, ideoque posterior erit $5\frac{3}{5}$. Prior in 10. ducta facit 244. posterior in 40. facit 224. qui ab illo superatur numero 20.

DIXIMVS in ænigmate, [quando id fieri potest] quia non semper quæstio solui potest. vt si prior productus superare debeat posteriorem productum, numero 300. reperietur æqualitas inter 1500 − 40℞. & 10℞. Additisque 40℞. vtrinque, inter 1500. & 50℞. Diuisisque 1500. per 50. fiet 1℞. 30. vna pars dati numeri 30. quod est ineptum. Vbi etiam vides, ex ipsa operatione per regulam Algebræ cognosci posse, num quæstio solui possit, necne.

112 *Datum numerum in duas partes secare, vt prior in quemlibet numerum ducta faciat numerum in data proportione ad numerum factum ex posteriori parte in quemuis alium numerum multiplicata.* CXII.

SIT numerus 40. secandus in duas partes, vt ex priore in 10. fiat numerus in proportione subdupla ad numerum factum ex parte posteriore in 30. Ponatur prior pars 1℞. ideoque posterior 40 − 1℞. Ex 1℞. in 10. fit numerus 10℞. qui subduplus esse debet numeri 1200 − 30℞ producti ex 40 − 1℞ in 30. hoc est, æquatio fiet inter 20℞. & 1200 − 30℞. Additisque 30℞ vtrobique, inter 50℞. & 1200. Diuisis ergo 1200. per 50. fiet 1℞ 24. prior pars, ac proinde posterior erit 16. Ex 24 in 10. fit 240. qui numerus subduplus est numeri 480. facti ex 16. in 30.

113 *Datum numerum in duos distribuere, vt prior diuisus per datum quemuis numerum faciat Quotientem in data proportione ad Quotientem, qui fit ex posteriori numero per quemlibet numerum diuiso.* CXIII.

SIT numerus 100. tribuendus in duos, vt prior diuisus per 10. faciat Quotientem in proportione sextupla ad Quotientem, quem facit posterior numerus diuisus per 20. Ponatur prior 1℞. ac proinde posterior 100 − 1℞. Diuiso priore per 10 fit Quotiens $\frac{1}{10}$℞. Diuiso autem posteriore per 20. fit Quotiens $5 - \frac{1}{20}$℞. Et quia ille Quotiens ad hunc debet habere proportionem sextuplam; erit æquatio inter $\frac{1}{10}$℞. & $30 - \frac{6}{20}$℞. Et additis $\frac{6}{20}$℞. vel $\frac{3}{10}$℞ vtrobique, inter $\frac{4}{10}$℞. & 30. Diuisis ergo 30 per $\frac{4}{10}$. fiet 1℞ 75. prior numerus. Posterior ergo erit 25. Diuisis 75. per 10. fit Quotiens $\frac{75}{10}$. Diuisis vero 25 per 20. fit Quotiens $\frac{25}{20}$. ad quem ille Quotiens $\frac{75}{10}$. vel $\frac{150}{20}$. proportionem habet sextuplam.

114 *Tres numeros in continua proportione data inuenire, vt numerus ex minore in medium productus habeat ad maiorem quamcunque proportionem datam.* CXIV.

INVENIENDI sint tres numeri in continua proportione sesquitertia, vt ex minore in medium fiat numerus ad maiorem in proportione quintupla. Ponantur quæsiti tres numeri 9℞. 12℞. 16℞. in proportione sesquitertia. Ex 9℞. in 12℞ fit numerus 108ʒ. qui debet esse quintuplus tertij 16℞. Ergo æquatio erit inter 108ʒ. & 80℞. Diuisisque 80. per 108 fiet 1℞. $\frac{80}{108}$. siue $\frac{20}{27}$. propterea quod numeri Cossici collaterales sunt. Primus ergo numerus positus 9℞. erit $\frac{180}{27}$. Secundus positus 12℞. erit $\frac{240}{27}$. & tertius positus 16℞. erit $\frac{320}{27}$. Ex primo in secundum fit numerus $\frac{43200}{729}$. qui quintuplus est ad $\frac{320}{27}$. siue ad $\frac{8640}{729}$.

SI productus numerus ex primo in secundum debet esse æqualis tertio, erit æquatio inter 108ʒ. & 16℞. Diuisis ergo 16. per 108. fiet 1℞ $\frac{4}{27}$. ac proinde tres numeri quæsiti erunt $\frac{36}{27}$. $\frac{48}{27}$. $\frac{64}{27}$. siue $1\frac{1}{3}$. $1\frac{7}{9}$. $2\frac{10}{27}$.

SI productus ex primo in secundum debet esse semissis tertij, erit æquatio inter 216ʒ. & 16℞. Diuisis igitur 16 per 216. fiet 1℞. $\frac{16}{216}$. siue $\frac{2}{27}$. ac proinde tres numeri quæsiti erunt $\frac{18}{27}$. $\frac{24}{27}$. $\frac{32}{27}$. hoc est $\frac{2}{3}$. $\frac{8}{9}$. $1\frac{5}{27}$. Atque ex $\frac{2}{3}$. in $\frac{8}{9}$. fit numerus $\frac{16}{27}$. qui semissis est tertij $1\frac{5}{27}$.

115 *Datum numerum in tres partiri, vt singuli in tres singulos numeros datos, vel in vnum eundemque numerum datum multiplicati, producant tres numeros in data proportione continua.* CXV.

SIT numerus datus 80. diuidendus in tres, vt primo ducto in 4. & secundo in 3. & tertio in 7. producan-

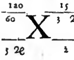
per 7. procreetur semper idem Quotiens. Ponatur prima pars 1℞. qua diuisa per 5 fit Quotiens $\frac{1}{5}$℞. Et quia tantundem fieri debet ex secunda parte diuisa per 3. multiplicabimus $\frac{1}{5}$℞ per 3. Productus enim numerus $\frac{3}{5}$℞. erit secunda pars, quæ diuisa per 3. facit Quotientem $\frac{1}{5}$℞. Quoniam autem ex diuisione tertiæ partis per 7. debet etiam produci $\frac{1}{5}$℞. multiplicabimus $\frac{1}{5}$℞ per 7. Numerus enim productus $\frac{7}{5}$℞ erit tertia pars, qua diuisa per 7. Quotiens fit $\frac{1}{5}$℞. Restat, vt vt tres hæ partes 1℞. $\frac{3}{5}$℞. $\frac{7}{5}$℞. simul sumptæ sint 240. Faciunt autem 3℞. Igitur æquatio erit inter 3℞ & 240. Diuisisque 240. per 3 fiet 1℞. 80. prima pars. Secunda erit 48. quæ habetur, si inuenta radix 80. ducatur in $\frac{3}{5}$. cum secunda pars inuenta sit $\frac{3}{5}$℞. Tertia denique erit 112. quæ habetur, si eadem radix inuenta 80. ducatur in $\frac{7}{5}$. quandoquidē tertia pars inuenta fuit $\frac{7}{5}$℞. Atq; omnes hæ tres partes 80. 48. 112. faciunt 240. numerum propositum. Et tam prima diuisa per 5. quam secunda per 3. & tertia per 7. fit idem semper Quotiens 16.

119 *Duos numeros in data proportione inuenire, vt qualibet pars aliquota minoris in aliam datam partem maioris multiplicata gignat numerum quemcunque datum.* CXIX.

SINT inueniendi duo numeri in proportione tripla, vt $\frac{1}{4}$. minoris in $\frac{1}{2}$. maioris ducta procreet numerum 90. Ponatur minor 1℞. & maior 3℞. vt habeant datam proportionem triplam. Ex quarta parte minoris, nimirum $\frac{1}{4}$℞, in semissem maioris, id est, in $\frac{3}{2}$℞ fit numerus $\frac{3}{8}$ℨ. æqualis 90. Diuisis ergo 90. per $\frac{3}{8}$. fiet 1ℨ. 240. Et 1℞ erit √ℨ 240. minor numerus. Maior erit huius triplus √ℨ 2160. Iam $\frac{1}{4}$. minoris, videlicet √ℨ 15. ducta in $\frac{1}{2}$. maioris, nimirum in √ℨ 540. facit √ℨ 8100. hoc est, numerum datum 90.

120 *Numerum inuenire, quo per datum numerum multiplicato, & per productum diuiso alio numero dato, Quotiens ad inuentum numerum datam habeat proportionem.* CXX.

SIT inueniendus numerus, quo multiplicato per 5. & per productum diuiso numero 60. Quotiens ad numerum inuentum proportionem habeat sesquialteram. Ponatur numerus quæsitus 1℞. Hoc ducto in 5. fiunt 5℞. Diuisis autem 60. per 5℞. fit Quotiens $\frac{60}{5℞}$. qui sesquialteram proportionem habere debet ad 1℞. Habet autem & numerus 1$\frac{1}{2}$℞. hoc est, $\frac{3℞}{2}$. (qui producitur ex 1℞. in 1$\frac{1}{2}$. siue in $\frac{3}{2}$.) ad 1℞. proportionem sesquialteram. Est ergo æquatio inter $\frac{60}{5℞}$. & $\frac{3℞}{2}$. quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 120. & 15ℨ. Diuisis igitur 120. per 15. fiet 1ℨ. 8. Et 1℞ erit √ℨ 8. numerus, quem quærimus. Nam ex √ℨ 8 in 5 fit √ℨ 200. per quem numerum si diuidantur 60. fit Quotiens √ℨ 18. qui ad √ℨ 8. sesquialteram proportionem habet: quippe cum √ℨ 8. ducta in 1$\frac{1}{2}$. faciat √ℨ 18.




121 *Tres numeros inuenire Arithmetice proportionales, ita vt eorum summa sit data pars aliquota numeri, qui ex eorum multiplicatione inter se producitur. Vel (quod idem est) vt numerus ex ipsorum multiplicatione productus ad eorundem summam proportionem habeat datam.* CXXI.

DEBEAT summa inuentorum numerorum esse $\frac{1}{5}$. numeri ex eorum multiplicatione producti, hoc est, numerus productus ad summam habere debeat proportionem quintuplam. Ponantur tres numeri quæsiti 1℞. 2℞. 3℞ qui æqualiter se excedunt numero 1℞. Eorū summa est 6℞. At numerus ex multiplicatione productus 6ℭ. Nam ex 1℞. in 2℞ fit numerus 2ℨ. Et ex 2ℨ. in 3℞. fit numerus 6ℭ. Et quoniam summa 6℞ debet esse $\frac{1}{5}$. numeri 6ℭ. erit æquatio inter 30℞. & 6ℭ. Diuisis igitur 30. per 6. fiet 1ℨ. 5. (propterea quod inter ℞ & ℭ. vna denominatio, nimirum ℨ, est interposita) ideoque 1℞. erit √ℨ 5 & 2℞ erunt √ℨ 20. & 3℞ erunt √ℨ 45. Itaque tres numeri inuenti sunt √ℨ 5. √ℨ 20. √ℨ 45. qui se æqualiter excedunt numero √ℨ 5. vt patet, si primus à secundo, & secundus à tertio subtrahatur. Summa eorum est √ℨ 180. & numerus ex eorum multiplicatione productus √ℨ 4500. Constat autem √ℨ 180. esse $\frac{1}{5}$ numeri √ℨ 4500. hoc est, √ℨ 4500. ad √ℨ 180. proportionem habere quintuplam; cum numerus √ℨ 180. ductus in 5 faciat √ℨ 4500.

DEBEAT deinde numerus productus ad summam habere proportionem, quam 24 ad 1. hoc est, summa debeat esse $\frac{1}{24}$. numeri producti. Ponantur numeri proportionales Arithmetice, 2℞. 3℞. 4℞ quorum summa 9℞ & numerus productus 24ℭ. Et quia 9℞. debent esse $\frac{1}{24}$. numeri 24ℭ. hoc est, hic numerus ad illum habere debet proportionem, quam 24. ad 1. si 9℞. multiplicentur per 24. fiet æqualitas inter 216℞. & 24ℭ. Diuisis igitur 216. per 24. fiet 1ℨ. 9. & 1℞ 3. Erunt igitur tres numeri quæsiti 6. 9. 12. quod positi sint 2℞. 3℞. 4℞. Summa eorum 27. est $\frac{1}{24}$. pars numeri 648. ex eorum multiplicatione producti: propterea quod ex 27. in 24. gignatur numerus 648.

122 *Tres numeros inuenire in continua proportione data, vt ex eorum multiplicatione gignatur datus numerus.* CXXII.

SINT tres numeri inueniendi continue quadrupli, vt inter se multiplicati procreent numerum 27. Ponantur quæsiti numeri 1℞. 4℞. 16℞. in continua proportione quadrupla. Ex 1℞ in 4℞. fit numerus 4ℨ. & ex 4ℨ. in 16℞. fit numerus 64ℭ. æqualis 27. Diuisis ergo 27. per 64. fit 1ℭ. $\frac{27}{64}$. & 1℞ $\frac{3}{4}$. Sunt ergo tres numeri quæsiti $\frac{3}{4}$. $\frac{12}{4}$. $\frac{48}{4}$. hoc est, $\frac{3}{4}$. 3. 12. quadrupli, qui inter se multiplicati producunt 27.

SINT rursum inueniendi tres numeri sesquialteri, qui inter se multiplicati faciant 12. Ponantur tres numeri sesquialteri 1℞. 1$\frac{1}{2}$℞. 2$\frac{1}{4}$℞ hoc est, 1℞. $\frac{3}{2}$℞. $\frac{9}{4}$℞. Ex 1℞ in $\frac{3}{2}$℞. fit numerus $\frac{3}{2}$ℨ. Et ex $\frac{3}{2}$ℨ.

 in $\frac{9}{4}$℞.

in $\frac{9}{4}$℞. fit numerus $\frac{27}{8}$ȼ. hoc est, $3\frac{3}{8}$ȼ. æqualis 12. Diuisis ergo 12. per $\frac{27}{8}$. fiet 1ȼ. $3\frac{5}{9}$. & 1℞. √ȼ $3\frac{5}{9}$. primus numerus, quem posuimus 1℞. Secundus ergo positus $1\frac{1}{2}$℞. erit √ȼ 12. Et tertius positus $2\frac{1}{4}$℞. erit √ȼ $40\frac{1}{2}$. propterea quod ex $1\frac{1}{2}$. in √ȼ $3\frac{5}{9}$ fit √ȼ 12. & ex $2\frac{1}{4}$ in √ȼ $3\frac{5}{9}$. fit √ȼ $40\frac{1}{2}$. Iam ex √ȼ $3\frac{5}{9}$. in √ȼ 12. fit numerus √ȼ $42\frac{2}{3}$. Et ex √ȼ $42\frac{2}{3}$. in √ȼ $40\frac{1}{2}$. fit numerus √ȼ 1728. hoc est, 12.

CXXIII. 123 *Numerum inuenire, qui ductus in suam radicem quadratam producat datum numerum.*

SIT inueniendus numerus, qui in suam radicem quadratam ductus faciat 4. Ponatur numerus quæsitus 1ʓ. Hic ductus in 1℞ suam radicem quadratam facit 1ȼ. æqualem 4. Diuisis ergo 4. per 1. fiet 1ȼ 4. eiusq; radix cubica √ȼ 4. cuius quadratum est √ȼ 16. numerus quæsitus; quem posuimus 1ʓ. Hic enim ductus in √ȼ 4. suam radicem quadratam facit √ȼ 64. hoc est, 4.

SIT deinde producendus numerus $15\frac{5}{8}$. inuenieturque æqualitas inter 1ȼ. & $15\frac{5}{8}$. Diuisis ergo $15\frac{5}{8}$. per 1. fiet 1ȼ. $15\frac{5}{8}$. hoc est, $\frac{125}{8}$. cuius radix cubica $\frac{5}{2}$ & huius quadratum $\frac{25}{4}$. numerus quæsitus, quem posuimus 1ʓ. Atque hic in suam radicem $\frac{5}{2}$. ductus facit $\frac{125}{8}$. hoc est, $15\frac{5}{8}$.

CXXIV. 124 *Numerum inuenire, cuius radix quadrata ad eiusdem radicem cubicam habeat datam proportionem.*

SIT inueniendus numerus, cuius radix quadrata ad eiusdem radicem cubicam habeat proportionem sesquialteram. Ponatur quæsitus numerus 1ʓȼ vt nimirum habeat vtramq; radicem propositam. Radix eius quadrata est 1ȼ. & radix cubica 1ʓ. vt ex ijs constat, quæ ad initium cap. 12 docuimus. quia 1ȼ in se quadrate facit 1ʓȼ, & 1ʓ in se cubice similiter facit 1ʓȼ. Reliquum est. vt 1ȼ. ad 1ʓ proportionem habeat sesquialteram, hoc est, æquatio fit inter 1ȼ. & $1\frac{1}{2}$ʓ. quod $1\frac{1}{2}$ʓ ad 1ʓ habeat quoque sesquialteram proportionem. Diuisis igitur $1\frac{1}{2}$ per 1, fiet 1℞ $1\frac{1}{2}$. (quia numeri Cossici sunt collaterales) cuius ʓȼ est $\frac{729}{64}$. siue 11 $\frac{25}{64}$. Huius radix quadrata est $\frac{27}{8}$. hoc est, $3\frac{3}{8}$. Radix autem cubica $\frac{9}{4}$ siue $2\frac{1}{4}$. Constat autem $3\frac{3}{8}$. ad $2\frac{1}{4}$. hoc est, $\frac{27}{8}$. ad $\frac{18}{8}$. habere proportionem sesquialteram.

SI proportio proponatur tripla, reperietur eodem discursu æquatio inter 1ȼ. & 3ʓ. Diuisisque 3. per 1. fiet 1℞ 3. cuius zensicubus est 729. atque huius radix quadrata 27. ad radicem cubicam 9. proportionem habet triplam.

CXXV. 125 *Duos numeros inuenire, vt ex vno in alterum gignatur numerus, qui ad duos inuentos habeat duas proportiones datas, maiorem tamen ad minorem, & minorem ad maiorem.*

SINT inueniendi duo numeri, vt ex vno in alterum fiat numerus, qui ad minorem habeat proportionem triplam sesquialteram & ad maiorem, duplam. Ponatur numerus productus 1℞. Ergo minor numerus quæsitus erit $\frac{2}{7}$℞. & maior $\frac{1}{2}$℞. quippe cum 1℞ ad $\frac{2}{7}$℞ habeat proportionem triplam sesquialteram, & duplam ad $\frac{1}{2}$℞. Ex $\frac{2}{7}$℞ in $\frac{1}{2}$℞. fit numerus $\frac{2}{14}$ʓ. siue $\frac{1}{7}$ʓ. æqualis posito producto 1℞. Diuisa ergo 1 per $\frac{1}{7}$. fiet 1℞ 7. numerus scilicet qui produci debet: cum numeri Cossici sint collaterales. Quia vero minor inuentus fuit $\frac{2}{7}$℞ erit minor 2. & maior $3\frac{1}{2}$. qui inuentus fuit $\frac{1}{2}$℞. Manifestum autem est, 7. habere ad 2. proportionem triplam sesquialteram, & ad $3\frac{1}{2}$. duplam.

CXXVI. 126. *Duos numeros inuenire datam summam efficientes, ita vt vterius cum data parte, vel partibus alterius faciat quemuis numerum datum: qui minor sit, quam data summa, & maior data parte, vel partibus datis eiusdem summæ datæ.*

SINT inueniendi duo numeri, quorum summa 60 ita vt prior numerus, cum $\frac{3}{7}$. posterioris faciat 50. Ponatur prior 1℞. ideoque posterior 60 − 1℞. Huius $\frac{3}{7}$. sunt $25\frac{5}{7}$ − $\frac{3}{7}$℞. quæ cum 1℞. faciunt $\frac{4}{7}$℞ + $25\frac{5}{7}$. numerum æqualem 50. quia vt − $\frac{3}{7}$℞ addantur ad 1℞ debent subtrahi $\frac{3}{7}$℞ ex 1℞. atque ita remanent $\frac{4}{7}$℞ cum signo + vt supra in subtractione dictum est. Ablatis $25\frac{5}{7}$. vtrobique, erit æquatio inter $\frac{4}{7}$℞. & $24\frac{2}{7}$. Diuisis ergo $24\frac{2}{7}$. per $\frac{4}{7}$. fiet 1℞ $42\frac{1}{2}$. prior numerus: posterior autem erit $17\frac{1}{2}$ cuius $\frac{3}{7}$. sunt $7\frac{1}{2}$. quæ cum priori parte faciunt 50.

SI prior numerus cum $\frac{3}{7}$. posterioris deberet facere 25 fieri id non posset, quia numerus 25. minor est, quam $\frac{3}{7}$ datæ summæ 60. vt experiri poteris. At si prior numerus cum $\frac{3}{7}$. posterioris debeat facere 26. fieri id poterit, eritque prior numerus $\frac{1}{2}$. & posterior $59\frac{1}{2}$. Huius $\frac{3}{7}$. sunt $25\frac{1}{2}$. quæ cum priori parte faciunt 26.

Eodem pacto soluetur ænigma, si posterior numerus cum $\frac{3}{7}$. prioris facere debeat datum numerum: si nimirum posterior numerus ponatur 1℞, &c.

CXXVII 127 *Quinque numeros inuenire, ita vt quatuor quomodolibet sumpti sine reliquo faciant quinque numeros datos: dummodo quarta pars summæ propositorum quinque numerorum maior sit singulis numeris postulatis.*

INVENIENDI sint quinque numeri, ita vt quatuor sine primo faciant 127. Et quatuor sine secundo, 119. Et quatuor sine tertio, 109. Et quatuor sine quarto, 104. Et quatuor sine quinto, 97. Vbi vides, quartam partem summæ 556. ex datis numeris 127. 119. 109. 104. 97. collectæ esse 139. numerũ singulis illis numeris maiorem. Quoniam ergo summa omniũ quatuor sine quinto est minima omnium, nimirum 97. erit necessario quintus numerus omniũ maximus, quandoquidẽ quintus cum quibuslibet alijs tribus facit maiorẽ summam, quam

quam 97. Ponatur ergo quintus numerus 1℞, ac proinde cum alij quatuor sine quinto faciant 97. erunt omnes quinque numeri simul 97 + 1℞. Et quia quatuor sine quarto faciunt 104. Si ex summa omnium 97 + 1℞. detrahatur 104. reliquus erit quartus 1℞ − 7. Deinde quia quatuor sine tertio faciunt 109. si ex eadem summa 97 + 1℞. demantur 109. remanebit tertius 1℞ − 12. Rursus quoniam quatuor sine secundo faciunt 119. si 119. subducantur ex eadem summa 97 + 1℞ relinquetur secundus 1℞ − 22. Denique quia quatuor sine primo faciunt 127. si 127. ex eadē summa 97 + 1℞. auferatur, remanebit primus 1℞ − 30. Reliquum iam est, vt omnes hi quinque numeri inuenti faciant simul summam omnium 97 + 1℞. Faciunt autem 5℞ − 71. Igitur æquatio erit inter 97 + 1℞ & 5℞ − 71. Addirisque 71. vtrobique, inter 168 + 1℞. & 5℞. Ablataque 1℞. vtrinq;, inter 168. & 4℞. Diuisis ergo 168. per 4. fiet 1℞. 42. quintus numerus, quem posuimus esse 1℞ Ergo quartus inuentus 1℞ − 7. erit 35. Et tertius inuentus 1℞ − 12. erit 30. Secundus autem inuentus 1℞ − 22. erit 20. Primus denique, qui inuentus fuit 1℞ − 30. erit 12. adeo vt quinque numeri quæsiti sint ordine 12. 20. 30. 35. 42. qui ænigma propositum expediunt.

Hoc ænigma aliter solutum fuit in quatuor numeris in ænigmate 59.

128 *Numerum inuenire, ita vt tres quadrati ex eius tribus partibus datis descripti, & in vnam summam collecti, efficiant ipsum numerum inuentum, vel alium quemcunque datum.* CXXVIII

SIT primum inueniendus numerus, ita vt tres quadrati ex eius $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{5}$. & $\frac{1}{2}$. descripti, & in vnam summam collecti, efficiant ipsum numerum inuentum. Ponatur ille numerus 1℞. cuius $\frac{2}{3}$. erunt $\frac{2}{3}$℞. & $\frac{3}{5}$. erunt $\frac{3}{5}$℞. & $\frac{1}{2}$. erit $\frac{1}{2}$℞. Quadratum harum partium $\frac{4}{9}$ʒ. $\frac{9}{25}$ʒ. $\frac{1}{4}$ʒ. simul efficiunt $\frac{949}{900}$ʒ. numerum æqualem numero posito 1℞. Diuisa igitur 1. per $\frac{949}{900}$. fiet 1℞ $\frac{900}{949}$. numerus quæsitus (quod numeri Cossici sint collaterales) Huius $\frac{2}{3}$ sunt $\frac{1800}{2847}$. & huius quadratus $\frac{3240000}{8105409}$. Et $\frac{3}{5}$. sunt $\frac{2700}{4745}$. cuius quadratus $\frac{7290000}{22515025}$. Et $\frac{1}{2}$. est $\frac{900}{1898}$. cuius quadratus $\frac{810000}{3602404}$. qui tres quadrati faciunt summam $\frac{623470746493596690000}{657415264913803620900}$. quæ æqualis est numero inuento $\frac{900}{949}$. Nam idem numerus producitur ex huius numeratore in illius denominatorem, & ex denominatore in numeratorem, nimirum numerus 5916737384224232588100.

SIT deinde numerus inueniendus, ita vt tres quadrati ex eius $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{5}$. & $\frac{1}{2}$. descripti faciant numerum 3796. Erunt, vt prius, tres quadrati in vnam summam collecti, $\frac{949}{900}$ʒ qui numerus æqualis esse debet numero 3796. Diuisis ergo 3796 per $\frac{949}{900}$. fiet 1ʒ. 3600. & 1℞ 60. numerus quæsitus. Huius enim $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{5}$, & $\frac{1}{2}$. sunt 40. 36. & 30. & quadrati horum numerorum 1600. 1296. 900. faciunt summam 3796.

SIT denique inueniendus numerus, ita vt tres quadrati ex eius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{9}$ descripti summam faciant 20. Ponatur numerus quæsitus 1℞ Eius partes datæ sunt $\frac{1}{2}$℞ & $\frac{1}{3}$℞. & $\frac{1}{9}$℞. quarum quadrati $\frac{1}{4}$ʒ. $\frac{1}{9}$ʒ. & $\frac{1}{81}$ʒ. faciunt summam $\frac{121}{324}$ʒ. æqualem numero 20. Diuisis ergo 20. per $\frac{121}{324}$. fiet 1ʒ. $\frac{6480}{121}$. & 1℞ √ʒ $\frac{6480}{121}$. numerus quæsitus. Huius $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{9}$. sunt √ʒ. $\frac{6480}{484}$. √ʒ $\frac{6480}{1089}$. & √ʒ $\frac{6480}{9801}$. quarum partium quadrati $\frac{6480}{484}$. $\frac{6480}{1089}$. & $\frac{6480}{9801}$. efficiunt summam $\frac{103317437520}{5165871876}$. hoc est, 20.

129 *Datum numerum in quotlibet numeros partiri, ita vt quilibet sequens superet præcedentem dato numero.* CXXIX

DATVS numerus 200. tribuendus sit in sex, vt secundus superet primum numero 5. tertius secundum numero 2. quartus tertium numero 10 quintus quartum vnitate. Et sextus quintum numero 15 Ponatur primus 1℞ Erit igitur secundus 1℞ + 5. Tertius 1℞ + 7. Quartus 1℞ + 17. Quintus 1℞ + 18. Et sextus 1℞ + 33. Hi omnes faciunt 6℞ + 80 quæ summa æqualis esse debet dato numero 200. Ablatis ergo 80. vtrinque erit æquatio inter 6℞ & 120. Diuisisque 120. per 6. fiet 1℞ 20. primus numerus. Secundus ergo erit 25. Tertius 27. Quartus 37. Quintus 38 & sextus 53. qui simul faciunt 200. & problema absoluunt.

DEBET autem datus numerus maior esse summa, quæ ex datis excessibus colligitur, si sequens quilibet excessus præcedenti addatur. Vt quia in dato exemplo, si primus numerus foret 5. secundus esset 7. tertius 17. quartus 18. & quintus 33 qui omnes faciunt 80. oportet datum numerum maiorem esse quam 80. nimirum 81. vel 82. vel 200. vel 300. &c. Id quod ipsa operatio docebit. Si enim datus numerus esset 79. fieret æquatio inter 6℞ + 80. & 79 quod fieri nequit.

130 *Duos numeros inuenire in proportione data, ita vt alteruter ductus in quadratum alterius faciat numerum quemcunque datum.* CXXX.

SINT inueniendi duo numeri in proportione tripla, ita vt alteruter ipsorum in quadratum alterius ductus faciat 192. Ponatur minor 1℞. ideoque maior 3℞ Ex maiore 3℞. in 1ʒ. quadratum minoris fit numerus 3ℭ æqualis 192. Diuisis igitur 192. per 3. fiet 1ℭ. 64. & 1℞. 4. minor numerus. Maior ergo erit 12. Nam ex 12, in 16. quadratum minoris numeri 4. fit datus numerus 192.

RVRSVS ex minore 1℞. in 9ʒ quadratum maioris fit numerus 9ℭ. æqualis 192. Diuisis ergo 192. per 9. fiet 1ℭ. 21$\frac{1}{3}$. siue $\frac{64}{3}$. & 1℞. √ℭ $\frac{64}{3}$. primus numerus; secundus vero huius triplus erit √ℭ $\frac{1728}{3}$. In huius quadratum √ℭ $\frac{2985984}{9}$. si ducatur primus √ℭ $\frac{64}{3}$. fiet numerus √ℭ $\frac{191102976}{27}$. siue √ℭ 7077888. hoc est 192.

131 *Duobus numeris datis, alium tertium inuenire, ita vt tres habeantur numeri, quorum bini simul sumpti, si in tertium ducantur, procreentur tres numeri Arithmeticè proportionales.* CXXXI

DATI sint numeri 10. & 30. inueniendusque sit tertius, ita vt bini simul sumpti, & in tertium multiplicati

producant tres numeros Arithmetice proportionales. Ponatur numerus quæsitus 1℞. Summa ex 1℞. & 10. est 1℞ + 10. quæ ducta in tertium 30. facit 30℞ + 300. Summa vero ex 1℞. & 30. est 1℞ + 30. quæ ducta in tertium 10. facit 10℞ + 300. Summa denique ex 10. & 30. est 40. quæ ducta in tertium 1℞. facit 40℞. ita vt tres numeri procreati sint 30℞ + 300. 10℞ + 300. & 40℞. qui eundē debent habere excessum. Sed quia nondum constat, quis eorum sit maximus, & quis medius: & quis minimus statuamus 30℞ + 300. esse maximum: 10℞ + 300. medium, & 40℞. minimum. Excessus priorum est 20℞. posteriorum 300 − 30℞ qui excessus æquales debent esse. Additis igitur 30℞. vtrinque, erit æquatio inter 50℞ & 300. Diuisisque 300. per 50. fiet 1℞ 6. numerus quæsitus, ita vt tres numeri sint 6. 10. 30. Ex 6. & 10. fit summa 16. quæ ducta in 30. facit 480. Et ex 6. & 30. fit summa 36. quæ ducta in 10. facit 360. Denique ex 10 & 30. fit summa 40 quæ ducta in 6. facit 240. Sunt autem hi tres producti 480. 360. 240. Arithmetice proportionales, cum eorum excessus sit 120.

QVOD si statuemus maximum 30℞ + 300. medium 40℞ & minimum 10℞ + 300. erit priorum excessus 300 − 10℞. & posteriorum 30℞ − 300. qui illi æqualis esse debet. Additis ergo 300 vtrobique, erit æquatio inter 600 − 10℞. & 30℞. Additisq; rursum 10℞ vtrinq; inter 600. & 40℞. Diuisis igitur 600. per 40 fiet 1℞ 15. numerus quæsitus, eruntque tres numeri, 15. 10. 30. Nam ex 15. & 10. fit summa 25. quæ ducta in 30. facit 750. At ex 15. & 30. fit summa 45. quæ ducta in 10. facit 450. Denique ex 10. & 30. fit summa 40. quæ ducta in 15. facit 600. Atque hi tres numeri producti 750. 600. 450. habent eundem excessum 150.

NEQVE vero maximus esse potest 40℞. & medius 30℞ + 300 & minimus 10℞ + 300. Nam inter priores esset excessus 10℞ − 300. & inter posteriores 20℞. qui æqualis esse non potest priori excessui, cum sit maior. Est ergo maximus 30℞ + 300. cum etiam maior sit, quam 10℞ + 300. Et vterque aliorum potest esse medius, vel minimus, vt patet.

Hoc problema solutum etiam fuit in ænigmate 86. vbi dati sunt duo numeri, ita vt tres numeri producti tribus modis possint esse proportionales Arithmetice.

CXXXII 132 *Tres numeros inuenire, ita vt primus ac secundus cum data parte tertij. Item secundus & tertius cum parte data primi: Nec non tertius ac primus cum parte data secundi, efficiant vnum eundemque numerum datum.*

TAM primus ac secundus cum $\frac{1}{4}$. tertij, quam secundus ac tertius cū $\frac{1}{2}$. primi, quā tertius ac primus cū $\frac{1}{3}$. secundi debeant facere 100. Ponatur tertius 1℞. cuius $\frac{1}{4}$℞. cum primo & secundo debent facere 100. ac propterea hi duo, antequam acciperent $\frac{1}{4}$℞. à tertio, habuerunt 100 − $\frac{1}{4}$℞. Et quia secundus ac tertius cum $\frac{1}{2}$ primi debent quoque facere 100. si ex 100. demamus tertium, nimirum 1℞ erit reliquus numerus 100 − 1℞. solus secundus vna cum $\frac{1}{2}$. primi. Quoniam aūt secundus, ac totus primus fecerunt 100 − $\frac{1}{4}$℞. Et hi duo simul superant secundum, ac $\frac{1}{2}$ primi semisse eiusdem primi: si ea 100 − $\frac{1}{4}$℞. summa primi & secundi, auferemus 100 − 1℞ valorem solius secundi cum $\frac{1}{2}$ primi, erit reliquus numerus $\frac{3}{4}$℞. semissis primi, ac proinde totus primus erit 1$\frac{1}{2}$℞ hoc est $\frac{3}{2}$℞. Deinde quia primus ac secundus simul cum $\frac{1}{4}$. tertij faciunt 100 Et solus primus facit 1$\frac{1}{2}$℞ & $\frac{1}{4}$. tertij est $\frac{1}{4}$℞ hoc est 1$\frac{3}{4}$℞ summam ex 1$\frac{1}{2}$℞. & $\frac{1}{4}$℞. collectam detrahemus ex 100. erit reliquus numerus 100 − 1$\frac{3}{4}$℞. solus secundus, cuius $\frac{1}{3}$ est 33$\frac{1}{3}$ − $\frac{7}{12}$℞. cū qua tertius ac primus, nimirum 1℞. & 1$\frac{1}{2}$℞. hoc est 2$\frac{1}{2}$℞ facere debent 100 Fit autem ex 33$\frac{1}{3}$ − $\frac{7}{12}$℞. & 2$\frac{1}{2}$℞ hoc est, ex $\frac{1}{3}$. secundi, & summa tertij ac primi numerus 33$\frac{1}{3}$ + 1$\frac{11}{12}$℞ qui æqualis debet esse numero 100. Ablatis ergo vtrinque 33$\frac{1}{3}$. erit æqualitas inter 66$\frac{2}{3}$ & 1$\frac{11}{12}$℞ Diuisisque 66$\frac{2}{3}$. per 1$\frac{11}{12}$. fiet 1℞. 34$\frac{18}{23}$. siue $\frac{800}{23}$. tertius videlicet numerus, qui positus fuit 1℞ igitur secundus inuentus 100 − 1$\frac{3}{4}$℞. erit $\frac{900}{23}$. Et primus, quem inueniemus 1$\frac{1}{2}$℞ erit $\frac{1200}{23}$. Atque hi tres ænigmati proposito satisfaciunt.

CXXXIII. 133 *Datum numerum partiri in tres partes continue proportinales, ita vt numerus ex prima in tertiam productus ad productum ex prima in secundam habeat datam proportionem.*

SIT datus numerus 30. tribuendus in tres partes continue proportionales, ita vt numerus ex prima in tertiam productus habeat ad productum ex prima in secundam proportionem quadruplam. Ponatur secunda pars, siue media 1℞. ac propterea summa primæ ac tertiæ 30 − 1℞. Et quia ex media 1℞ in se fit 1ʒ. * fiet etiam 1ʒ. ex prima in tertiam. Cum ergo hic productus debeat habere quadruplam proportionem ad productum ex prima in secundam, producetur $\frac{1}{4}$ʒ. ex prima in secundam, nimirum in 1℞. Si igitur partiemur $\frac{1}{4}$ʒ. per 1℞. fiet Quotiens $\frac{1}{4}$℞ qui ductus in 1℞. numerum diuidentem, facit $\frac{1}{4}$ʒ. numerum diuisum: ac proinde prima pars erit $\frac{1}{4}$℞ quæ cum secunda faciet 1$\frac{1}{4}$℞. quæ summa ablata ex numero dato 30. relinquet tertiam partē 30 − 1$\frac{1}{4}$℞. Reliquum iam est, ex prima parte $\frac{1}{4}$℞. in tertiam modo inuentam 30 − 1$\frac{1}{4}$℞. gigni numerum 1ʒ. qui ex media parte 1℞ in se producitur. Fit autem ex $\frac{1}{4}$℞. in 30 − 1$\frac{1}{4}$℞. numerum 7$\frac{1}{2}$℞ − $\frac{5}{16}$ʒ. qui æqualis debet esse 1ʒ. Additis ergo $\frac{5}{16}$ʒ. vtrobique, erit æquatio inter 7$\frac{1}{2}$℞. & 1$\frac{5}{16}$ʒ Diuisisque 7$\frac{1}{2}$. per 1$\frac{5}{16}$. hoc est, per $\frac{21}{16}$. fiet 1℞. $\frac{40}{7}$. media, vel secunda pars, nimirum $\frac{40}{7}$. Ergo prima pars, quam inuenimus esse $\frac{1}{4}$℞. erit $\frac{10}{7}$. siue 1$\frac{3}{7}$. Et tertia, quæ fuit inuenta 30 − 1$\frac{1}{4}$℞ erit $\frac{160}{7}$. siue 22$\frac{6}{7}$. Atque hæ tres partes 1$\frac{3}{7}$. 5$\frac{5}{7}$. 22$\frac{6}{7}$. faciunt datum numerum 30. Et ex 1$\frac{3}{7}$. in 22$\frac{6}{7}$. hoc est, ex prima parte in tertiam, fit numerus 32$\frac{32}{49}$. qui quadruplus est numeri 8$\frac{8}{49}$. facti ex prima parte 1$\frac{3}{7}$ in secundam 5$\frac{5}{7}$. Esse autem tres partes continue proportionales, liquet: quippe cum idem numerus gignatur ex prima in tertiam, qui ex media in se, nimirum 32$\frac{32}{49}$.

ALITER institui poterit æquatio, postquam inuentæ fuerint partes $\frac{1}{4}$℞. 1℞ 30 − 1$\frac{1}{4}$℞ hoc scilicet modo quoniam ex prima in tertiam fieri debet 1ʒ. numerus videlicet æqualis ei, qui fit ex media in se. si diuidemus 1ʒ per primam, id est, per $\frac{1}{4}$℞. fiet Quotiens 4℞. qui ductus in $\frac{1}{4}$℞. producit 1ʒ. Ac proinde tertia pars erit 4℞ æqualis nimirum alteri parti tertiæ inuentæ 30 − 1$\frac{1}{4}$℞. Addiis ergo 1$\frac{1}{4}$℞. vtrobique, erit æqualitas inter 5$\frac{1}{4}$℞. & 30 Diuisisque 30 per 5$\frac{1}{4}$. fiet 1℞. 5$\frac{5}{7}$. vt prius.

* 20. sept.

Ænigma

Ænigma hoc soluemus quoque in ænigmate 171. sed alio exemplo proposito,

134 *Tres numeros inuenire, ita vt primus cum datis quotlibet vnitatibus secundi numerum faciet æqualem ei, qui secundo superest. Item secundus cum quotcunque vnitatibus tertij faciat alium numerum æqualem ei, qui tertio superest. Tertius denique, acceptis quotuis vnitatibus à primo, faciat numerum, qui ad reliquum primi habeat proportionem datam.* CXXXIIII

SVMAT primus à secundo 40. vnitates: secundus à tertio 56. vnitates: tertius denique à primo 72. vnitates, ita vt primus faciat numerum æqualem reliquo secundi: secundus item æqualem ei, qui tertio remanet: tertius autem numerum faciat quintuplum eius, qui primo superest. Ponatur primus 1℞. Ergo acceptis 40. à secundo, habebit 1℞ + 40. Ac tantundem tunc superesse debet secundo. Secundus ergo antequam daret 40. primo, habuit 1℞ + 80. qui postquam acceperit 56. à tertio, habebit 1℞ + 136. Ac tantundem superesse tunc debet tertio, ideoque antequam daret 56. secundo, habuit 1℞ + 192. qui si à primo accipiat 72. habebit 1℞ + 264. qui numerus debet esse quintuplus numeri 1℞ — 72. qui primo, postquam dederit 72. superest. Ergo numerus huius quintuplus 5℞ — 360. æqualis erit numero 1℞ + 264. quem tertius confecit. Additis autem 360. vtrinque, erit æquatio inter 5℞. & 1℞ + 624. Et ablata 1℞. vtrobique, inter 4℞ & 624. Diuisis ergo 624. per 4. fiet 1℞. 156. primus numerus. Ac proinde secundus, qui inuentus fuit 1℞ + 80. erit 236. Tertius vero, quem inuenimus esse 1℞ + 192. erit 348. Atque tres hi numeri problema efficiunt. vt probare potes.

## SCHOLIVM.

*IN similibus quæstionibus proponetur aliquando problema, quod dissolui nequit: id quod æquatio inuenta præclare monebit. Vt si in proposito problemate quis diceret, tertium acceptis 72. à primo, habere quoque numerum reliquo primi æqualem, fieret quæstio impossibilis. Nam tertius tunc haberet, vt dictum est, 1℞ + 264. qui æqualis nullo modo esse potest numero 1℞ — 72. qui primo superest.*

135 *Duos numeros in data proportione inuenire, vt vtroque per duos numeros datos multiplicato, producantur duo numeri facientes summam quamcunque datam.* CXXXV

INVENIENDI sint duo numeri in proportione quintupla, vt minore multiplicato per 8. & maiore per 5. procreentur duo numeri, quorum summa sit 100. Ponantur quæsiti numeri 1℞. & 5℞. in proportione quintupla. Ex 1℞. in 8. fiunt 8℞. & ex 5℞. in 5. fiunt 25℞. Summa productorum est 33℞. æqualis 100. Diuisis igitur 100. per 33. fiet 1℞. $\frac{100}{33}$. siue 3$\frac{1}{33}$. primus numerus. Secundus ergo erit $\frac{500}{33}$. siue 15.$\frac{5}{33}$. Ex 3$\frac{1}{33}$. hoc est, ex $\frac{100}{33}$. in 8. fiunt $\frac{800}{33}$ siue 24$\frac{8}{33}$. Et ex 15.$\frac{5}{33}$. id est, ex $\frac{500}{33}$. in 5. fiunt $\frac{2500}{33}$. siue 75$\frac{25}{33}$. Atque hi duo producti 24$\frac{8}{33}$. & 75$\frac{25}{33}$. faciunt summam datam 100.

136 *Duos numeros inuenire, quorum tam summa, quam excessus sit numerus quadratus.* CXXXVI

PONATVR summa duorum numerus quadratus, cuius latus sit vna radix, plus quotcunque vnitatibus; nimirum quadratus 1ℨ + 10℞ + 25. procreatur ex latere assumpto quocunque 1℞ + 5. Nam si minor numerus quæsitus statuatur $\frac{1}{2}$ℨ. erit maior $\frac{1}{2}$ℨ + 10℞ + 25. Horum enim summa 1ℨ + 10℞ + 25 quadratus numerus est, ex hypothesi. Reliquum est, vt eorundem numerorum $\frac{1}{2}$ℨ. & $\frac{1}{2}$ℨ + 10℞ + 25. excessus 10℞ + 25. sit etiam quadratus: hoc est, æqualis cuicunque quadrato maiori, quam 25 nimirum 100. Ablatis ergo 25. vtrobique, erit æquatio inter 10℞. & 75. Diuisisque 75. per 10. fiet 1℞. 7$\frac{1}{2}$. & 1ℨ. $\frac{225}{4}$. hoc est, 56$\frac{1}{4}$. Igitur minor numerus, qui fuit $\frac{1}{2}$ℨ. erit 28$\frac{1}{8}$. Maior autem, qui fuit $\frac{1}{2}$ℨ + 10℞ + 25. erit 128$\frac{1}{8}$. Nam summa horũ numerorum 156$\frac{2}{8}$. hoc est, $\frac{1250}{8}$. siue $\frac{625}{4}$. numerus quadratus est, cuius latus $\frac{25}{2}$. Item excessus eorundem 100. quadratus quoque est, cuius latus 10.

SI prædictum excessum 10℞ + 25. pones æqualem quadrato 36. vel alij cuicunque, qui non sit 100 inuenies aliam æstimationem vnius radicis, vt experiri potes.

137 *Dato quadrato, inuenire numerum, quo & ad datum quadratum adiecto, & ab eodem detracto, fiat numerus quadratus.* CXXXVII

SIT datus quadratus 100. qui per ænigma 90. vel eius scholium diuidatur in duos quadratos, quod per dictum scholium ita fiet. Latus quadrati dati, nimirum 10. ducatur in quemlibet numerum, vt in 5. Duplum huius numeri producti 100 diuidatur per quadratũ numeri 5. assumpti auctum vnitate, nimirum per 26. Quotientis enim $\frac{50}{13}$. quadratus $\frac{2500}{169}$. siue 14$\frac{134}{169}$. erit vnus quadratus. quo dempto ex 100. quadrato dato, reliquus fiet alter quadratus 85.$\frac{35}{169}$ qui duo quadrati efficiunt 100. Latera autem eorum $\frac{50}{13}$. & $\frac{120}{13}$. inter se multiplicata faciunt $\frac{6000}{169}$. siue 35$\frac{85}{169}$. cuius producti numeri duplum $\frac{12000}{169}$. siue 71$\frac{1}{169}$. erit numerus, qui quæritur. Is enim adiectus ad 100. facit 171$\frac{1}{169}$. siue $\frac{28900}{169}$. quadratum, cuius latus $\frac{170}{13}$. siue 13$\frac{1}{13}$. Idem numerus 71$\frac{1}{169}$. demptus ex eodem quadrato dato 100. relinquit 28$\frac{168}{169}$. siue $\frac{4900}{169}$. numerum quoque quadratum, cuius latus $\frac{70}{13}$. siue 5$\frac{5}{13}$.

RATIO huius operationis hæc est. Quando quadratus datus 100. diuiditur in duos quadratos, latus dati quadrati, & duo latera inuentorũ quadratorũ, si ad lineas cõtrahantur, [a] constituunt triangulum rectangulum; quandoquidem duo quadrata inuenta, ex eorum lateribus descripta, æqualia sunt dato quadrato. Igitur, vt in Lem- [a] 48. primi

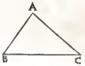
in Lemmate sequenti demonstrabimus, rectangulum bis comprehensum sub illis duobus lateribus, additum quadrato dato, efficit quadratum, cuius nimirum latus duobus illis lateribus æquale est: & ablatum ex eodem quadrato dato, reliquum facit quadratum, cuius videlicet latus est duorum illorum laterum differentia.

SI idem quadratus 100. distribuatur in duos quadratos 36. & 64. quorũ latera 6. & 8. inter se multiplicata faciunt 48. erit huius numeri duplum 96. is, quem quærimus. Hic enim adiectus ad 100. facit quadratum 196. cuius latus 14. & detractus ex 100. reliquum facit quadratum 4. cuius latus 2.

## LEMMA.

Lemma. *IN omni triangulo rectangulo, rectangulum bis sub duobus lateribus circa angulum rectum comprehensum, vna cum quadrato lateris recto angulo oppositi, æquale est quadrato, cuius latus ex duobus lateribus componitur, Idem vero rectangulum bis sub lateribus prædictis comprehensum, si ex eodem quadrato lateris recto angulo oppositi detrahatur, reliquum fiet quadratum, cuius latus differentia est prædictorum duorum laterum.*

*SIT triangulum rectangulum ABC. Dico rectangulum bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, æquale esse quadrato cuius latus æquale sit duobus lateribus AB, AC, simul. Et si idem rectangulum bis detrahatur ex quadrato rectæ BC, relinqui quadratum, cuius latus æquale sit differentiæ inter AB, AC. Quoniam enim si concipiatur linea vna ex AB, AC, composita,* [a] *rectangulum sub AB, AC, bis comprehensum, vna cum quadratis ex AB, AC, æquale est quadrato rectæ ex AB, AC, compositæ:* [b] *Sunt autem quadrata ex AB, AC, quadrato ex BC, æqualia; erit quoque rectangulum bis comprehensum sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, æquale quadrato rectæ ex AB, AC, compositæ, quod est primum.*




[a] 4. secũdi.
[b] 47. prim.
[c] Lemma 39. decimi.

*DEINDE* [c] *quia duo quadrata ex AB, AC, (hoc est quadratum ex BC,) maiora sunt rectangulo bis sub AB. AC, comprehenso, quadrato eius lineæ, quæ differentia est inter AB, AC, manifestum est, si illud rectangulum bis sub AB, AC, comprehensum demátur ex quadratis rectarum AB, AC, hoc est, ex quadrato rectæ BC, remanere quadratum, cuius latus æquale est differentiæ inter AB, AC, quod est secundum.*

CXXXVII 138 *Numerum inuenire, qui in quemuis datum numerum ductus, faciat numerum, qui cum quouis alio dato numero numerum efficiat æqualem ei, qui fit ex quæsito numero in quemuis alium datum numerum, maiorem tamen priore dato, multiplicato.*

SIT inueniendus numerus, qui ductus in 7. faciat numerum, qui adiectus ad 60. faciat summam æqualem numero, qui fit ex inuento numero in 8. multiplicato. Ponatur numerus quæsitus 1℞. Ex 1℞. in 7. fit numerus 7℞. quo addito ad 60 fit numerus 7℞ + 60. æqualis numero 8℞. qui fit ex 1℞. in 8. Ablatis ergo 7℞. vtrinque, erit æquatio inter 60 & 1℞. Diuisisque 60. per 1. fiet 1℞. 60. numerus quæsitus. Hic enim ductus in 7. facit 420. additisque 60. fit numerus 480. quem nimirum facit numerus inuentus 60. in 8. ductus.

CXXXIX 139 *Datum numerum in duas partes diuidere, & insuper quadratum inuenire, qui cum vtraque parte seorsum quadratum efficiat.*

SIT datus numerus 65. secandus in duas partes, & insuper quadratus inueniendus, cum quo qualibet illarum partium efficiat quadratũ. Ponãtur duo numeri quicunq; quorũ quilibet compositus sit ex vna radice, & aliquot vnitatibus, nimirum 1℞ + 3. & 1℞ + 5. Quadrati horũ sunt 1ʒ + 6℞ + 9. & 1ʒ + 10℞ + 25. Igitur si numerus 6℞ + 9. addatur ad 1ʒ. qui numerus quadratus est fit quadratus 1ʒ + 6℞ + 9. Et si numerus 10℞ + 25. addatur ad eundem 1ʒ fit quadratus 1ʒ + 10℞ + 25. Ergo si minor pars numeri dati ponatur 6℞ + 9 & maior 10℞ + 25. satisfactum erit problemati, si hæ partes conficiant datum numerum 65. Faciunt autem summam 16℞ + 34. quæ æqualis debet esset 65. Demptis 34. vtrobique, manebit æqualitas inter 16℞. & 31. Diuisis igitur 31. per 16, fiet 1℞ $1\frac{15}{16}$. siue $\frac{31}{16}$. cuius quadratus $\frac{961}{256}$. siue $3\frac{193}{256}$. erit is, qui quæritur. Minor autem pars numeri dati, quam posuimus 6℞ + 9. erit $\frac{330}{16}$ siue $20.\frac{5}{8}$. Maior vero, quæ posita fuit 10℞ + 25. erit $\frac{710}{16}$. siue $44\frac{3}{8}$. quæ duæ partes simul efficiunt datum numerum 65. Et prima addita ad quadratum inuentum $\frac{961}{256}$. facit quadratum $\frac{6241}{256}$. cuius latus $\frac{79}{16}$. Secunda autem cum eodem quadrato $\frac{961}{256}$. facit quadratum $\frac{12321}{256}$. cuius latus $\frac{111}{16}$.

## SCHOLIVM.

*HOC ænigma plures solutiones admittit, pro varietate numerorum in principio assumptorum. Nam si numeri ponantur 1℞ + 1. & 1℞ + 2. erunt eorũ quadrati 1ʒ + 2℞ + 1. & 1ʒ + 4℞ + 4. Atque si minor pars numeri dati 65. ponatur numerus 2℞ + 1. maior vero 4℞ + 4. satisfactum erit problemati, cũ vterque numerus cum 1ʒ. faciat quadratum. Faciunt idem duo numeri summam 6℞ + 5 quæ æqualis esse debet 65. Ablatis igitur 5. vtrobique, remanebit æqualitas inter 6℞. & 60. Diuisisque 60. per 6. fiet 1℞. 10. cuius quadratus 100. est is, qui quæritur, positusque fuit 1ʒ. Minor vero pars numeri dati 6., quam posuimus 2℞ + 1. erit 21. Maior autem posita 4℞ + 4. erit 44. quæ duæ partes faciunt 65. Et prima addita quadrato inuento 100. facit quadratum 121 cuius latus 11. Secunda aũt cum eodem quadrato 100. facit quadratum 144. cuius latus 12.*

*Atque in hunc modum diuidi poterit datus numerus in alias, atque alias partes, si alij atque alij numeri assumantur compositi ex 1℞. & aliquot vnitatibus.*

140 *Datum numerum in duas partes distribuere, & insuper quadratum inuenire, à quo si duæ partes inuentæ subducantur, reliqui fiant duo quadrati.* CLX.

SIT diuidendus numerus 65. in duas partes, & inueniendus quadratus, à quo si inuentæ duæ partes demantur, reliqui fiant duo numeri quadrati. Ponantur duo numeri vtcunque, vnus compositus ex vna radice & quotlibet vnitatibus, alter vero ex vna radice minus totidem vnitatibus, nimirum 1℞ + 2. & 1℞ — 2. Quadrati horum erunt 1ȝ + 4℞ + 4. & 1ȝ — 4℞ + 4. Ponatur ergo quadratus, qui quæritur, 1ȝ + 4℞ + 4. à quo si auferatur numerus 4℞ + 4. relinquetur quadratus 1ȝ. Quod si posterior quadratus à priore subducatur remanebunt 8℞. Ac vicissim si 8℞. detrahantur ex eodem priori quadrato 1ȝ + 4℞ + 4. relinquetur posterior quadratus 1ȝ — 4℞ + 4. Ergo si minor pars numeri diuidendi ponatur 4℞ + 4. Et maior 8℞. satisfactum erit ænigmati; quippe cum minor dempta ex quadrato 1ȝ + 4℞ + 4. relinquat quadratum 1ȝ. Et maior ex eodem quadrato subducta relinquat quadratum 1ȝ — 4℞ + 4. Reliquum iam est, vt hæ duæ partes 4℞ + 4. & 8℞. faciant numerum datum 65 faciunt autem summam 12℞ + 4. æqualem 65. Ablatis ergo 4. vtrinque, erit æquatio inter 12℞. & 61. Diuisisque 61. per 12. fiet 1℞. $\frac{61}{12}$. Ac propterea quadratus quæsitus, quem posuimus 1ȝ + 4℞ + 4. erit $\frac{7225}{144}$. cuius latus $\frac{85}{12}$. Minor autem pars numeri diuidendi posita 4℞ + 4. erit $\frac{292}{12}$. siue $\frac{3504}{144}$. Maior autem posita 8℞. erit $\frac{488}{12}$. vel $\frac{5856}{144}$. Prior enim ex inuento quadrato $\frac{7225}{144}$. subducta relinquit quadratum $\frac{3721}{144}$. cuius latus $\frac{61}{12}$. Posterior autem ex eodem quadrato $\frac{7225}{144}$. detracta reliquum facit quadratum $\frac{1369}{144}$. cuius latus $\frac{37}{12}$.

HOC etiam ænigma plures admittit solutiones, prout videlicet in principio alij atque alij numeri assumpti fuerint pro numeris 1℞ + 2. & 1℞ — 2. &c.

141 *Datum numerum in duas partes diuidere, ita vt earum cubi faciant summam datam quamcunque, quæ maior sit quarta parte cubi ex dato numero descripti.* CXLI.

DATVS numerus 10. diuidendus sit in duas partes, quarum cubi faciant 370. qui numerus maior est, quam 250. quarta pars cubi ex 10. generati. Ponatur prima pars numerus compositus ex 1℞. & semisse dati, numeri, nimirum 1℞ + 5. Secunda pars, semissis eiusdem numeri dati, minus 1℞, nimirum 5 — 1℞. Ita enim duæ hæ partes numerum datum 10. conficient. Cubi earum sunt 1ℭ + 15ȝ + 75℞ + 125. & 125 — 75℞ + 15ȝ — 1ℭ. Summa eorũ 30ȝ + 250. nam + 1ℭ, & — 1ℭ. Item + 75℞. & — 75℞. se mutuo interimunt: & ex 15ȝ. & 15ȝ. fiunt 30ȝ. atque 125. 125. faciunt 250. Hæc ergo summa 30ȝ + 250. æqualis esse debet 370. Ablatis 250. vtrinque, remanebit æqualitas inter 30ȝ. & 120. Diuisis igitur 120. per 30. fiet 1ȝ. 4. & 1℞ 2. Prima igitur pars posita 1℞ + 5. erit 7. Secunda vero, quam posuimus 5 — 1℞. erit 3. Cubi harum partium 7 & 3 sunt 343. & 27 efficiuntq. 370.

SI eodem numero 10. dato, summa cuborum proponatur 400. inueniemus æquationem inter 30ȝ + 250. & 400. Ablatisque 250. vtrinque, inter 30ȝ. & 150. Diuisis igitur 150. per 30. fiet 1ȝ. 5. & 1℞. √ȝ5. Ergo prima pars posita 1℞ + 5. erit √ȝ5 + 5. Secunda vero posita 5 — 1℞. erit 5 — √ȝ5. quæ simul faciunt 10. Cubi autem harum partium (reductis, quæ reducenda sunt) sunt 200 + √ȝ32000. & 200 — √ȝ32000. quorum summa est 400. cum + √ȝ32000. & — √ȝ32000. se mutuo interimant.

## SCHOLIVM.

*SINE Algebra idem ænigma soluetur hoc pacto. Datus numerus 20. secandus sit in duas partes, quarum cubi facere debeant summam 2960. quæ maior est, quam 2000 quarta pars cubi ex 20 generati. Dematur $\frac{1}{4}$. cubi ex dato numero 20. descripti, nimirum 2000. ex 2960. summa proposita. Et reliquus numerus 960. diuidatur per 60. triplum dati numeri 20. Quotientis namque 16. radix quadrata 4. addita, & ablata ex 10. semisse dati numeri 20. dabit partes quæsitas 14. & 6. quæ simul faciunt datum numerum 20. & earum cubi 2744. & 216. faciunt 2960.*

*HOC etiam ænigma in ænigmate 1. sequentis capitis soluemus per æquationem compositam, in qua scilicet tres numeri occurrunt, quorum vnus alijs duobus est æqualis.*

142 *Datum numerum in duos cubos distribuere, quorum laterum summa data est: dummodo quarta pars cubi huius summæ minor sit dato numero.* CXLII.

HOC problema ab antecedenti non differt. Nihil enim aliud hic iubemur, nisi summam laterum datam distribuere in duas partes, quarum cubi datum efficiant numerum, qui maior sit quarta parte cubi ex summa laterum data procreati. Vt si datus numerus 2960. diuidendus sit in duos cubos, quorum latera faciant 20. Diuidendus erit numerus 20. in duas partes, quarum cubi faciant 2960. vt in præcedenti problemate factum est. Nam ita numerus 2960. diuisus erit in duos cubos 2744. & 216. quorum latera 14. & 6. datam summam 20. conficiunt.

SIC etiam si datus numerus 400. diuidendus sit in duos cubos, quorum latera faciant 10. inuenientur duo cubi, (reductis, quæ reducenda sunt) 200 + √ȝ32000. & 200 — √ȝ32000. quorum latera sunt √ȝ5 + 5. & 5 — √ȝ5. si nimirum summa laterum 10. diuidatur in duas partes, vt in præcedenti ænigmate, vel scholio eiusdem factum est. ita vt earum cubi efficiant 400.

143 *Numerum inuenire, cuius quadratus, vel multiplex quadrati datus constituat datam partem, vel partes cubi ex eodem inuento numero procreati.* CXLIII.

SIT primũ inueniendus numerus, cuius quadratus cõstituat $\frac{2}{3}$. cubi ex inuento numero procreati. Ponatur quæ-

quæsitus numerus 1℞. cuius quadratus est 1ʒ. & cubus 1ℭ. Vt ergo 1ʒ. constituat $\frac{1}{9}$. numeri 1ℭ. necesse est, æqualitatem esse inter 1ʒ. & $\frac{1}{9}$ℭ. Diuisa igitur 1. per $\frac{1}{9}$. fiet 1℞. 9. numerus quæsitus (quod numeri Cossici sint collaterales.) Huius enim quadratus 81. nonam partem constituit eiusdem cubi 729.

SIT deinde inueniendus numerus, cuius quadratus constituat $\frac{5}{9}$. cubi. Iisdem positis, erit æquatio inter $\frac{5}{9}$ℭ. & 1ʒ. Diuisa ergo 1. per $\frac{5}{9}$. fiet 1℞. $\frac{9}{5}$. vel $1\frac{4}{5}$. numerus quæsitus. Huius enim quadratus $\frac{81}{25}$. constituit $\frac{5}{9}$. cubi $\frac{729}{125}$.

RVRSVS sit inueniendus numerus, cuius quadrati quincuplum constituat $\frac{1}{7}$ cubi ipsius. Ponatur numerus quæsitus 1℞ cuius quadratus 1ʒ. & cubus 1ℭ. Ergo æqualitas erit inter 5ʒ. & $\frac{1}{7}$ℭ. Diuisis ergo 5. per $\frac{1}{7}$. fiet 1℞. 35. numerus quæsitus. Huius enim quadratus est 1225. & eius quincuplum 6125. constituit $\frac{1}{7}$. cubi 42875 ex 35. procreati.

POSTREMO inueniendus sit numerus, cuius quadrati quincuplum constituat $\frac{9}{10}$. cubi ipsius. Positis iisdem, erit æquatio inter 5ʒ. & $\frac{9}{10}$ℭ. Diuisis igitur 5. per $\frac{9}{10}$. fiet 1℞. $\frac{50}{9}$. hoc est, $5\frac{5}{9}$. numerus quæsitus. Eius enim quadratus est $\frac{2500}{81}$. cuius quintuplum $\frac{12500}{81}$. constituit $\frac{9}{10}$ cubi $\frac{125000}{729}$.

CXLIIII 144 *Numerum inuenire, qui sui cubi constituat datam partem, vel partes.*

SIT primum inueniendus numerus, qui constituat $\frac{1}{12}$. sui cubi. Ponatur quæsitus numerus 1℞. cuius cubus 1ℭ. Est ergo æqualitas inter 1℞. & $\frac{1}{12}$ℭ Diuisaque 1. per $\frac{1}{12}$. fiet 1ʒ. 12. (quod inter ℭ. & ℞. interiecta sit denominatio ʒ.) & eius radix quadrata, nimirum √ʒ 12. erit pretium 1℞. Numerus ergo quæsitus est √ʒ 12. Hic enim constituit $\frac{1}{12}$. sui cubi √ʒ 1728.

DEINDE inueniendus sit numerus, qui constituat $\frac{4}{9}$. sui cubi. Positis iisdem, fiet æquatio inter 1℞. & $\frac{4}{9}$ℭ Diuisa igitur 1 per $\frac{4}{9}$ fiet 1ʒ. $\frac{9}{4}$. & 1℞ $\frac{3}{2}$. numerus quæsitus. Eius enim cubus est $\frac{27}{8}$. cuius quatuor nonas continet inuentus numerus $\frac{3}{2}$.

CXLV. 145 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt minor in quadratum maioris ductus producat numerum datum.*

SINT inueniendi duo numeri in proportione sesquiquinta, ita vt minore in quadratum maioris ducto, gignatur numerus 4860. Ponantur numeri quæsiti 5℞. & 6℞. in proportione sesquiquinta. Minore 5℞. ducto in 36ʒ. quadratum maioris 6℞. fit numerus 180ℭ æqualis 4860. Diuisis ergo 4860. per 180. fiet 1ℭ. 27. cuius radix cubica est 3. quia inter characteres ℭ. & N. duo medij sunt ʒ. & ℞. Ergo minor numerus positus 5℞. erit 15. & maior positus 6℞. erit 18. Atque ex minore 15. in 324. quadratum maioris 18. fit numerus 4860.

SINT rursus in eadem proportione sexquiquinta inueniendi duo numeri, ita vt minor ductus in quadratum maioris producat 1. Positis iisdem, inuenietur æqualitas inter 180ℭ. & 1. Diuisa ergo 1. per 180. fiet 1ℭ. $\frac{1}{180}$. & radix cubica √ℭ $\frac{1}{180}$. Ergo minor numerus positus 5℞ faciet √ℭ $\frac{125}{180}$. hoc est, √ℭ $\frac{25}{36}$. Maior aũt positus 6℞. erit √ℭ $\frac{216}{180}$. siue √ℭ $\frac{6}{5}$. Atque ex minore √ℭ $\frac{25}{36}$. in √ℭ $\frac{36}{25}$. quadratũ maioris √ℭ $\frac{6}{5}$. producitur √ℭ $\frac{900}{900}$. hoc est, 1. Quando enim numerator fractionis æqualis est denominatori, fractio illa vnitati æquiualet.

CXLVI 146 *Numerum inuenire, qui inter duos sit medius, superetque minorem numero dato, & superetur à maiore numero alio dato quolibet, & duo extremi efficiant summam datam quamcunque.*

HOC ænigma simile est ænigmati 51. & 52. sed aliter propositum, atque aliter dissolutum. Inueniendus enim sit numerus medius inter duos summam efficientes 100. ita vt minorem superet numero 15. & à maiore superetur numero 9. Quoniam maior ponitur superare medium quæsitum, numero 9 Et hic medius minorem, numero 15. liquido constat maiorem superare minorem numero 24. Si ergo data summa 100. diuidatur in duas partes, quarum excessus 24 & ad minorem addantur 15. fiet medius quæsitus. Ponatur ergo minor pars 1℞. & maior 100 — 1℞ quæ illam superare debet numero 24. Detracta 1℞. ex 100 — 1℞. reliquus fit numerus 100 — 2℞. æqualis 24. Additis ergo 2℞. vtrinque, fiet æqualitas inter 100. & 24 + 2℞. Et ablatis 24. vtrobique, inter 76. & 2℞ Diuisis igitur 76. per 2. fiet 1℞. 38. minor pars, ideoque maior erit 62. Et additis 15. ad minorem 38. fiet medius quæsitus 53. Hic enim superat minorem partem numero 15. & à maiore superatur numero 9.

CXLVII 147 *Datum numerum in quotlibet partes distribuere, ita vt vnaquæque ad sequentem habeat datam proportionem.*

SIT datus numerus 10000. diuidendus in sex partes, ita vt prima ad secundam habeat proportionem æqualitatis. secunda ad tertiam duplam: tertia ad quartam triplam: quarta ad quintam proportionem æqualitatis: & quinta ad sextam proportionem quoq; æqualitatis. Ponatur prima pars 1℞. secunda 1℞ quoque. Tertia $\frac{1}{2}$℞ quarta, quinta, & sexta $\frac{1}{6}$℞. quæ omnes faciunt 3℞. æquales

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| prima | 1℞ | | 3333 | $\frac{1}{3}$ |
| secunda | 1℞ | | 3333 | $\frac{1}{3}$ |
| tertia | $\frac{1}{2}$℞ | id est | 1666 | $\frac{2}{3}$ |
| quarta | $\frac{1}{6}$℞ | | 555 | $\frac{5}{9}$ |
| quinta | $\frac{1}{6}$℞ | | 555 | $\frac{5}{9}$ |
| sexta | $\frac{1}{6}$℞ | | 555 | $\frac{5}{9}$ |

10000. Diuisis igitur 10000. per 3. fiet 1℞. $3333\frac{1}{3}$. ac propterea aliæ partes numeros facient, vt in apposita formula vides. Omnes enim hæ partes in vnam summam collectæ faciunt 10000.

148 Numerum

148 *Numerum inuenire, cuius partes datæ æquales sint parti aliquota datæ eiusdem, auctæ numero dato.* CXLVIII.

SIT inueniendus numerus, cuius $\frac{2}{3}$. æquales sint eius semissi auctæ septenario. Ponatur numerus quæsitus 1℞. Ergo $\frac{2}{3}$ ℞. æquales erunt $\frac{1}{2}$ ℞ + 7. Ablata $\frac{1}{2}$ ℞ vtrobique, remanebit æqualitas inter $\frac{1}{6}$ ℞. & 7. Diuisis ergo 7. per $\frac{1}{6}$. fiet 1℞ 42. numerus quæsitus. Nam eius $\frac{2}{3}$. sunt 28. qui numerus æqualis est semissi numeri 42. id est, numero 21. aucto septenario.

149 *Duos numeros inuenire, quorum summa data sit, ita vt priore per datum numerum diuisa, fiat Quotiens, qui cum data parte posterioris, efficiat numerum datum.* CXLIX.

SINT inueniendi duo numeri, quorum summa 40. ita vt priore diuiso per 5. fiat Quotiens, qui cum $\frac{1}{8}$. posterioris numeri faciat 6. Ponatur prior numerus 1℞. & posterior 40 — 1℞. Diuisa 1℞ per 5 fit Quotiens $\frac{1\text{℞}}{5}$. Et pars octaua numeri 40 — 1℞. est $\frac{40-1\text{℞}}{8}$. quæ cum illo Quotiente facit $\frac{8\text{℞}+200-5\text{℞}}{40}$. hoc est, $\frac{3\text{℞}+200}{40}$. qui numerus æqualis debet esse 6. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad æquationem inter 3℞ + 200. & 240. Ablatisque 200. vtrinque, erit æquatio inter 3℞. & 40. Diuisisque 40. per 3. fiet 1℞ 13 $\frac{1}{3}$. prior numerus quæsitus. ideoque posterior numerus positus 40 — 1℞. erit 26 $\frac{2}{3}$. Nam diuiso priore numero 13 $\frac{1}{3}$. per 5. fit Quotiens 2 $\frac{2}{3}$. qui cum octaua parte posterioris numeri 26 $\frac{2}{3}$. id est, cum 3 $\frac{1}{3}$. facit 6.

IN hoc exemplo proposito vides, priorem numerum inuentum esse minorem. In alio exemplo poterit esse maior. Vt si inueniendi sint duo numeri, quorum summa 20. ita vt priore diuiso per 3. Quotiens fiat, qui cum $\frac{1}{8}$. posterioris numeri faciat 5. Ponatur prior numerus 1℞. & posterior 20 — 1℞. Diuisa 1℞ per 3. fit Quotiens $\frac{1\text{℞}}{3}$. & pars octaua numeri 20 — 1℞. est $\frac{20-1\text{℞}}{8}$. quæ cum illo Quotiente facit $\frac{8\text{℞}+60-3\text{℞}}{24}$. hoc est, $\frac{5\text{℞}+60}{24}$. qui numerus æqualis debet esse 5. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad æquationem inter 5℞. & 60. Diuisisq; 60. per 5. fiet 1℞. 12. prior numerus quæsitus, ideoque posterior 20 — 1℞. erit 8. Diuiso enim priore 12. per 3. fit Quotiens 4. qui cum 1. id est, cum parte octaua posterioris numeri 8. facit 5. Estque prior numerus maior posteriore.

## SCHOLIVM.

*ADVERTE tamen, in simili ænigmate proponi aliquando quæstionem, quæ nulla ratione solui possit, nisi admittantur numeri Nihilo minores. Sint enim inueniendi duo numeri, quorum summa 40. ita vt priore diuiso per 5. fiat Quotiens, qui cum $\frac{1}{10}$. posterioris faciat 100. Ponatur prior numerus 1℞. & posterior 40 — 1℞. Diuisa 1℞. per 5. fit Quotiens $\frac{1\text{℞}}{5}$. & pars decima numeri 40 — 1℞. est $\frac{40-1\text{℞}}{10}$. quæ cum Quotiente illo facit $\frac{10\text{℞}+200-5\text{℞}}{50}$. hoc est, $\frac{5\text{℞}+200}{50}$. qui numerus æqualis esse debet 100. Atque hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad æquationem inter 5℞ + 200. & 5000: Ablatisque 200. vtrinque, erit æquatio inter 5℞. & 4800. Diuisisque 4800 per 5. fiet 1℞. 960. prior numerus quæsitus, qui maior est summa proposita 40. quod est ineptum. Sed concedamus hoc absurdum, & progrediamur vlterius. Secundus numerus positus 40 — 1℞. erit 40 — 960. Hic enim cum 960. facit 40. summam propositam. Numerus autem 40 — 960. æqualis est huic — 920. Nam si demantur 960. ex 40. remanent — 920. vt hæc formula demonstrat: atque hic numerus — 920. additus ad 960. priorem numerum conficit iterum summam propositam 40. vt in hac altera formula apparet. Iam si prior numerus 960. diuidatur per 5. fit Quotiens 192. qui cum $\frac{1}{10}$ numeri — 920. id est, cum — 92. facit 100. numerum propositum, vt in tertia formula videre licet.*

$$\begin{array}{r} +\ 40 \\ +\ 960 \\ \hline -\ 920 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\ 920 \\ +\ 960 \\ \hline +\ 40 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +\ 192 \\ -\ 92 \\ \hline +\ 100 \end{array}$$

*LIBVIT hoc exemplum pluribus verbis explicare, vt videas vim numerorum infra Nihil & Algorithmi signorum + & —, quamuis inuenta 1℞. numero 960. statim dicere posses, quæstionem esse impossibilem, quippe cum numerus 960. non possit esse pars summæ propositæ 40.*

150 *Numerum inuenire, qui cum data eius parte datum numerum quemcunque superet tanto numero, quanto idem datus numerus, vel alius datus ipsummet numerum inuentum superat.* CL.

SIT primum inueniendus numerus, qui cum eius $\frac{1}{4}$. superet 100. eodem numero, quo 100. superant inuentum numerũ. Ponatur numerus quæsitus 1℞. qui cũ $\frac{1}{4}$ faciet 1 $\frac{1}{4}$ ℞. quæ summa superare debet 100. eodem numero, quo 100. superãt 1℞. Ergo demptis 100. ex 1 $\frac{1}{4}$ ℞. & 1℞. ex 100. remanebunt excessus æquales, hoc est, erit æquatio inter 1 $\frac{1}{4}$ ℞ — 100. & 100 — 1℞. Et addita 1℞. vtrobique, inter 2 $\frac{1}{4}$ ℞ — 100. & 100. Rursumque additis 100. vtrinque, inter 2 $\frac{1}{4}$ ℞. & 200. Diuisis ergo 200 per 2 $\frac{1}{4}$ fiet 1℞. 88 $\frac{8}{9}$. numerus quæsitus. Nam si ad ipsum addatur eius $\frac{1}{4}$. nimirum numerus 22 $\frac{2}{9}$. fiet summa 111 $\frac{1}{9}$. quæ superat 100. numero 11 $\frac{1}{9}$. quo videlicet 100. inuentum numerum 88 $\frac{8}{9}$. superant.

SIT deinde numerus inueniendus, qui cum $\frac{2}{3}$. sui ipsius superet 100. eodem numero, quo 140. ipsum numerum inuentum superant. Ponatur numerus quæsitus 1℞. Ergo æquatio erit inter 1 $\frac{2}{3}$ ℞ — 100. & 140 — 1℞. Et addita 1℞. vtrinque, inter 2 $\frac{2}{3}$ ℞ — 100. & 140. Additisque rursum 100. vtrobique, inter 2 $\frac{2}{3}$ ℞ & 240. Diuisis ergo 240. per 2 $\frac{2}{3}$. fiet 1℞. 90. numerus quæsitus. Nam si addantur eius $\frac{2}{3}$. nimirum 60. fiet summa 150. quæ superant 100. numero 50. quo videlicet 140. numerum inuentum 90. superant.

SIT denique inueniendus numerus, qui cum $\frac{1}{2}$. ipsius faciat summam, quæ eodem numero superet 40. quo numerus 10. inuentum numerum superat, Ponatur numerus quæsitus 1℞. Ergo æquatio erit inter $1\frac{1}{2}$℞ —40. & 10 —1℞. Additaque 1℞ vtrobique, inter $2\frac{1}{2}$℞ —40. & 10. Additisque rursum 40. vtrinque, inter $2\frac{1}{2}$℞ & 50. Diuisis ergo 50. per $2\frac{1}{2}$. fiet 1℞. 20 quæsitus numerus, qui cum ipsius $\frac{1}{2}$. facit summam 30. quæ numerum 40. superat numero —10. vt patet in hac formula, vbi 40. subducta sunt à 30. Atque eodem numero —10. superat numerus 10. inueniendum numerum 20. vt constat, si 20. ex 10. subtrahantur, vt in hac altera formula cernis. Vbi rursum vides mirabilem vim Algorithmi signorum + & —. quamuis dici possit, hoc exemplum non posse expediri, propterea quod numerus 20. inuentus cum $\frac{1}{2}$. id est, cum 10. facit minorem summam, quam 40.

$$\begin{array}{r} +\ 30 \\ +\ 40 \\ \hline -\ 10 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\ 10 \\ +\ 20 \\ \hline -\ 10 \end{array}$$

CLI. 151 *Numerum inuenire, à quo si subtrahatur data pars, vel partes, relinquatur numerus tanto minor, quam datus numerus, quanto ipse inuentus numerus eundem datum numerum superat.*

SIT inueniendus numerus, ita vt subtracta $\frac{1}{5}$. ipsius, reliquus sit numerus tanto minor quam 100. quanto ipse numerus inuentus maior est, quam 100. Ponatur quæsitus numerus 1℞ à quo subtracta $\frac{1}{5}$. reliquæ fiunt $\frac{4}{5}$℞. quæ detractæ ex 100. relinquunt 100 — $\frac{4}{5}$℞. Et si ex 1℞. demantur 100. relinquuntur 1℞ —100. Et quia excessus ponuntur æquales, erit æquatio inter 100 — $\frac{4}{5}$℞. & 1℞ — 100. Additisque $\frac{4}{5}$℞. vtrinque, inter 100. & $1\frac{4}{5}$℞ —100. Et rursus additis 100, vtrinque, inter 200. & $1\frac{4}{5}$℞. Diuisis ergo 200. per $1\frac{4}{5}$. id est, per $\frac{9}{5}$. fiet 1℞ $111\frac{1}{9}$ numerus, qui petitur. Cuius $\frac{1}{5}$ facit $22\frac{2}{9}$. id est, $\frac{200}{9}$. qui numerus demptus ex $111\frac{1}{9}$. id est, ex $\frac{1000}{9}$. relinquit $\frac{800}{9}$. hoc est, $88\frac{8}{9}$. qui numerus superatur à 100. numero $11\frac{1}{9}$. quo videlicet inuentus numerus $111\frac{1}{9}$. numerum 100 superat.

SIT præterea inueniendus numerus, ita vt subtractis $\frac{2}{5}$. ipsius reliquus numerus tanto minor sit, quam 100. quanto ipse numerus inuentus maior est, quam 100. Ponatur quæsitus numerus 1℞. Demptis $\frac{2}{5}$. remanent $\frac{3}{5}$℞ Eritque æquatio inter 100 — $\frac{3}{5}$℞ & 1℞ —100. Additisque $\frac{3}{5}$℞. vtrobique, inter 100. & $1\frac{3}{5}$℞ —100. Et rursum additis 100. vtrinque, inter 200. & $1\frac{3}{5}$℞. Diuisis igitur 200. per $1\frac{3}{5}$. fiet 1℞. 125. numerus quæsitus. Nam si ex eo tollantur $\frac{2}{5}$. ipsius, nimirum 50. remanent 75. qui à 100. superantur numero 25. quo videlicet inuentus numerus 125. superat 100.

CLII. 152 *Numerum inuenire, qui in se multiplicatus, & productus in datum numerum, procreet numerum, à quo si alius datus numerus subtrahatur, reliquus fiat quicunque numerus datus.*

INVENIENDVS sit numerus, qui in se ductus, & productus in 10. faciat numerum, à quo si demantur 100. remaneat numerus 300. Ponatur quæsitus numerus 1℞ quo ducto in se, fit 1ʒ. & hoc ducto in 10. fit numerus 10ʒ. à quo si demantur 100. remanet numerus 10ʒ — 100. qui æqualis debet esse numero 300. Additis 100. vtrobique, erit æquatio inter 10ʒ. & 400. Diuisisque 400. per 10. fiet 1ʒ. 40. Ergo √ʒ 40. est numerus, quem quærimus. Nam in se multiplicatus facit 40. Et ex 40. in 10. fit numerus 400. à quo si subtrahantur 100. remanent 300.

CLIII. 153 *Progressionem Arithmeticam constituere, cuius primus, & vltimus terminus dati sint, & summa progressionis data, quando id fieri potest.*

SIT primus terminus 5 & vltimus 10. summa vero omnium terminorum 105. Hic duo oportet inuestigare, numerum videlicet terminorum, & differentiam progressionis. Ponatur numerus terminorum 1℞. Et quia summa ex primo, & vltimo termino collecta multiplicata per numerum terminorum producit duplum summæ progressionis, vt in Arithmetica practica, nimirum in prima regula progressionum Arithmeticarum docuimus: si summa ex primo, & vltimo termino collecta, nimirum 15. ducamus in numerum terminorum, id est, in 1℞. faciemus 15℞. cuius semissis $7\frac{1}{2}$℞. est summa progressionis, æqualis summæ datæ 105. Diuisis igitur 105. per $7\frac{1}{2}$. fiet 1℞. 14. numerus terminorum, quem posuimus esse 1℞.

IAM intermedij 12. termini debent facere summam 90. nimirum 105. dempto primo termino 5. & vltimo 10. Ponatur differentia progressionis 1℞. eruntque 12. termini hi sequentes.

5 + 1℞ 5 + 2℞. 5 + 3℞. 5 + 4℞. 5 + 5℞. 5 + 6℞. 5 + 7℞. 5 + 8℞. 5 + 9℞. 5 + 10℞. 5 + 11℞. 5 + 12℞.

qui omnes summam faciunt 60 + 78℞. æqualem numero 90. Demptis ergo 60. vtrinque, erit æqualitas inter 78℞. & 30. Diuisisque 30 per 78. fiet 1℞. $\frac{5}{13}$. differentia progressionis. Est ergo hæc progressio.

5. $5\frac{5}{13}$. $5\frac{10}{13}$. $6\frac{2}{13}$. $6\frac{7}{13}$. $6\frac{12}{13}$. $7\frac{4}{13}$. $7\frac{9}{13}$. $8\frac{1}{13}$. $8\frac{6}{13}$. $8\frac{11}{13}$. $9\frac{3}{13}$. $9\frac{8}{13}$. 10.
quippe cum constituat 14 terminos, quorum summa est 105.

QVANDO in priori operatione reperitur numerus terminorũ nõ integer, quæstio erit impossibilis quia dari

dari non poteſt talis progreſſus, in qua primus atque vltimus terminus ſint illi, qui dati ſunt, & ſumma progreſſionis illa, quæ proponitur. Vt ſi in eodem exemplo ſumma progreſſionis daretur 100. & primus terminus 5. atque vltimus 10. inueniremus æquationem inter $\frac{15}{2}$ ℞. & 100: Diuiſiſque 100. per $\frac{15}{2}$. fieret 1℞. 13 $\frac{1}{3}$. numerus terminorum. quod fieri nequit. Nam nulla eſt progreſſio Arithmetica in rerum natura, cuius primus terminus ſit 5. & vltimus 10. ſummaque progreſſionis 100.

ITAQVE ænigma propoſitum intelligendum eſt, quando vere talis eſt progreſſio, in qua dati numeri ſint primus, & vltimus terminus, & ſumma progreſſionis. Neque vero parui æſtimandum eſt, reperire huiuſmodi progreſſionem per præcepta Algebræ. Nam ſi proponeretur hæc quæſtio. Eſt progreſſio Arithmetica, in qua primus terminus eſt 5 & vltimus 32. ſumma vero progreſſionis 185. quis eam facile inueniet ſine Algebra? quam tamen ſine magno labore reperiemus, ea via, quam in ænigmate præſcripſimus. Inuenietur enim numerus terminorum 10. & differentia progreſſionis 3. ita vt progreſſio quæſita ſit hæc.

5. 8. 11. 14. 17. 20. 23. 26. 29. 32.

154 *Progreſſionem Geometricam in data proportione conſtituere, cuius vltimus terminus datus ſit, vna cum ſumma progreſſionis.* CLIIII.

SIT conſtituenda progreſſio in proportione ſeſquialtera, cuius vltimus terminus 19683. & ſumma totius progreſſionis 55593. Ponatur primus termins 1℞. Et quia ſi primus terminus ab vltimo ſubtrahatur, & reliquus numerus per denominatorem proportionis, vno minus, diuidatur, atque ad Quotientem vltimus terminus adijciatur, fit totius progreſſionis ſumma, vt in Arithmetica practica in prima regula progreſſionum Geometricarum ſcripſimus: detrahatur 1℞ id eſt, primus terminus, ab vltimo 19683. & reſiduum 19683 — 1℞. diuidatur per $\frac{1}{2}$. hoc eſt, per denominatorem proportionis 1$\frac{1}{2}$. minus vno, & ad Quotientem 39366 — 2℞. adijciatur vltimus terminus 19683. fietque tota ſumma progreſſionis 59049 — 2℞. æqualis datæ ſummæ 55593. Additis ergo 2℞. vtrinque, erit æqualitas inter 59049. & 55593 + 2℞. Et ablatis vtrobique 55593. inter 3456. & 2℞. Diuiſis igitur 3456. per 2. fiet 1℞. 1728. primus videlicet terminus progreſſionis in proportione ſeſquialtera. Quocirca conſtituetur hæc progreſſio ſeptem terminorum, qui omnes faciunt datam ſummam 55593.

1728. 2592. 3888. 5832. 8748. 13122. 19683.

155 *Progreſſionem Geometricam in data proportione conſtituere, cuius primus terminus datus ſit, vna cum progreſſionis ſumma.* CLV

SIT datus primus terminus proportionis ſeſquialteræ 1728. & ſumma progreſſionis 55593. Ponatur vltimus terminus 1℞, à quo ſi primus dematur, remanet numerus 1℞ — 1728. quo diuiſo per $\frac{1}{2}$. fit Quotiens 2℞ — 3456. Addito ergo vltimo termino 1℞. fit ſumma progreſſionis 3℞ — 3456. vt in Arithmetica practica diximus, æqualis datæ ſummæ 55593. Additiſque 3456. vtrobique, erit æquatio inter 3℞ & 59049. Diuiſis ergo 59049. per 3. fiet 1℞. 19683. vltimus terminus, totaque progreſſio erit hæc.

1728. 2592. 3888. 5832. 8748. 13122. 19683. &c.

HÆC etiam duo proxima ænigmata intelligenda ſunt, ſi vere in rerum natura tales progreſſiones Geometricæ exiſtant, in quibus vltimus terminus, vel primus ſint illi, qui proponuntur, & ſumma progreſſionis ſit quoque illa, quæ datur. Vnde ſi quæreretur progreſſio in proportione ſeſquialtera, cuius ſumma 1000. & vltimus terminus 500. foret quæſtio inexplicabilis, cum nulla talis progreſſio exiſtat. quod experiri poteris. Sed ſi quæratur progreſſio Geometrica in proportione ſeſquialtera, cuius vltimus terminus ſit 68. $\frac{11}{32}$. & ſumma progreſſionis 197 $\frac{1}{32}$. quia talis progreſſio in rerum natura exiſtit, ponemus primum terminum 1℞. qui demptus ex vltimo termino 68. $\frac{11}{32}$. relinquit 68 $\frac{11}{32}$ — 1℞. quo numero diuiſo per $\frac{1}{2}$. id eſt, per denominatorem proportionis minus vno, fit Quotiens $\frac{4374}{32}$ — 2℞. & addito vltimo termino 68 $\frac{11}{32}$ ſiue $\frac{2187}{32}$. fit numerus $\frac{6561}{32}$ — 2℞. æqualis ſummæ progreſſionis 197 $\frac{1}{32}$. ſiue $\frac{6305}{32}$. Additis igitur 2℞. vtrobique, erit æquatio inter 2℞ + $\frac{6305}{32}$. & $\frac{6561}{32}$. Ablatiſque $\frac{6305}{32}$. vtrinque, inter 2℞ & $\frac{256}{32}$. Diuiſis igitur $\frac{256}{32}$. per 2. fiet 1℞. 4. primus progreſſionis terminus. Vnde ſic ſtabit progreſſio.

4. 6. 9. 13 $\frac{1}{2}$. 20 $\frac{1}{4}$. 30 $\frac{3}{8}$. 45 $\frac{9}{16}$. 68 $\frac{11}{32}$.

SIC etiam ſi detur primus terminus 4. & ſumma progreſſionis in proportione ſeſquialtera, inuenietur vltimus terminus 68 $\frac{11}{32}$. Atque ita, ſi à 4. continuetur proportio ſeſquialtera, conſiſtendum erit in octauo termino 68 $\frac{11}{32}$. &c. Et ſane præclarum eſt, ex vltimo termino inuenire primum, & ex primo vltimum, etiamſi intermedij nondum ſint cogniti.

156 *Datum numerum in duos partiri, vt primus aliquoties, vt libet, ſumptus ſit multiplex datus ſecundi aliquoties, vt libet, ſumpti: Vel vt ſecundus aliquoties, vt libet, ſumptus ſit datus multiplex primi aliquoties, vt libet ſumpti.* CLVI.

SIT datus numerus 40. diuidendus primum in duos, vt primus ter ſumptus faciat numerum duplum ſecundi quater ſumpti. Ponatur primus 1℞. & ſecundus 40 — 1℞. Triplum primi 3℞. duplum eſſe debet quadrupli ſecundi, hoc eſt, numeri 160 — 4℞. Erit ergo æquatio inter 3℞ & 320 — 8℞. Additiſq; 8℞. vtrinque,

inter 11℞.& 320. Diuisis ergo 320. per 11. fiet 1℞. 29 $\frac{1}{11}$. primus numerus. alter ergo erit 10 $\frac{10}{11}$. Triplum primi est 87 $\frac{3}{11}$. qui numerus duplus est, quadrupli secundi, id est, 43 $\frac{7}{11}$.

SIT deinde idem numerus 40. tribuendus in duos, vt secundus quater sumptus sit duplus primi ter sumpti. Ergo secundus quater sumptus, id est, numerus 160 — 4℞ duplus erit primi ter sumpti, id est, 3℞. hoc est, æqualis erit 6℞. Additis ergo 4℞. vtrobique, æquatio erit inter 160. & 10℞. Diuisisque 160. per 10. fiet 1℞. 16. primus numerus. alter ergo erit 24. Quadruplum huius, nimirum 96. duplum est tripli illius nimirum 48.

CLVII. *157 Tres numeros in Arithmetica progreßione inuenire, vt numerus ex mutua eorum multiplicatione genitus ad eorundem summam habeat datam proportionem.*

SINT inueniendi tres numeri Arithmeticam constituentes progressionem, vt numerus ex mutua eorum multiplicatione productus, triplus sit summæ eorundem. Ponantur tres numeri quæsiti, 1℞. 2℞. 3℞. habentes eundem excessum 1℞. Ex multiplicatione eorum fit numerus 6ℭ. triplus summæ eorum 6℞. hoc est, æqualis 18℞. Diuisis ergo 18 per 6 fiet 1ʒ. 3. propterea quod inter ℭ. & ℞. medius est character ʒ. ac propterea 1℞. erit √ʒ 3. & 2℞ erunt √ʒ 12. & 3℞. erunt √ʒ 27. ita vt tres numeri quæsiti sint √ʒ 3. √ʒ 12. √ʒ 27. habentes eundem excessum √ʒ 3. qui inter se multiplicati faciunt √ʒ 972. qui numerus triplus est summæ eorundem, numeri videlicet √ʒ 108.

QVANDO denominator proportionis, quam productus numerus ad summam habere debet, est numerus quadratus, explicabitur quæstio in numeris rationalibus. Vt iisdem positis, si numerus productus debeat habere proportionem noncuplam, inuenietur æquatio inter 6ℭ. & 54℞. Diuisis igitur 54. per 6. fiet 1ʒ 9. & 1℞ 3. atque tres numeri quæsiti erunt 3. 6. 9. qui inter se multiplicati gignunt numerum 162. noncuplum eorum summæ 18.

CLVIII. *158 Tres numeros inuenire, vt primus acceptis quotlibet vnitatibus à secundo, faciat numerum multiplicem quemcunque eius, qui secundo remanet: Secundus vero, acceptis quotuis vnitatibus à tertio, faciat numerum etiam multiplicem quemcunque eius, qui tertio superest: Tertius denique acceptis quotlibet vnitatibus à primo, faciat numerum æqualem residuo primi, minus dato numero.*

CAPIAT primus à secundo 4. & secundus à tertio 3. & tertius à primo 10. ita vt primus faciat duplum eius, qui secundo superest: Secundus autem triplum eius, qui tertio superest: Tertius denique æqualem residuo primi, minus 14. Ponatur secundus 3℞+6. vt dare possit 4. primo, & acceptis 3. à tertio, numerum conficiat triplum eius, qui tertio remanet, id est, numerum faciat, qui habeat $\frac{1}{3}$. sine fractione. Igitur si secundus primo det 4. remanebunt ei 3℞+2 habebitque tunc primus 6℞+4. eius duplum, ac proinde, antequam acciperet 4. habuit 6℞. Deinde secundus, acceptis 3. à tertio, habebit 3℞+9. numerum triplum eius, qui tertio superest. Tertius ergo tunc habebit 1℞+3. & antequam daret 3. habuit 1℞+6. qui si accipiat 10. à primo, habebit 1℞+16 qui numerus æqualis esse debet residuo primi, minus 14. hoc est, si accedant tertio vnitates 14. tum demum faciet 1℞+30. numerum æqualem residuo primi 6℞ — 10. Additis ergo 10. vtrinque, fiet æquatio inter 1℞+40. & 6℞. Ablataque 1℞ vtrobique, inter 40. & 5℞. Diuisis ergo 40. per 5. fiet 1℞. 8. Primus ergo numerus, quem posuimus 6℞. erit 48. Secundus vero positus 3℞+6. erit 30. Tertius denique positus 1℞+6. erit 14. Nam primus, acceptis 4. à secundo, habebit 52. qui numerus duplus est 26. qui secundo superest. Secundus autem, sumptis 3 à tertio, habebit 33. numerum triplum 11. qui tertio superest. Tertius denique, acceptis 10. à primo, habebit 24. qui numerus æqualis est residuo primi 38. — 14.

QVOD si tertius, acceptis 10. à primo, debeat habere numerum præcise æqualem residuo primi, inuenietur 1℞. 5 $\frac{1}{5}$. Et tres numeri erunt 31 $\frac{1}{5}$. 21 $\frac{3}{5}$. 11 $\frac{1}{5}$. Æquatio porro inuenta docebit, quando quæstio est impossibilis.

CLIX. *159 Duos numeros inuenire, ita vt primus, acceptis quotlibet vnitatibus à secundo, superet residuum secundi dato numero: At secundus acceptis quotuis vnitatibus à primo, faciat numerum multiplicem datum eius, qui primo remanet, ac præterea contineat datum numerum.*

CAPIAT primus à secundo 20. Secundus vero 3. à primo: faciatque primus numerum, qui residuum secundi superet numero 9. Secundus vero numerum faciat triplum residui primi, & insuper contineat 9 vnitates. Ponatur primus 1℞. qui acceptis 20. à secundo, habebit 1℞+20 qui numerus residuum secundi superare debet numero 9 Ergo secundo remanent 1℞+11. ac proinde antequam primo daret 20. habuit 1℞+31. Hic acceptis 3. à primo. habebit 1℞+34. qui numerus triplus esse debet residui primi, & insuper continere 9 Ablatis ergo 9. erit reliquus numerus 1℞+25. triplus residui primi. Est autem residuum primi 1℞ — 3. Igitur æquatio erit inter 1℞+25. & 3℞ — 9. Additisque 9. vtrinque, inter 1℞+34. & 3℞. Ablataque 1℞ vtrobique, inter 34. & 2℞. Diuisis ergo 34. per 2. fiet 1℞. 17. primus numerus. Secundus ergo erit 48. nimirum 1℞+31. Ac primus 17. acceptis 20. à secundo, habebit 37 qui numerus residuum secundi 28. superat numero 9. Secundus autem 48. acceptis 3 à primo, habebit 51. qui numerus triplum residui primi 14. superat numero 9.

CLX. *160 Numerum inuenire, per quem si datus numerus diuidatur, ex Quotiente in quemuis datum numerum tantum fiat, quantum ex inuento numero in alium quemuis numerum datum.*

SIT datus numerus 36. diuidendus per inuentum numerum, ita vt Quotiens in 24. ductus tantū faciat, quantum

quantum numerus inuentus in 54. ductus facit. Ponatur numerus quæsitus 1℞. per quem si diuidatur numerus 36. fit Quotiens $\frac{36}{1℞}$. qui ductus in 24 facit $\frac{864}{1℞}$. numerum æqualem numero 54℞. qui fit ex posito numero 1℞. in 54. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 864. & 54ℨ. Diuisis igitur 864. per 54. fiet 1ℨ 16. & 1℞. 4. numerus quæsitus. Diuiso enim dato numero 36. per 4. fit Quotiens 9. qui ductus in 24. facit 216. numerum æqualem ei, qui fit ex inuento numero 4. in 54.

Item inueniendus sit numerus, per quem si diuidatur datus numerus 40. fiat Quotiens, qui ductus in 8. tantum faciat, quantum inuentus numerus facit in 50. ductus. Ponatur quæsitus numerus 1℞ per quem si diuidatur numerus 40. fit Quotiens $\frac{40}{1℞}$: qui ductus in 8. facit $\frac{320}{1℞}$. numerum æqualem numero 50℞. qui fit ex posito numero 1℞ in 50. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 320. & 50ℨ. Diuisis ergo 320. per 50. fiet 1ℨ. 6 $\frac{2}{5}$. siue $\frac{32}{5}$. & 1℞ √ℨ $\frac{32}{5}$. numerus quæsitus. per quem si diuidatur datus numerus 40. hoc est, √ℨ 1600. fit Quotiens √ℨ $\frac{8000}{32}$. qui ductus in 8. hoc est, in √ℨ 64. producit numerum √ℨ $\frac{512000}{32}$. qui æqualis est numero √ℨ $\frac{80000}{5}$. qui fit ex numero inuento √ℨ $\frac{32}{5}$ in 50. id est, in √ℨ 2500. Quod enim æquales sint numeri √ℨ $\frac{512000}{32}$. & √ℨ $\frac{80000}{5}$. liquet, cum in crucem multiplicati producant eundem numerum √ℨ 2560000.

161 *Tres numeros continue proportionales in data proportione inuenire, quorum quadrati in vnam summam collecti faciant datum numerum.* CLXI.

SINT inueniendi tres numeri continue sesquitertij, quorum quadrati faciant 4329. Ponantur quæsiti numeri 9℞ 12℞ 16℞. in proportione sesquitertia. Eorum quadrati 81ℨ. 144ℨ. 256ℨ faciunt summam 481ℨ æqualem 4329. Diuisis ergo 4329. per 481. fiet 1ℨ. 9. & 1℞ 3. Ergo primus numerus positus 9℞. est 27. secundus 36. & tertius 48. quorum quadrati 729. 1296. 2304. faciunt summam 4329.

SINT rursus inueniendi tres numeri continue dupli, quorum quadrati faciant 6000. Ponantur tres quæsiti numeri 1℞. 2℞. 4℞ Horum quadrati 1ℨ. 4ℨ. 16ℨ. faciunt summam 21ℨ. æqualem 6000. Diuisis ergo 6000. per 21. fiet 1ℨ $\frac{2000}{7}$. & 1℞. √ℨ $\frac{2000}{7}$. Numeri ergo quæsiti in proportione dupla sunt √ℨ $\frac{2000}{7}$. √ℨ $\frac{8000}{7}$. √ℨ $\frac{32000}{7}$. quorum quadrati $\frac{2000}{7}$. $\frac{8000}{7}$. $\frac{32000}{7}$. faciunt $\frac{42000}{7}$. hoc est, 6000.

162 *Tres numeros continue proportionales in data proportione inuenire, ita vt parte data maximi numeri in partē datam medij multiplicata, & hoc producto in partem datam minimi ducto, procreetur datus numerus.* CLXII.

SINT inueniendi tres numeri continue sesquialteri, ita vt tertia parte maximi ducta in semissem medij, & hoc numero producto in quartam partem minimi multiplicato; fiat numerus 576. Ponantur tres numeri quæsiti sesquialteri, 4℞. 6℞. 9℞. Ex $\frac{1}{3}$. maximi, id est, ex 3℞. in semissē medij, id est, in 3℞ fit numerus 9ℨ & ex hoc in $\frac{1}{4}$. minimi, id est, in 1℞. fit numerus 9ℭ. æqualis 576. Diuisis ergo 576. per 9. fiet 1ℭ 64. cuius radix cubica 4. Ergo tres numeri quæsiti, cum positi sint 4℞. 6℞. 9℞. erunt 16. 24 36. Atque ex tertia parte maximi, id est, ex 12. in semissem medij, id est, in 12. fit numerus 144. & ex hoc in $\frac{1}{4}$. minimi, id est, in 4. fit 576.

163 *Numerum inuenire, cuius datæ duæ partes inter se multiplicatæ producant numerum, quo diuiso per datum numerum, fiat Quotiens, qui contineat partem datam, vel partes radicis quadratæ numeri inuenti.* CLXIII.

SIT inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. inter se multiplicatæ faciant numerum, quo diuiso per 27. exeant $\frac{2}{3}$. radicis quadratæ numeri inuenti. Ponatur quæsitus numerus 1℞. Ex eius $\frac{1}{3}$. in $\frac{1}{4}$. id est, ex $\frac{1℞}{3}$. in $\frac{1℞}{4}$. fit numerus $\frac{1ℨ}{12}$. quo diuiso per 27 fit numerus $\frac{1ℨ}{324}$. æqualis duabus tertijs radicis quadratæ numeri inuenti 1℞. hoc est, duabus tertijs numeri √ℨ 1℞. hoc est, numero √ℨ $\frac{4℞}{9}$. qui facit $\frac{2}{3}$. numeri √ℨ 1℞ producitur que ex ductu √ℨ 1℞. in $\frac{2}{3}$. id est, in √ℨ $\frac{4}{9}$. Itaque æquatio inuenta est inter √ℨ $\frac{4℞}{9}$. & $\frac{1ℨ}{324}$. Igitur & æquatio erit inter eorum quadrata $\frac{4℞}{9}$. & $\frac{1ℨℨ}{104976}$. quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationē inter 419904℞. & 9ℨℨ. Diuisis ergo 419904. per 9. fiet 1ℭ 46656. (quia inter ℞ & ℨℨ. medij sunt duo characteres ℨ & ℭ.) & 1℞. 36. numerus quæsitus. Nam ex 12. eius tertia parte in 9. eius quartam partem fit numerus 108. quo diuiso per 27. fit Quotiens 4. qui facit $\frac{2}{3}$. radicis quadratæ numeri inuenti 36. quæ radix est 6.

164 *Numerum inuenire, cuius pars data in se multiplicata, & productus numerus in aliam partem datam ductus procreet quadratum numerum inuenti numeri.* CLXIV.

SIT inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{5}$. in se faciat numerum, qui ductus in $\frac{1}{3}$. eiusdem numeri inuenti producat quadratum numeri inuenti. Ponatur quæsitus numerus 1℞ Huius $\frac{1}{5}$. nimirum $\frac{1℞}{5}$. ducta in se facit $\frac{1ℨ}{25}$. qui numerus ductus in $\frac{1℞}{3}$. facit numerum $\frac{1ℭ}{75}$. æqualem quadrato numeri positi 1℞, hoc est, numero 1ℨ ita vt æquatio sit inter $\frac{1ℭ}{75}$. & 1ℨ quæ per multiplicationem in crucē reducitur ad hanc inter 1ℭ. & 75ℨ Diuisis ergo 75 per 1 fiet 1℞. 75. (quod Cossici numeri collaterales sint) numerus quæsitus. Nam eius quinta pars, 15. ducta in se facit 225. qui numerus ductus in 25. tertiam partem eiusdem numeri 75 facit 5625 quadratum inuenti numeri 75.

CLXV. 165 *Numerum inuenire, cuius pars data in aliam partem datam multiplicata producat datum numerum.*

SIT inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{4}$. ducta in $\frac{1}{6}$. faciat 384. Ponatur quæsitus numerus 1℞. Ex $\frac{1℞}{4}$. in $\frac{1℞}{6}$ fit numerus $\frac{1ʓ}{24}$. æqualis 384. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 1ʓ. & 9216. Diuisis igitur 9216. per 1 fiet 1ʓ. 9216 & 1℞. 96. numerus quæsitus. Nam ex 24 quarta eius parte, in 16. eiusdem partem sextam fit numerus 384. datus.

ITEM sit inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{4}$. in $\frac{1}{6}$. ducta faciat 100. Ponatur numerus quæsitus 1℞. Ex $\frac{1℞}{4}$. in $\frac{1℞}{6}$. fit numerus $\frac{1ʓ}{24}$. æqualis 100. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 1ʓ. & 2400. Diuisis ergo 2400. per 1. fiet 1ʓ 2400. cuius radix quadrata, √ʓ 2400. erit numerus quæsitus. Nam eius $\frac{1}{4}$. est √ʓ150. & $\frac{1}{6}$. √ʓ. $\frac{200}{3}$. quæ partes inter se multiplicatæ procreant √ʓ $\frac{30000}{3}$. hoc est, √ʓ 10000. siue 100.

## SCHOLIVM.

SINE *Algebra soluetur hoc problema hac ratione; Denominatores partium inter se multiplicentur, & productus uniuersus in datum numerum ducatur. Radix enim quadrata huius producti erit numerus quæsitus. Vt in priori exemplo, ex 4. in 6. fit 24. & ex 24. in 384. fit 9216. cuius radix quadrata 96. dabit numerum quæsitum.*

QVOD *si proponantur tres partes inter se multiplicandæ, ita vt producant numerum datum; multiplicandi erunt partium denominatores inter se, & productus numerus in datum numerum ducendus. Huius enim numeri radix cubica dabit numerum quæsitum. Vt si quæratur numerus, cuius partes $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. inter se multiplicatæ producant 72000. Multiplicatis denominatoribus inter se, fit numerus 24. Et ex 24. in 72000. fit numerus 1728000. cuius radix cubica 120. dabit numerum quæsitum. Nam eius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. nimirum 60. 40. 30 inter se multiplicatæ faciunt 72000.*

EODEM *modo progrediendum est, si quatuor partes aliquotæ proponantur inter se multiplicandæ: sed ex vltimo producto extrahenda est radix zensizensica. Et si quinque proponantur, eruenda est radix surdesolida. Et sic de alijs in infinitum. Nam ex vltimo producto semper extrahenda est, radix, cuius exponens æqualis est numero partium aliquotarum. Vt si dentur 10. partes aliquotæ, extrahenda erit radix zensurdesolida. Et si dentur 12. radix zensizensicubica &c. Qua de re consule, quæ cap. 2. scripsimus de progreßionibus numerorum Coßicorum.*

CLXVI. 166 *Tres numeros inuenire, vt bini quilibet multiplicati inter se gignant tres datos numeros.*

EX primo in secundum fiat 240. Ex primo in tertium 660. Et ex secundo in tertium, 1380. Ponatur primus numerus 1℞. Per quem si diuidatur numerus 240. productus ex primo in secundum, fiet secundus $\frac{240}{1℞}$. Nam hic Quotiens ductus in diuisorem 1℞. producit diuisum 240. Eadem ratione erit tertius $\frac{660}{1℞}$. Quotiens videlicet diuisionis numeri 660 per 1℞. Iam vero ex secundo $\frac{240}{1℞}$. in tertium $\frac{660}{1℞}$. fit numerus $\frac{158400}{1ʓ}$. æqualis 1380. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 158400. & 1380ʓ. Diuisis ergo 158400. per 1380. fiet 1ʓ. 114 $\frac{18}{23}$. (quod inter N. & ʓ. medius sit vnus character ℞) & 1℞. erit √ʓ 114 $\frac{18}{23}$. primus scilicet numerus, qui positus fuit 1℞ Et si per hunc primum, id est, per √ʓ $\frac{2640}{23}$. diuidatur primus numerus productus 240 hoc est, √ʓ57600. fiet Quotiens √ʓ501 $\frac{9}{11}$. secundus videlicet numerus. Et si per eundem primum numerum √ʓ $\frac{2640}{23}$. diuidatur secundus numerus productus 660. hoc est, √ʓ435600. dabit Quotiens √ʓ3795. tertium numerum. Ex primo √ʓ114 $\frac{18}{23}$. in secundum √ʓ501 $\frac{9}{11}$. fit √ʓ57600. hoc est, 240. Et ex eodem primo √ʓ114 $\frac{18}{23}$. in tertium √ʓ3795. fit √ʓ435600. id est, 660. Ac tandem ex secundo √ʓ501 $\frac{9}{11}$. in tertium √ʓ3795 fit √ʓ1904400. id est, 1380.

CLXVII 167 *Datis duobus numeris, alium tertium inuenire, qui cum minore numerum faciat æqualē ei, quem inuenti data pars cum maiore efficit.*

DATI sint duo numeri 12. & 20. inueniendusque sit alius, qui cum 12. tantum faciat, quantum eius $\frac{3}{7}$. cum 20. Ponatur numerus quæsitus 1℞. Igitur 12 + 1℞. æqualia erunt 20 + $\frac{3}{7}$℞. Ablatis $\frac{3}{7}$℞. vtrinque, erit æquatio inter 12 + $\frac{4}{7}$℞. & 20. Et ablatis 12. vtrobique, inter $\frac{4}{7}$℞. & 8. Diuisis ergo 8. per $\frac{4}{7}$. fiet 1℞. 14. numerus, quem inquirimus. Nam additus ad 12. facit 26. & eius $\frac{3}{7}$. nimirum 6. cum 20. faciunt similiter 26.

CLXVIII. 168 *Numerum inuenire, ita vt quadrati quotcunque partium ipsius simul sumpti conficiant summam inuento numero æqualem, vel ipsius multiplicem.*

SIT primum inueniendus numerus, ita vt quadrati ex eius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. descripti summam faciant inuento numero æqualem. Ponatur numerus quæsitus 1℞. cuius partes nominatæ sunt $\frac{1}{2}$℞ $\frac{1}{3}$℞. & $\frac{1}{4}$℞. & earum quadrati $\frac{1}{4}$ʓ. $\frac{1}{9}$ʓ. $\frac{1}{16}$ʓ. qui simul faciunt $\frac{61}{144}$ʓ quæ summa æqualis est 1℞. Diuisa ergo 1. per $\frac{61}{144}$. fiet 1℞. $\frac{576}{244}$. numerus quæsitus. Nam eius $\frac{1}{2}$. est $\frac{288}{244}$. eiusque quadratus $\frac{82944}{59536}$. & $\frac{1}{3}$. est $\frac{192}{244}$. eiusque quadratus $\frac{36864}{59536}$. & $\frac{1}{4}$. est $\frac{144}{244}$. eiusque quadratus $\frac{20736}{59536}$. qui omnes tres quadrati faciunt $\frac{140544}{59536}$. numerum æqualem inuento numero $\frac{576}{244}$. quippe cum tantum fiat ex denominatore huius in numeratorem illius, quantum ex numeratore in denominatorem

SIT deinde inueniendus numerus, ita vt quadrati ex eius $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{4}$. procreati faciant numerum decuplum numeri inuenti Ponatur numerus 1℞. cuius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{4}$. sunt $\frac{1}{2}$℞. & $\frac{1}{4}$℞. & quadrati $\frac{1}{4}$ʓ. & $\frac{1}{16}$ʓ. qui simul faciunt summam $\frac{5}{16}$ʓ. æqualem 10℞. Diuisis ergo 10 per $\frac{5}{16}$. fiet 1℞. 32. numerus quæsitus. Nam quadrati 256. & 64. ex eius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{4}$ descripti faciunt summam 320. decuplam numeri inuenti 32.

169 Nu-

169 *Numerum inuenire, qui ductus in datam ipsius partem producat datum numerum quemcunque.* CLXIX.

SIT inueniendus numerus, qui ductus in $\frac{3}{4}$. ipsius producat 90. Ponatur inuentus numerus 1℞. Ex 1℞. in $\frac{3}{4}$℞. fit numerus $\frac{3}{4}$ʒ. æqualis 90. Diuisis igitur 90. per $\frac{3}{4}$. fiet 1ʒ. 120. & 1℞. √ʒ 120. numerus quæsitus. Eius $\frac{3}{4}$. sunt √ʒ $\frac{1080}{16}$. vt patet, si √ʒ 120. ducatur in $\frac{3}{4}$. hoc est, in √ʒ $\frac{9}{16}$. Iam ex √ʒ 120. in √ʒ $\frac{1080}{16}$. fit √ʒ $\frac{129600}{16}$. hoc est, √ʒ 8100. hoc est, 90.

170 *Datum numerum in duos partiri, vt eorum quadrati summam datam conficiant, maiorem tamen semisse quadrati ex dato numero geniti, & minorem quadrato eiusdem numeri.* CLXX.

SIT numerus 40. diuidendus in duos, quorum quadrati faciant 928. numerum maiorem, quam 800. qui semissis est quadrati ex 40. procreati, & minorē quam 1600. qui quadratus est eiusdem numeri 40. Ponatur vnus numerorum 20 — 1℞. & alter 20 + 1℞. vt cum illo faciat 40. Quadrati horum duorum numerorum 400 — 40℞ + 1ʒ. & 400 + 40℞ + 1ʒ. faciunt 2ʒ + 800 numerum æqualem 928. Ablatis ergo 800. vtrobique, erit æquatio inter 2ʒ. & 128. Diuisisque 128 per 2 fiet 1ʒ. 64. & 1℞. 8. Ergo primus numerus positus 20 — 1℞. erit 12. & alter, quem posuimus 20 + 1℞. erit 28. Atque quadrati horum numerorum 12. & 28. nimirum 144. & 784. faciunt 928.

Hoc ænigma soluemus etiam per compositam æquationem in ænigmate 35. sequentis cap. 30.

171 *Datum numerum in tres partes continue proportionales diuidere, ita vt productus numerus ex prima in tertiam ad productum ex prima in secundam habeat proportionem datam.* CLXXI.

HOC ænigma solutum fuit etiam in problemate 133. sed pro alio exemplo.

SIT datus numerus 39. diuidendus in tres continue proportionales, ita vt numerus factus ex primo in tertium habeat ad numerum ex primo in secundum factum proportionem duplam sesquialteram. Ponatur secundus 1℞ ideoque primus ac tertius simul 39 — 1℞. Ex secundo 1℞. in se fit 1ʒ. [a] quantum nimirum fit ex primo in tertium. Et quia hic productus debet esse duplus sesquialter ad eum, qui fit ex primo in secundum 1℞ fiet ex primo in secundū numerus $\frac{2ʒ}{5}$. (quod 1ʒ. ad $\frac{2ʒ}{5}$. proportionem habeat duplā sesquialteram, vt constat, si 1ʒ. diuidatur per $2\frac{1}{2}$. denominatorē proportionis duplæ sesquialteræ.) Quo diuiso per secundum 1℞ fit Quotiens $\frac{2ʒ}{5℞}$. siue $\frac{2℞}{5}$. qui ductus in diuisorem, id est, in 1℞. producit $\frac{2ʒ}{5}$. ac proinde primus numerus erit $\frac{2℞}{5}$. quo ablato ex summa primi ac tertij, id est, ex 39 — 1℞. reliquus erit tertius numerus $\frac{195 - 7℞}{5}$. in quem si ducatur primus $\frac{2℞}{5}$. producetur numerus $\frac{390℞ - 14ʒ}{25}$. æqualis numero 1ʒ. qui fit ex medio 1℞ in se. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 25ʒ. & 390℞ — 14ʒ. Et additis 14ʒ. vtrinque, erit æquatio inter 390℞. & 39ʒ. Diuisis igitur 390. per 39. fiet 1℞ 10. (quod numeri Cossici sint collaterales) numerus scilicet medius. Primus ergo positus $\frac{2℞}{5}$. nimirum 2℞. diuisæ per 5. erit 4. Et tertius, qui inuentus est $\frac{195 - 7℞}{5}$. hoc est, 195 — 7℞. diuisæ per 5. erit 25. ita vt tres partes numeri 39 sint 4. 10. 25. continue proportionales. Et qui fit ex primo in tertium, vel ex secundo in se, nimirum 100. proportionem habet duplam sesquialteram ad numerum 40. qui fit ex primo in secundum.

[a] 20 sept.

QVONIAM vero, datis tribus numeris continue proportionalibus, [b] numerus, qui fit ex medio in se, ad productum ex primo in medium, eandem habet proportionem, quam tres dati numeri: propterea quod medius multiplicans se, & primum producit duos illos productos; soluetur hoc ænigma propositum facilius, si per ænigma 49. datus numerus secetur in tres numeros continue proportionales in proportione data. Ita n. numerus factus ex primo in tertiū, hoc est, ex secundo in se, habebit ad factū ex primo in secundum proportionem datam, eandem nimirum, quam tres numeri habent. Vt in dato exemplo, secandus erit datus numerus 39. in tres numeros continue duplos sesquialteros, hoc modo. Ponantur tres numeri in proportione continua dupla sesquialtera 1℞. $2\frac{1}{2}$℞ $6\frac{1}{4}$℞. quorum summa $9\frac{3}{4}$ ℞. æqualis esse debet dato numero 39. Diuisis ergo 39. per $9\frac{3}{4}$. fiet 1℞. 4. primus numerus, qui positus fuit 1℞. Secundus ergo positus $2\frac{1}{2}$℞ erit 10. & tertius, quem posuimus $6\frac{1}{4}$℞ erit 25.

[b] 1. sept.

172 *Datum numerum in duos partiri, vt ex vno in alterum fiat alius datus numerus minor quarta parte quadrati ex dato primo numero procreati: hoc est, ita vt radix quadrata secundi dati numeri minoris quarta parte quadrati ex primo dato numero procreati sit medio loco proportionalis inter duos numeros inuentos.* CLXXII.

SIT datus numerus 10. distribuendus in duos, inter quos √ʒ 1. sit medio loco proportionalis, hoc est, vt ex vno in alium fiat 1. Ponatur minor pars 5 — 1℞. & maior 5 + 1℞. vt earum summa sit 10. Ex vna in alteram fit numerus 25 — 1ʒ. vt in hac formula apparet, æqualis 1. Addito 1ʒ. vtrobique, fiet æquatio inter 25 & 1ʒ + 1. Ablataque 1. vtrobique, inter 24 & 1ʒ. Diuisis ergo 24. per 1 fiet 1ʒ. 24. & 1℞ √ʒ 24. Ergo minor pars posita 5 — 1℞ erit 5 — √ʒ 24. Maior autem posita 5 + 1℞ erit 5 + √ʒ 24. Atque hæ duæ partes

```
        5 — 1℞
        5 + 1℞
   ___________
     + 5℞ — 1ʒ
 25 — 5℞
 _____________
 25 —     1ʒ
```

inter se multiplicatæ faciunt 1. vt hic cernitur. Fiet enim multiplicatio, si 24. quadratus posterioris particulæ subtrahetur ex 25. quadrato prioris particulæ, vt cap. 23. docuimus. [a] Igitur √ʒ 1. medio loco proportionalis est inter 5 − √ʒ 24. & 5 + √ʒ 24. cum tam hi duo inter se multiplicati, quam ille √ʒ 1. in se, faciat 1.

[a] 20. sept.

5 — √ʒ 24<br>
5 + √ʒ 24<br>
1

PORRO hoc idem ænigma soluemus per compositam quoque æquationem in sequenti cap. ænigmate 38.

CLXXIII. 173 *Datum numerum diuidere in duos, vt eorum quadrati summam faciant, quæ productum ex eorum multiplicatione superet dato numero.*

SIT datus numerus 8. diuidendus in duos, vt summa ex eorum quadratis collecta excedat productum numerum ex eorum multiplicatione mutua, numero 20. Ponatur minor numerus 4 — 1℞ & maior 4 + 1℞. vt simul faciant 8. Quadrati sunt 1ʒ + 16 − 8℞. & 1ʒ + 16 + 8℞. facientes summam 2ʒ + 32. cum − 8℞. & + 8℞. se mutuo tollant. Hæc summa excedere debet productum ex vno in alterum numero 20. Est autem hic productus 16 − 1ʒ. vt in apposita formula apparet qui cum 20. faciet numerum 36 − 1ʒ. æqualem quadratorum summæ 2ʒ + 32. Addito ergo 1ʒ. vtrique, erit æqualitas inter 3ʒ + 32. & 36. Ablatisq; 32. vtrobique, inter 3ʒ. & 4. Diuisis ergo 4. per 3. fiet 1ʒ 4/3. & 1℞ √ʒ 4/3. Cum ergo minor numerus sit positus 4 − 1℞. erit ipse numerus minor 4 − √ʒ 4/3. Maior autẽ positus 4 + 1℞. erit 4 + √ʒ 4/3. qui duo numeri faciunt 8. & quadrati sunt 17 1/3 − √ʒ 256/3. & 17 1/3 + √ʒ 256/3. vt in hisce formulis apparet. quorum summa est 34 2/3. quæ superat productum 14 2/3. ex vno in alterum, numero dato 20.

4 — 1℞<br>
4 + 1℞<br>
+ 4℞ — 1ʒ<br>
16 — 4℞<br>
16 — 1ʒ

4 — √ʒ 4/3<br>
4 — √ʒ 4/3<br>
— √ʒ 64/3 + 4/3<br>
16 — √ʒ 64/3<br>
17 1/3 — √ʒ 256/3

4 + √ʒ 4/3<br>
4 + √ʒ 4/3<br>
+ √ʒ 64/3 + 4/3<br>
16 + √ʒ 64/3<br>
17 1/3 + √ʒ 256/3

Productus autem hic 14 2/3. habetur, si 4/3. quadratus posterioris particulæ dematur ex 16. quadrato prioris particulæ, vt cap. 23. traditum est, & altera hæc formula indicat.

4 — √ʒ 4/3<br>
4 + √ʒ 4/3<br>
14 2/3

SIT rursus datus numerus 40. distribuendus in duos, quorum quadrati summam faciant, quæ numerum ex eorum multiplicatione factum superet numero 403. Ponatur minor numerus 20 − 1℞. & maior 20 + 1℞ facientes summam 40. Quadrati sunt 1ʒ + 400 − 40℞. & 1ʒ + 400 + 40℞. quorum summa 2ʒ + 800. superans numero 403 numerum 400 − 1ʒ. productum ex vno in alterum. qui productus habetur, si quadratus 1ʒ. posterioris particulæ dematur ex 400. quadrato prioris particulæ, vt in hac formula cernis, traditumque est cap. 23. Itaque si ad hunc productum addentur 403. fiet æquatio inter 2ʒ + 800. summam quadratorum, & 803 − 1ʒ. Additoque 1ʒ. vtrobique, inter 3ʒ + 800. & 803. Ablatisque 800. vtrinque, inter 3ʒ. & 3. Diuisis igitur 3. per 3. fiet 1ʒ. 1. & 1℞ 1. Erit ergo minor numerus, quem posuimus 20 − 1℞. 19. & maior positus 20 + 1℞. erit 21. qui problema conficiunt.

20 — 1℞<br>
20 + 1℞<br>
400 — 1ʒ

HOC etiam problema soluemus per compositam æquationem in ænigmate 39. sequentis cap.

SI numerus proponeretur 20. diuidendus in duos, vt summa quadratorum superet numerum ex partium multiplicatione productum numero 30. foret problema impossibile, vt ex ipsa solutione disces.

CLXXIV. 174 *Numerum inuenire, cuius quadratus auctus dato numero, si ducatur in eundem quadratum mulctatum eodem dato numero producat quemuis datum numerum.*

SIT inueniendus numerus, cuius quadratus auctus octonario, si ducatur in eundem quadratum mulctatum eodem octonario, producat 6497. Ponatur numerus quæsitus 1℞. Eius quadratus auctus octonario erit 1ʒ + 8 mulctatus vero eodem octonario, 1ʒ − 8. Hi duo numeri inter se multiplicati faciunt 1ʒʒ − 64. vt hic vides, si 64. quadratus posterioris particulæ, dematur ex 1ʒʒ. particulæ prioris. qui productus æqualis esse debet dato numero 6497. Additis ergo 64. vtrobique, æquatio erit inter 1ʒʒ, & 6561. Diuisisque 6561. per 1. fiet 1ʒʒ. 6561. & radix eius zensizensica 9. numerus quæsitus. Nam eius quadratus 81. auctus octonario facit 89. & mulctatus octonario, 73. fitque numerus 6497. ex 89. in 73.

1ʒ + 8<br>
1ʒ — 8<br>
1ʒʒ — 64

SI iis-

SI iisdem positis, produci debeat numerus 10. reperietur æquatio inter 1ȝȝ & 74. Diuisis ergo 74. per 1. fiet 1ȝȝ. 74. & radix Zensizensica √ȝȝ 74. numerus quæsitus. Eius enim quadratus √ȝȝ 5476. auctus octonario est √ȝȝ 5476 + 8. & mulctatus octonario, √ȝȝ 5476 − 8. qui duo numeri æquiualent his duobus √ȝ 74 + 8. & √ȝ 74 − 8. atque hi duo inter se multiplicati producunt 10. vt hic vides: quippe cum 64. quadratus posterioris particulæ detractus ex 74. quadrato particulæ prioris relinquat 10.

√ȝ 74 + 8
√ȝ 74 — 8
10

### SCHOLIVM.

*ATQVE hæc dicta sint de ænigmatibus, quæ per simplicem æquationem enodantur. Ad similitudinem enim horum studiosus Lector alia, quotquot voluerit, formare poterit. Quare nunc alia ænigmata proponemus, in quibus soluendis occurrunt æquationes compositæ.*

---

## *ÆNIGMATA VARIA NVMERORVM ABSTRACTORVM per Algebram enodanda, in quibus æquatio inter tres numeros, quorum vnus alijs duobus æqualis est, occurrit: quæ quidem composita æquatio dicitur.*

## CAPVT XXX.

1 *Datum numerum in duas partes distribuere, vt earum cubi datam summam, quæ maior sit quarta parte cubi ex dato numero procreati, efficiant.* I.

HOC ænigma, quod fuit 141. præcedentis cap. soluemus hic aliter, nimirum per æquationem compositam, in qua vnus numerus Cossicus duobus Cossicis numeris reperitur æqualis: & in qua eruenda est radix ex numero composito, vel diminuto, vt in cap. 12. traditum est. Id quod etiam fiet in alijs huius cap. ænigmatibus. Sit ergo datus numerus 10. diuidendus in duas partes, quarum cubi faciant summam 370. quæ maior est, quam 250. quarta pars cubi ex dato numeri 10. procreati. Ponatur prima pars 1℞. & secunda 10 − 1℞. Cubi harum partium sunt 1ȼ. & 1000 − 300℞ + 30ȝ − 1ȼ. quorum summa 1000 − 300℞ + 30ȝ. (Nam + 1ȼ. & − 1ȼ se mutuo interimunt) æqualis esse debet 370. Additis 300℞ vtrobique, fiet æquatio inter 1000 + 30ȝ. & 300℞ + 370. Et ablatis 370. vtrinque, inter 630 + 30ȝ. & 300℞. Et rursum ablatis 630. vtrinque, inter 30ȝ. & 300℞ − 630. Diuisis autem singulis hisce numeris per numerum maioris characteris Cossici, nimirum per 30. vt circa finem cap. 10. præcepimus, erit æquatio inter 1ȝ. & 10℞ — 21. quam sic resolues ex doctrina cap. 12. Semissis numeri radicum 5. facit quadratum 25. à quo demptis 21. propter signum − remanet numerus 4. cuius radix quadrata 2. addita ad 5. semissem numeri radicum dabit maiorem radicem 7. Et eadem radix 2. dempta ex eadem semisse 5. reliquam faciet minorem radicem 3. Huiusmodi enim numeri, in quibus numerus absolutus affectus est signo —. duplicem radicem habent, vt cap. 12. tradidimus. Partes ergo numeri dati 10. sunt 7. & 3. quarum cubi 343. & 27. summam datam 370. efficiunt. vt etiam in ænigmate 141. præcedentis cap. inuentum est.

SI eodem numero dato, cuborum summa proponatur 400. inueniemus æquationem vltimam inter 1ȝ. & 10℞ — 20. quam ita resolues. Semissis numeri radicum 5. facit quadratum 25. à quo demptis 20. remanet numerus 5. cuius radix quadrata √ȝ 5. addita ad 5. semissem numeri radicum dabit maiorem radicem √ȝ 5 + 5. Et eadem radix √ȝ 5. dempta ex eadem semisse 5. reliquam faciet minorem radicem 5 − √ȝ 5. vt in eodem ænigmate 141. antecedentis cap. inuenimus.

QVO pacto autem ænigma hoc sine Algebra soluendum sit, dictum est supra in ænigmate 14t. præcedentis cap.

2 *Datum numerum in duos cubos distribuere, quorum laterum summa data est: dummodo quarta pars cubi huius summæ minor sit dato numero.* II.

HOC problema cum antecedenti coincidit, vt in ænigmate 142. cap. præcedentis diximus.

3 *Numerum inuenire, qui cum dato numero suum quadratum efficiat.* III.

DATVS numerus sit 156. oporteatque inuenire numerum, qui additus ad 156. conficiat quadratum ipsius numeri inuenti. Ponatur numerus quæsitus 1℞ cuius quadratum 1ȝ. cui æqualis debet esse 1℞ + 156. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum, id est, ad $\frac{1}{4}$. addo 156. facioq; 156 $\frac{1}{4}$. siue $\frac{625}{4}$. ad cuius radicem $\frac{25}{2}$. hoc est, ad 12 $\frac{1}{2}$. addo semissem numeri radicum, nimirum $\frac{1}{2}$. efficioque pretium 1℞. 13. qui est numerus quæsitus. Nam 13. cum 156. facit 169. quadratum numeri 13.

SIT rursus inueniendus numerus, qui cum 50. faciat suum quadratum Ponatur numerus quæsitus 1℞. cu-

1℞. cuius quadratum 1ȝ. cui æqualis debet esse 1℞ + 50. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum, id est, ad $\frac{1}{4}$. addo 50. facioque 50 $\frac{1}{4}$. siue $\frac{201}{4}$. ad cuius radicem, hoc est, ad √ȝ $\frac{201}{4}$. addo semissem numeri radicum, nimirum $\frac{1}{2}$. efficioque pretium 1℞ √ȝ $\frac{201}{4}$ + $\frac{1}{2}$. numerum scilicet quæsitum. Huius enim quadratus est √ȝ $\frac{804}{16}$ + $\frac{204}{4}$. vt in hac formula apparet, hoc est, √ȝ $\frac{201}{4}$ + 50 $\frac{1}{2}$. quantum videlicet fit ex numero inuento √ȝ $\frac{201}{4}$ + $\frac{1}{2}$. vna cum dato numero 50. Conflatur enim etiam numerus √ȝ $\frac{201}{4}$ + 50 $\frac{1}{2}$. Apposui formulam multiplicationis numeri inuenti √ȝ $\frac{201}{4}$ + $\frac{1}{2}$ in se quadrate, vt videas, quo pacto quadratus sit productus.

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{ȝ}\ \frac{201}{4} + \frac{1}{2} \\
\sqrt{ȝ}\ \frac{201}{4} + \frac{1}{2} \\
\hline
\quad + \sqrt{ȝ}\ \frac{201}{16} + \frac{1}{4} \\
\frac{201}{4} + \sqrt{ȝ}\ \frac{201}{16} \\
\hline
\frac{201}{4} + \sqrt{ȝ}\ \frac{804}{16} + \frac{1}{4}
\end{array}
$$

IV. 4 *Numerum inuenire, cuius quadratus cum dato numero conficia*[illegible] *sum, siue quadrati quadratum.*

SIT datus numerus 83232. oporteatque inuenire numerum, [illegible] dratum ipsius. Ponatur quæsitus numerus 1℞. cuius quadratus 1ȝ & [illegible] + 83232. Semissis numeri zensorum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum, id est, ad [illegible] 83232 $\frac{1}{4}$. hoc est, $\frac{332929}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{577}{2}$. addo semissem [illegible] ficioque $\frac{578}{2}$. hoc est, 289. quadratum. cuius radix 17. est numerus quæsitus [illegible] est. Nam characteres Cossici ȝȝ. ȝ. N. non sunt collaterales, sed inter quos [illegible] primo loco inuenitur valor vnius quadrati, deinde radix eruitur, quæ offert [illegible] que ita numeri inuenti 17. quadratus 289. cum dato numero 83232 efficit [illegible] ri inuenti 17.

V. 5 *Numerum inuenire, cuius cubus cum dato numero conficiat* [illegible] *ti cubum.*

SIT datus numerus 7526792. inueniendusque alius, cuius cubus cum dato numero efficiat inuenti numeri cubi quadratum, vel (quod idem est) quadrati cubum. Ponatur quæsitus numerus 1℞. cuius cubus 1ℭ. & zensicubus 1ȝℭ. æqualis 1ℭ + 7526792. atque ex hoc numero composito eruenda est zensicubica, hoc modo. Semissis numeri medij characteris ℭ. nimirum $\frac{1}{2}$. facit quadratum $\frac{1}{4}$. Addito numero 7526792 fit numerus 7526792 $\frac{1}{4}$. vel $\frac{30107169}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{5487}{2}$. addo semissem prædictam $\frac{1}{2}$. numeri medij characteris ℭ. facioque $\frac{5488}{2}$. id est, 2744. radicem quadratam huius numeri 1ℭ + 7526792. propter characterem ȝ. qui in maximo charactere Cossico reperitur. Huius denique radicis quadratæ 2744. radix cubica 14. propter alium characterem ℭ, in maximo charactere positum, dabit numerum quæsitum, vt cap. 12. prope finem docuimus. Huius enim cubus 2744. additus dato numero 7526792. constat suum zensicubum, vel quadrati cubum 7529536.

VI. 6 *Inuenire duos numeros constantes datum numerum, ita vt ex ductu vnius in alterum gignatur alius quiuis datus numerus.*

DATA summa sit 25. & productus numerus 84. Ponatur vnus numerus 1℞. ideoque alter 25 − 1℞ qui simul additi faciunt 25. Ex vno vero in alterum fit numerus 25℞ − 1ȝ. æqualis 84. Addito 1ȝ. vtrobique, erit æqualitas inter 25℞ & 1ȝ + 84. Ablatisque 84. vtrinque, inter 25℞ − 84. & 1ȝ. atque ex numero 25℞ − 84 elicienda est radix zensica, hac ratione. Semissis numeri radicum $\frac{25}{2}$. facit quadratum $\frac{625}{4}$. ex quo dempto numero 84. hoc est, $\frac{336}{4}$. propter signum −. remanet numerus $\frac{289}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{17}{2}$. addo prædictam semissem numeri radicum, videlicet $\frac{25}{2}$. efficioque $\frac{42}{2}$. hoc est 21. vnum ex numeris quæsitis. alter ergo erit 4. qui etiam inuenietur, si vltima radix inuenta $\frac{17}{2}$. detrahatur ex prædicta semisse numeri radicum, nimirum ex $\frac{25}{2}$. Nam numerus 25℞ − 84. duplicem radicem habet, propter signum −. quo absolutus numerus 84 afficitur. Iam duo numeri 21. & 4. inuenti faciunt summam datam 25. & ex vno in alterum procreatur datus numerus 84.

VII. 7 *Numerum inuenire, cuius zensizensus cum dato numero efficiat numerum in data proportione ad quadratum numeri inuenti.*

DATVS numerus sit 1183. inueniendusque sit alius numerus, cuius quadrati quadratus cum 1183. faciat numerum, qui ad quadratum inuenti numeri proportionem habeat, quam 176. ad 1. Ponatur quæsitus numerus 1℞ cuius zensizensus 1ȝȝ. & quadratus, siue zensus 1ȝ. Erit ergo æquatio inter 1ȝȝ + 1183. & 176ȝ. quandoquidem vnus zensizensus cum 1183. debet ad 1ȝ. proportionem habere, quam 176. ad 1. hoc est, æqualis esse 176ȝ. Ablatis igitur 1183. vtrinque, erit æquatio inter 1ȝȝ. & 176ȝ − 1183. Ex numero hoc 176ȝ − 1183. sic radicem zensizensicam eruemus. Semissis numeri medij characteris ȝ. est 88. ex cuius quadrato 7744. si tollantur 1183. propter signum −. remanent 6561. ad cuius radicem quadratam 81. si addatur prædicta semissis 88. fiet quadratus 169. cuius radix 13. dabit numerum quæsitum. Nam eius zensizensus 28561. cum dato numero 1183. facit numerum 29744. qui ad 169. quadratum inuenti numeri proportionem habet, quam 176. ad 1.

SED quoniam numerus 176ȝ − 1183. duplicem habet radicem zensizensicam, maiorem scilicet & mino

minorem, vt cap. 22. traditum est, maior est inuenta 13. quæ problemati satisfacit. Minor autem habebitur, si 81. radicem quadratam residui 6561 subtrahemus ex prædicta semisse 88. Reliqui enim numeri 7. radix quadrata, nimirum √ℨ7. erit minor radix zensizensica, numerus videlicet quæsitus. Nam eius quadratus est 7.& zensizensus 49.qui cum 1183. facit numerum 1232. qui ad quadratum 7. proportionem habet eandem, quam 176.ad 1.

8 *Numerum inuenire, cuius zensicubus cum dato numero faciat numerum, qui ad suum cubum proportionem habeat datam.* VIII.

SIT datus numerus 106866411. inueniendusque sit alius numerus, cuius zensicubus cum dato numero faciat numerum, cuius proportio ad cubum inuenti numeri proportionem habeat eandem, quam 100000. ad 1. Ponatur quæsitus numerus 1℞ cuius cubus 1ℭ. & zensicubus 1ℨℭ. Erit ergo æqualitas inter 1ℨℭ + 106866411. & 100000ℭ. quandoquidem 1ℨℭ + 106866411. ad 1ℭ, proportionem habere debet eandem, quam 100000 ad 1. Ablatis igitur 106866411. vtrobique, remanebit æqualitas inter 1ℨℭ. & 100000ℭ — 106866411. atque adeo ex 100000ℭ — 106866411. eruenda erit radix zensicubica hoc modo. Semissis numeri cuborum est 50000. à cuius quadrato 2500000000. si dematur numerus propositus, propter signum —, remanebit numerus 1431335889. ad cuius radicem quadratam 37833. si addatur semissis prædicta 50000. habebitur radix quadrata 87833. Cuius radix cubica √ℭ87833. dabit numerum quæsitum, iuxta doctrinam cap. 22. Nam eius cubus est 87833. & zensicubus 7714635889. qui cum dato numero 106866411. facit numerum 8783300000. qui ad cubum 87833. proportionem haber eandem, quam 100000. ad 1.

Et quoniam numerus 100000ℭ — 106866411. duplicem habet radicem zensicubicam, quarum maior inuenta est √ℭ87833. satisfaciens ænigmati proposito. Minor ita reperietur. Vltima radix quadrata inuenta 37833. Ex prædicta semisse 50000. numeri cuborum detrahatur. Residui namque 12167. radix cubica 23 erit minor radix satisfaciēs quoq; ænigmati proposito. Nam eius cubus est 12167.& zensicubus 148035889. qui cum dato numero 106866411. facit numerum 1216700000. qui ad cubum 12167. eandem proportionem habet, quam 100000. ad 1.

9 *Duos numeros in dato excessu inuenire, ita vt ex ductu vnius in alterum gignatur numerus datus quicunque.* IX.

SIT datus excessus 6.& numerus datus 475. Ponatur minor numerus 1℞ & maior idcirco 1℞ + 6. Ex illo in hunc fit numerus 1ℨ + 6℞ æqualis 475. Ablatis ergo 6℞. vtrobique, erit æquatio inter 1ℨ. & 475 — 6℞. Radicem ergo ex hoc numero ita eruemus. Semissis numeri radicum 3. facit quadratum 9 ad quod adiicio numerum 475. qui intelligitur affectus signo +. Et ex conflato numero 484. capio radicem quadratam 22. Ex qua demo prædictam semissem 3. numeri radicum, propter signum —. Reliquus enim numerus 19. erit pretium 1℞. Ergo 1℞ + 6. valebit 25. Atque hi duo numeri 19 & 25. sunt quæsiti. Habent enim excessum datum 6. & ex vno in alterum producitur numerus 475.

SIT rursus datus excessus 6.& datus numerus 500. Iisdem positis, erit productus numerus 1ℨ + 6℞. æqualis 500. Et ablatis 6℞ vtrinque, erit æquatio inter 1ℨ. & 500 — 6℞. Semissis numeri radicum 3. facit quadratum 9. quod additum ad 500. facit 509. à cuius radice quadrata √ℨ 509 si dematur prædicta semissis 3. fiet minor numerus quæsitus √ℨ 509 — 3. Addito dato excessu 6. fiet maior √ℨ 509 + 3. Ex minore in maiorem fit numerus 509 — 9. vt in hac formula apparet, id est, 500. quia — √ℨ 4581. & + √ℨ 4581. se mutuo interimunt. Vel certe, quia vt cap. 23. traditum est, si 9. quadratum posterioris particulæ auferatur ex 509. quadrato prioris particulæ, remanet numerus productus 500.

√ℨ 509 + 3
√ℨ 509 — 3
— √ℨ 4581 — 9
509 + √ℨ 4581
509 — 9

10 *Numerum inuenire, cuius quadrati multiplex quilibet vna cum eiusdem numeri quadrato quadrati faciat datum numerum.* X.

SIT inueniendus numerus, cuius quadrati quincuplum vna cum eiusdem quadrati quadrato efficiat 535086. Ponatur quæsitus numerus 1℞. cuius quadratus 1ℨ. quinquies sumptus facit 5ℨ. qui numerus vna cum eiusdem numeri 1℞. Zensizenso, id est, cum 1ℨℨ. æqualis esse debet numero 535086. Quoniam igitur æquatio est inter 5ℨ + 1ℨℨ. & 535086. Ablatis 5ℨ. vtrinque, remanebit æquatio inter 1ℨℨ. & 535086 — 5ℨ. atque ex 535086 — 5ℨ. elicienda est radix Zensizensica, hunc in modum. Semissis numeri Zensorum $\frac{5}{2}$. facit quadratum $\frac{25}{4}$. ad quem adiectus numerus datus 535086. facit 535086 $\frac{25}{4}$. hoc est, $\frac{2140369}{4}$. à cuius radice quadrata $\frac{1463}{2}$. si prædicta semissis $\frac{5}{2}$. dematur, propter signum —. remanebit radix quadrata $\frac{1458}{2}$. hoc est, 729. cuius radix quadrata 27. erit radix Zensizensica numeri 535086 — 5ℨ. nimirum numerus, quem inquirimus. Nam eius quadratus 729. quinquies sumptus facit 3645. qui numerus cum 531441. Zensizenso inuenti numeri 27. facit numerum datum 535086.

11 *Numerum inuenire, cuius cubus, cum eiusdem zensicubo faciat datum numerum.* XI.

SIT inueniendus numerus, cuius cubus cum eiusdem Zensicubo faciat 1291503906. Ponatur quæsitus numerus 1℞. cuius cubus 1ℭ, & Zensicubus 1ℨℭ. Oportet ergo existere æquationem inter 1ℭ + 1ℨℭ

&1291

& 1291503906. ablatoque 1ℭ vtrinque, inter 1ʒℭ. & 1291503906 − 1ℭ. Ex quo numero eruenda est radix Zensicubica, hoc modo. Semissis numeri medij Cossici est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. Si addatur datus numerus, fit numerus 1291503906 $\frac{1}{4}$. hoc est, $\frac{5166015625}{4}$. à cuius radice quadrata $\frac{71875}{2}$. si demàtur prædicta semissis $\frac{1}{2}$. remanebit radix Zensica $\frac{71874}{2}$. id est, 35937. cuius radix cubica 33. erit radix Zensicubica numeri 1291503906 − 1ℭ nimirum numerus, qui quæritur. Nam eius cubus 35937. cum eiusdem Zensicubo 1291467969. facit numerum 1291503906.

XII. 12 *Datum numerum in duas partes diuidere, vt maiore per minorem diuisa, & minore per maiorem, summa Quotientum sit data.*

NVMERVS 100. diuidendus sit in duas partes, vt maiore diuisa per minorem, & minore per maiorem, duo Quotientes faciant summam 2 $\frac{36}{91}$. Ponatur vna pars 1℞. & altera 100 − 1℞. Diuisa hac per illam, fit Quotiens $\frac{100-1℞}{1℞}$. Et illa per hanc diuisa, Quotiens fit $\frac{1℞}{100-1℞}$. quorum Quotientum summa $\frac{10000-200℞+2ʒ}{100℞-1ʒ}$. æqualis esse debet numero 2 $\frac{36}{91}$. siue $\frac{218}{91}$. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 21800℞ − 218ʒ. & 910000 − 18200℞ + 182ʒ. Additis autem 218ʒ vtrinque, fiet æquatio inter 21800℞. & 910000 − 18200℞ + 400ʒ. Et additis 18200℞ vtrobique inter 40000℞ & 910000 + 400ʒ. Et ablatis 910000. vtrobique, inter 40000℞. − 910000. & 400ʒ. Et diuisis singulis numeris per numerum signo ʒ. affectum, id est, per 400. æqualitas erit inter 100℞ − 2275. & 1ʒ. Radix ergo quadrata ita eruetur. Semissis numeri radicum est 50. à cuius quadrato 2500. si detrahantur 2275. propter signum − reliquus fiet numerus 225. ad cuius radicem quadratam 15. si addatur prædicta semissis 50. fiet pretium radicis 65. maior pars. Minor ergo erit 35. quæ etiam habebitur, (quoniam numerus propositus 100℞ − 2275. duplicem radicem habet) si radix quadrata 15 proxime inuenta auferatur ex prædicta semisse 50. Itaque partes quæsitæ sunt 65 & 35. Et diuisa illa per hanc, & hæc per illam, fiunt Quotientes 1 $\frac{6}{7}$. & $\frac{7}{13}$. quę summam faciunt 2 $\frac{36}{91}$.

XIII. 13 *Numerum inuenire, ad quem quadratus ipsius mulctatus numero dato quocunque proportionem datam habeat.*

SIT inueniendus numerus, ad quem quadratus ipsius mulctatus numero 264. proportionem habeat decuplam. Ponatur quæsitus numerus 1℞. cuius quadratus 1ʒ. si prius ab eo subducantur 264. ad 1℞. proportionem habere debeat decuplam, ita vt æquatio sit inter 10℞. & 1ʒ − 264. Et additis 264. vtrinque, inter 10℞ + 264. & 1ʒ. quæ ita expedietur. Semissis numeri radicum 5. quadratum facit 25. & additis 264. fit numerus 289. ad cuius radicem quadratam 17 si prædicta semissis 5. addatur, fit pretium vnius radicis 22. numerus videlicet quæsitus. Nam eius quadratus 484. si amiserit 264. fiet 220. qui numerus decuplus est numeri 22.

XIV. 14 *Numerum inuenire, ad quem quadratus ipsius auctus dato numero proportionem habeat datam.*

SIT inueniendus numerus, ad quem ipsius quadratus auctus numero 110. proportionem habeat, quam 27. ad 1. Ponatur numerus quæsitus 1℞. cuius quadratus 1ʒ. si ei addentur 110. ad 1℞. proportionem habere debeat eandem, quam 27. ad 1 ita vt æquatio sit inter 1ʒ + 110. & 27℞. Ablatisque 110. vtrinque, inter 1ʒ. & 27℞ − 110. quam ita resolues. Semissis numeri radicum $\frac{27}{2}$. quadratum facit $\frac{729}{4}$. à quo si auferantur 110 id est, $\frac{440}{4}$. reliquus fit numerus $\frac{289}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{17}{2}$. si addetur prædicta semissis $\frac{27}{2}$. fiet maior radix $\frac{44}{2}$. id est, 22. Et si proxime inuenta radix $\frac{17}{2}$. auferetur à prædicta semisse $\frac{27}{2}$. reliqua fiet minor radix $\frac{10}{2}$. hoc est, 5. Nam hæc æquatio duplicem habet radicem. Atque ita vterque numerus 22. & 5. problemati proposito satisfaciet. Quadratus enim 484. numeri 22. auctus numero 110. fit numerus 594. qui ad 22 eandem proportionem habet, quam 27. ad 1. Item quadratus 25. numeri 5. auctus numero 110. fit 135. qui numerus ad 5. proportionem eandem habet, quam 27. ad 1.

XV. 15 *Duos numeros inuenire, quorum quadrati datam summam conficiant: & iidem numeri inter se multiplicati producant numerum, ad quem quadratorum summa habeat proportionem datam.*

SVMMA quadratorum data sit 180 quæ ad productum numerum proportionem habeat duplam sesquialteram: atque idcirco cum 180. ad 72. habeant proportionem duplam sesquialteram, productus numerus ex vno in alterum sit 72. qui numerus 72. habetur, si 180. diuidantur per 2 $\frac{1}{2}$. denominatorem datæ proportionis. Ponatur vnus numerus quæsitus 1℞ & alter $\frac{72}{1℞}$. vt ex vno in alterum fiant 72. qui numerus $\frac{72}{1℞}$. habetur per diuisionem 72. per 1℞. quemadmodum si inueniendus sit numerus, qui ductus in 8. faciat 48. si diuidantur 48. per 8. inuenitur numerus 6. qui ductus in 8. facit 48. Iam quadrati positorum numerorum 1℞ & $\frac{72}{1℞}$. sunt 1ʒ. & $\frac{5184}{1ʒ}$. quorum summa $\frac{1ʒʒ+5184}{1ʒ}$. æqualis esse debet 180. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 1ʒʒ + 5184. & 180ʒ. Ablatisque 5184. vtrinque, erit æquatio inter 1ʒʒ. & 180ʒ − 5184. cuius radicem ita inuenies. Semissis numeri medij, qui gerit characterem ʒ. est 90. a cuius quadrato 8100. si demantur 5184. fiet reliquus numerus 2916. ad cuius radicem 54. si addatur se-

tur semissis prædicta 90. fiet summa 144. cuius radix quadrata 12. iuxta doctrinam cap. 12. erit maior radix. Et si proxime inuentam radicem 54. demes ex semisse prædicta 90. reliquus erit numerus 36. cuius radix 6. dabit minorem radicem. quæ etiam habetur, si 72. diuidantur per priorem radicem inuentam 12. Itaque duo quæsiti numeri sunt 12. & 6. qui inter se multiplicati faciunt 72. ad quem numerum summa data quadratorum ex ipsis procreatorum, qui sunt 144. & 36. nimirum 180. proportionem habet duplam sesquialteram, quemadmodum propositum est.

16 *Datum numerum in tres numeros continue proportionales diuidere, ita vt productus ex primo in secundum, cum producto ex secundo in tertium, vna cum eo, qui fit ex tertio in primum faciat quemlibet numerum datum.* XVI.

SIT datus numerus 76. diuidendus, ita vt tres producti efficiant 1824. Quoniam datis tribus numeris continue proportionalibus, [a] qui fit ex medio in summam omnium, æqualis est eis, qui fiunt ex medio in *[a] 1. secun.* primum, & ex medio in tertium, & ex medio in se, hoc est, ex tertio in primum, [b] cum hic æqualis sit ei, qui fit *[b] 20. sept.* ex medio in se: si datus numerus producendus 1824. per datum numerum diuidendum 76. diuidatur, erit Quotiens 24. medius numerus proportionalis: quippe cũ Quotiens 24. ductus in diuisorẽ 76. id est, in summã omnium trium, gignat numerum diuisum 1824. qui nimirum æqualis ponitur tribus productis, quos diximus. Dempto ergo hoc medio 24. ex 76. summa omnium, reliqua fiet summa primi & tert:j, 52. Ponatur ergo primus 1℞. eritque propterea tertius 52 — 1℞. ita vt tres numeri proportionales sint 1℞. 24. 52 — 1℞. [c] Igitur *[c] 20. sept.* qui fit ex 1℞ in 52 — 1℞. id est, 52℞ — 1ʒ. æqualis erit numero 576. qui ex medio 24. fit in se. Addito ergo 1ʒ vtrinque, erit æquatio inter 52℞ & 1ʒ + 576. Ablatisque 578. vtrobique, inter 52℞ — 576. & 1ʒ. quæ æquatio ita resoluetur. Semissis numeri radicum est 26. à cuius quadrato 676. si demantur 576. remanet numerus 100. ad cuius radicem quadratam 10. si addatur prædicta semissis 26. fiet pretium radicis 36. primus numerus. tertius autem erit 16. nimirum 52 — 1℞. ita vt tres numeri proportionales sint, 36. 24. 16. facientes summam 76. & tres producti ex primo in secundum, & ex secundo in tertium, & ex tertio in primum efficiunt 1824.

Quoniam vero numerus 52℞ — 576. duplicem habet radicem, reperietur minor, si radicem quadratam inuentam 10. ex prædicta semisse 26. auferatur. Relinquetur enim pretium vnius radicis 16. primus numerus, tertius autem erit 36. nimirum 52 — 1℞. Eruntque rursum tres numeri proportionales 16. 24. 36. qui prius, inuerso tamen ordine.

17 *Datis duobus numeris siue æqualibus, siue inæqualibus, alium inuenire, qui vtrilibet eorum additus faciat summam, quæ ducta in additum, hoc est, in inuentum, producat quadratum alterius numeri.* XVII

HOC problema soluimus in lineis, in scholio propos. 36. lib. 3. Euclidis.

SINT dati duo numeri 10. & 12. inueniendusque sit alius, qui additus primum ad 10. faciat numerum, qui ductus in additum, procreet quadratum alterius 12. nimirum 144. Ponatur numerus quæsitus 1℞. Addito numero 10. fit numerus 1℞ + 10. qui ductus in 1℞ facit 1ʒ + 10℞. qui numerus æqualis esse debet 144. Ablatis 10℞ vtrobique, erit æquatio inter 1ʒ. & 144 — 10℞. quam ita resolues. Semissis numeri radicum 5 facit quadratum 25. & additis 144. fit numerus 169. à cuius radice quadrata 13. si prædicta semissis 5. auferatur, propter signum —. remanebit pretium radicis 8. numerus quæsitus. Hic enim additus ad 10. facit 18. qui numerus ductus in 8. facit 144. quadratum alterius numeri dati 12.

DEINDE inueniendus sit numerus, qui additus ad 12. faciat numerum, qui ductus in additum producat 100. quadratum alterius numeri 10. Ponatur quæsitus numerus 1℞ qui cum 12. facit 1℞ + 12. Hic ductus in 1℞. facit numerum 1ʒ + 12℞. æqualem 100. Ablatis 12℞. vtrobique, erit æquatio inter 1ʒ. & 100 — 12℞. quam ita resolues. Semissis numeri radicum 6. facit quadratum 36. additisque 100. fit numerus 136. à cuius radice quadrata √ʒ 136. si detrahes semissem prædictam 6. relinquetur pretium radicis, √ʒ 136 — 6. numerus quæsitus. Hic enim additus ad 12. facit √ʒ 136 + 6. qui numerus ductus in inuentum √ʒ 136 — 6. producit numerum 100. quæ quidem multiplicatio perficietur, vt cap. 23. scripsimus, si quadratum posterioris particulæ 6 nimirum 36. auferatur ex 136. quadrato prioris particulæ.

SINT denique duo numeri æquales 8. & 8. ponaturq; inuentus 1℞. Ex 1℞. & 8. fit numerus 1℞ + 8. qui ductus in 1℞ facit 1ʒ + 8℞. numerum æqualem 64 quadrato numeri 8. Ablatis 8℞ vtrobique, erit æquatio inter 1ʒ. & 64 — 8℞. Semissis numeri radicum est 4. ad cuius quadratum 16. additis 64. fit numerus 80. à cuius radice quadrata √ʒ 80. si dematur prædicta semissis 4. remanet numerus √ʒ 80 — 4. qui quæritur. Hic additus ad 8 facit summam √ʒ 80 + 4. quę ducta in inuentum, vel additum √ʒ 80 — 4. facit 64. quadratum numeri 8. vt hæc sequens formula docet. Nam 16. quadratus posterioris particulæ 4. ablatus ex 80. quadrato prioris particulæ √ʒ 80. relinquit 64.

$$\begin{array}{c} \sqrt{ʒ}\ 80 - 4 \\ \sqrt{ʒ}\ 80 + 4 \\ \hline 64 \end{array}$$

ad cuius quadratum $\frac{169}{4}$. additis 30. siue $\frac{120}{4}$. fit numerus $\frac{289}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{17}{2}$. si addatur semissis prædicta $\frac{13}{2}$. fiet 1℞ $\frac{30}{2}$. id est, 15. numerus, qui quæritur. Ergo duo numeri maiores erunt 22. & 34. qui inter se multiplicati faciunt numerum 748. qui triplum quadrati 225. ex inuento numero 15. procreati, nimirum numerum 675. superat numero 73.

21 *Numerum inuenire, cuius multiplex quiuis cum eiusdem numeri quadrato faciat datum numerum.* XXI.

SIT inueniendus numerus, cuius quadruplum cum eiusdem quadrato faciat 400. Ponatur numerus, quem quærimus 1℞. Huius quadruplum 4℞. cum eiusdem quadrato 1ʒ. facit numerum 1ʒ + 4℞. æqualem 400. Subtractis 4℞. vtrinque, erit æquatio inter 1ʒ & 400 − 4℞. Semissis numeri radicum est 2. ad cuius quadratum 4 additis 400. fit numerus 404. à cuius radice quadrata √ʒ 404. si prædicta semissis 2. dematur, fiet 1℞ √ʒ 404 − 2. numerus quæsitus. Eius quadruplum √ʒ 6464 − 8. vna cum eius quadrato, quod

| | | | |
|---|---|---|---|
| | √ʒ 404 | — 2 | |
| | √ʒ 404 | — 2 | |
| | — √ʒ 1616 | + 4 | |
| 404 | — √ʒ 1616 | | |
| 404 | — √ʒ 6464 | + 4 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 404 | — √ʒ 6464 | + 4 | |
| | + √ʒ 6464 | — 8 | |
| 404 | | — 4 | |

est 404 − √ʒ 6464 + 4. (vt in apposita formula liquet) facit numerum 404 − 4. hoc est, 400. quia − √ʒ 6464. & + √ʒ 6464. se mutuo interimunt, vt altera formula monstrat.

ITEM sit inquirendus numerus, cuius quadruplum cum eiusdem quadrato faciat 780. Posita 1℞ erit eius quadruplum 4℞ vna cum eius quadrato 1ʒ numerus 1ʒ + 4℞. æqualis 780. Subtractisque 4℞ vtrinque, erit æquatio inter 1ʒ. & 780 — 4℞. Semissis numeri radicum est 2. ad cuius quadratum 4. additis 780. fit numerus 784. à cuius radice quadrata 28. si tollatur prædicta semissis 2 fiet 1℞ 26. numerus, quem inquirimus. Eius quadruplum 104. vna cum eiusdem quadrato 676. facit 780.

## SCHOLIVM.

*EADEM via inuenietur numerus, qui cum suo quadrato conficiat datum quemcunque numerum. Sit enim inquirendus numerus, qui cum suo quadrato faciat 400. Posita enim 1℞ pro numero quæsito, faciet is cum suo quadrato, id est, cum 1ʒ numerum 1ʒ + 1℞. æqualem dato numero 400. Dempta 1℞. vtrinque, erit æquatio inter 1ʒ. & 400 — 1℞. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. si addantur 400. hoc est, $\frac{1600}{4}$. fiunt $\frac{1601}{4}$. à cuius radice quadrata, id est, à √ʒ $\frac{1601}{4}$. si tollatur semissis numeri radicum, nimirum $\frac{1}{2}$. fiet pretium radicis √ʒ $\frac{1601}{4}$ — $\frac{1}{2}$. numerus quæsitus. Eius enim quadratum est $\frac{1601}{4}$ — √ʒ $\frac{6404}{16}$. vt apposita formula docet. Cum hoc quadrato numerus inuentus √ʒ $\frac{1601}{4}$ — $\frac{1}{2}$. facit 400 numerum datum. Nam $\frac{1602}{4}$. & — $\frac{1}{2}$. siue $\frac{2}{4}$. faciunt $\frac{1600}{4}$. hoc est, 400 & — √ʒ $\frac{6404}{16}$. & + √ʒ $\frac{1601}{4}$. se mutuo interimunt, cum sint æquales. vt patet per multiplicationem in crucem. Numerator enim vterlibet in denominatorem alterius minutiæ ductus producit 25616.*

[illegible]

Summa. [illegible]

22 *Dato quouis numero, duos alios inuenire, qui inter se multiplicati producant datum ipsum numerum, & quadrati omnium trium faciant datam summam quamcunque.* XXII.

SIT datus numerus 8. inueniendique sint alij duo, qui inter se multiplicati faciant ipsum numerum 8. & quadrati omnium trium faciant 101 $\frac{7}{9}$. oportet quadratos duorum numerorum inuentorum facere 37 $\frac{7}{9}$ vt patet. si dati numeri 8. quadratus 64. detrahatur ex 101 $\frac{7}{9}$. summa omnium trium. Ponatur vnus numerorum, qui quæruntur 1℞. Et quia alter in hunc ductus debet facere 8. si 8. diuidantur per 1℞. erit Quotiens $\frac{8}{1℞}$ alter numerus. Nam ductus in diuisorem 1℞. producet 8. Quadrati horum duorum numerorum 1℞. & $\frac{8}{1℞}$. sunt 1ʒ & $\frac{64}{1ʒ}$. qui summam faciunt $\frac{1ʒʒ + 64}{1ʒ}$. æqualem 37 $\frac{7}{9}$. siue $\frac{340}{9}$. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 9ʒʒ + 576. & 340ʒ. Ablatisque 576. vtrobique, erit æquatio inter 9ʒʒ. & 340ʒ — 576. Diuisis omnibus numeris per numerum 9. charactere maximo ʒʒ insignitum, fiet æquatio inter 1ʒʒ. & $\frac{340}{9}$ ʒ — 64. Semissis numeri Zensorum est $\frac{340}{18}$. à cuius quadrato [illegible]. hoc est, 356 [illegible]. Si demantur 64. remanent 292 $\frac{256}{324}$. hoc est, $\frac{94864}{324}$. ad cuius radicem quadratam [illegible] si addatur prædicta semissis Zensorū $\frac{340}{18}$. fiet 1ʒ $\frac{648}{18}$. (quia inter Cossicos numeros binos medij sunt singuli) hoc est, 36. cuius radix quadrata 6 erit vnus numerorum, quem posuimus 1℞ ac proinde alter numerus, quem posuimus [illegible] hoc est, 8. diuisa per 1℞. nimirum per 6. erit 1 $\frac{1}{3}$. Qui etiam hoc modo reperietur. Quoniam numerus [illegible] ʒ — 64. duplicem habet radicē, si radix quadrata $\frac{308}{18}$ vltimo loco inuenta tollatur ex prædicta semissi [illegible] reliquus erit alter Zensus $\frac{32}{18}$. siue $\frac{16}{9}$. cuius radix quadrata $\frac{4}{3}$ siue 1 $\frac{1}{3}$. offeret alterum numerum. Itaque duo numeri quæsiti sunt 6. & 1 $\frac{1}{3}$. qui inter se multiplicati faciunt 8. & eorum quadrati 36 & $\frac{16}{9}$. siue 1 [illegible]. faciunt 37 [illegible] ac proinde quadrati omnium trium numerorum 8. 6. 1 $\frac{1}{3}$. faciunt summam 101 $\frac{7}{9}$.

XXIII. 23 *Duos numeros inuenire datam efficientes summam, & qui inter se multiplicati producant datum numerum, qui maior non sit quadrato ex semisse datæ summæ descripto.*

VEL

*Datum numerum in duos distribuere, vt ex vno in alterum gignatur datus quicunque numerus, qui maior non sit quadrato semissis dati numeri.*

QVÆRENDI sint duo numeri conficientes summam 100. Vel (quod idem est.) Datus numerus 100 secandus sit in duos, qui inter se multiplicati faciant 10. Ponatur vnus numerus 1℞. ideoque alter 100 — 1℞. Hi inter se multiplicati faciunt numerum 100℞ — 1ʒ. æqualem 10. Addito 1ʒ. vtrinque, erit æqualitas inter 100℞. & 10 + 1ʒ. Ablatisque 10. vtrobique, inter 100℞ — 10. & 1ʒ. Semissis numeri radicum est 50. à cuius quadrato 2500. ablatis 10. remanet numerus 2490. ad cuius radicem quadratam √ʒ 2490. si addatur prædicta semissis 50. fiet 1℞. √ʒ 2490 + 50. vnus numerorum, quem posuimus 1℞. Alter ergo erit 100 — √ʒ 2490 + 50. hoc est, 100. demptis √ʒ 2490 + 50. qui numerus est 50 — √ʒ 2490. Nam ablatis √ʒ 2490 + 50. ex √ʒ 0 + 100. remanent — √ʒ 2490 + 50. hoc est, 50 — √ʒ 2490. vt

√ʒ 0 + 100
√ʒ 2490 + 50
— √ʒ 2490 + 50

hæc formula indicat. Itaque duo numeri quæsiti sunt √ʒ 2490 + 50. & 50 — √ʒ 2490. qui faciunt summam 100. quippe cum + √ʒ 2490. & — √ʒ 2490. se mutuo destruant. Et ex vno in alterum, hoc est, ex 50 + √ʒ 2490. in 50 — √ʒ 2490. gignitur numerus 10. vt hæc formula indicat. quæ multiplicatio fit, si quadratum 2490. posterioris particulæ dematur ex 2500. quadrato particulæ prioris, vt cap. 23. dictum est.

50 + √ʒ 2490
50 — √ʒ 2490
10

QVONIAM vero æquatio inuenta duplicem habet radicem, inueniemus eosdem numeros per alteram radicem minorem. Si namque radix quadrata √ʒ 2490. vltimo loco inuenta dematur ex prædicta semisse 50. fiet 1℞. 50 — √ʒ 2490. vnus videlicet numerorum, quos quærimus. alter erit 50 + √ʒ 2490. qui nimirum remanet, si numerus 50 — √ʒ 2490 detrahatur ex 100. vt in hac formula vides. Atq; ita inuenti sunt iidem numeri 50 — √ʒ 2490. & 50 + √ʒ 2490. ordine tamen inuerso.

100 + √ʒ 0
50 — √ʒ 2490
50 + √ʒ 2490

DEBET autem numerus productus datus non maior esse quadrato, qui ex semisse datæ summæ, vel dati numeri gignitur. quia quadratus semissis maior est, numero, qui ex partibus inæqualibus producitur, [a] cum hic vna cum quadrato intermediæ sectionis æqualis sit illi quadrato. Vnde numerus 12. diuidi non potest in duas partes, vt ex earum multiplicatione producatur numerus 40. Id quod pulchre nos docet æquatio. Posita enim vna parte 1℞. & altera 12 — 1℞. fiet æquatio inter 1ʒ. & 12℞ — 40. Et quia ex 36. quadrato semissis numeri radicum auferri nequit numerus absolutus 40. pronunciabis, quæstionem esse impossibilem.

[a] schol. 14 [illegible] noni.

XXIV. 24 *Numerum inuenire, cuius quadratus ab alio numero superetur dato numero, & alium excedat alio numero dato: ita vt extremi inter se multiplicati producant datum quemlibet numerum.*

QVÆRENDVS sit numerus, cuius quadratus superetur quinario ab alio numero, & alium quendam superet binario, & duo extremi inter se multiplicati faciant 2538. Ponatur numerus ille 1℞. cuius quadratus 1ʒ. Maior ergo erit 1ʒ + 5. & minor 1ʒ — 2. qui duo inter se multiplicati gignunt numerum 1ʒʒ + 3ʒ — 10 æqualem 2538. Additisque 10. vtrobique, erit æquatio inter 1ʒʒ + 3ʒ. & 2548. Et ablatis 3ʒ. vtrinque, inter 1ʒʒ. & 2548 — 3ʒ. Quærenda ergo est radix Zensizensica, hoc modo. Semissis numeri Zensorum est $\frac{3}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{9}{4}$. additis 2548. siue $\frac{10192}{4}$. fit numerus $\frac{10201}{4}$. à cuius radice quadrata $\frac{101}{2}$. si dematur prædicta semissis [illegible]. remanet numerus $\frac{98}{2}$. hoc est, 49. cuius radix quadrata 7. dabit numerum quæsitum. Eius enim quadratus 49. est inter 54. quinario maiorem, & 47. binario minorem, fitque ex 47. in 54. numerus datus 2538.

XXV. 25 *Numerum inuenire, à cuius quadrato quadrati subtracti quotuis quadrati eiusdem numeri, relinquant datum numerum quemcunque.*

QVÆRENDVS sit numerus, cuius quatuor quadrati subtracti ab eiusdem quadrato quadrati relinquant 2205. Ponatur numerus 1℞. cuius quadratus 1ʒ. & quatuor quadrati 4ʒ. detracti ex 1ʒʒ. nimirũ ex quadrati quadrato positi numeri 1℞ relinquunt numerum 1ʒʒ — 4ʒ æqualem 2205. Additisque 4ʒ. vtrobique, erit æquatio inter 1ʒʒ. & 4ʒ + 2205. Eruenda ergo est radix zensizensica hoc modo. Semissis numeri zensorum est 2. ad cuius quadratum 4 additis 2205. fit numerus 2209. ad cuius radicem quadratam 47. addita prædicta semisse 2 fit numerus 49. cuius radix quadrata 7. dabit numerum, qui quæritur. Eius enim quatuor quadrati 196. dempti ex eiusdem zensizenso 2401. relinquunt 2205. numerum datum.

XXVI. 26 *Duos numeros inuenire, qui inter se multiplicati gignant numerũ datũ, & summa quadratorum eiusdem numeris procreatorum sit etiam data.*

DVO numeri inuenti faciant inter se multiplicati 78. & eorum quadrati summam 205. Quoniam, vt in se-

in sequenti Lemmate demonstrabimus, duo numeri se multiplicantes producunt numerum medio loco proportionalem inter quadratos eorundem numerorum: si minor quadratus ponatur 1ȝ. ideoque maior 205 — 1ȝ. erit numerus 78. medio loco proportionalis inter quadratos 1ȝ. & 205 — 1ȝ. [a] ac proinde numerus 205ȝ — 1ȝȝ. product' ex 1ȝ. in 205 — 1ȝ. æqualis erit quadrato numeri medij 78. hoc est, numero 6084. Addito ergo 1ȝȝ vtrinque, erit æquatio inter 1ȝȝ + 6084. & 205ȝ. Ablatisq; 6084. vtrobique, inter 1ȝȝ. & 205ȝ — 6084. Eruenda ergo est radix Zensizensica. quod ita fiet. Semissis numeri Zensorum est $\frac{205}{2}$. ex cuius quadrato $\frac{42025}{4}$. ablatis 6084. siue $\frac{24336}{4}$. remanent $\frac{17689}{4}$. ad cuius numeri radicem quadratam $\frac{133}{2}$. si addatur prædicta semissis $\frac{205}{2}$. fiet numerus $\frac{338}{2}$. hoc est, 169. vnus quadratus, cuius radix 13. dabit vnum numerorum, nimirum maiorem. Et quia numerus 205ȝ — 6084. duplicem habet radicem, inuenietur altera radix, si radicem vltimo loco inuentam $\frac{133}{2}$. detrahemus ex prædicta semisse $\frac{205}{2}$. Reliquus enim numerus $\frac{72}{2}$. id est, 36. dabit minorem quadratum, cuius radix 6. dabit alterum numerorum. Sunt ergo duo numeri inuenti 6. & 13. qui inter se multiplicati faciunt 78. & eorum quadrati 36. & 169. faciunt summam 205. a 20. sept.

IN numeris irrationalibus idem hoc problema expedietur, si duo numeri inueniendi sint, qui inter se multiplicati faciant 100. & summa quadratorum sit 300. Posito enim vno quadrato 1ȝ. erit alter 300 — 1ȝ. inter quos numerus 100. erit medius proportionalis, vt ex sequenti Lemmate constabit. Ex 1ȝ. in 300 — 1ȝ. fit numerus 300ȝ — 1ȝȝ. [b] æqualis numero 10000. qui fit ex medio 100. in se. Addito ergo 1ȝȝ. vtrinque, erit æquatio inter 1ȝȝ + 10000. & 300ȝ. Et ablatis 10000. vtrobique. inter 1ȝȝ. & 300ȝ — 10000. Eruenda ergo hic etiam erit duplex radix Zensizensica, hoc videlicet modo. Semissis numeri Zensorum est 150. à cuius quadrato 22500. demptis 10000. remanet numerus 12500. ad cuius radicem quadratam √ȝ 12500. si addetur prædicta semissis 150. fiet maior quadratus √ȝ 12500 + 150. cuius radix quadrata, nimirum √ȝ (√ȝ 12500 + 150) dabit maiorem numerum. Et si radix illa √ȝ 12500. tolletur ex semisse prædicta 150. reliquus erit minor quadratus 150 — √ȝ 12500. cuius radix quadrata √ȝ (150 — √ȝ 12500) dabit minorem numerum quæsitum. Nam ex maiore radice √ȝ (√ȝ 12500 + 150) in minorem radicem √ȝ (150 — √ȝ 12500) si nimirum earum quadrata inter se multiplicentur, vt cap. 24. dictum est, & in hac formula apparet, fit nume- b 20. sept.

$$\begin{array}{r} \sqrt{ȝ}\,(\sqrt{ȝ}\ 12500 + 150) \\ \sqrt{ȝ}\,(150 - \sqrt{ȝ}\ 12500) \\ \hline - 12500 - \sqrt{ȝ}\ 281250000 \\ + \sqrt{ȝ}\ 281250000 + 22500 \qquad\qquad \\ \hline \text{Productus. } \sqrt{ȝ}\ 10000 \end{array}$$

rus √ȝ 10000. hoc est, datus numerus 100. Item quadrati √ȝ 12500 + 150. & 150 — √ȝ 12500. faciunt summam 300. vt manifestum est.

PRÆDICTA autem multiplicatio facilius conficietur, per ea, quæ cap. 23. dicta sunt, si numeri multiplicandi ita constituantur. Nam si 12500. quadratum posterioris particulæ dematur ex 22500. quadrato particulæ prioris 150. remanebit numerus 10000. Præposito ergo signo √ȝ. fiet productus numerus √ȝ 10000.

$$\begin{array}{c} \sqrt{ȝ}\,(150 + \sqrt{ȝ}\ 12500) \\ \sqrt{ȝ}\,(150 - \sqrt{ȝ}\ 12500) \\ \hline \sqrt{ȝ}\ 10000 \end{array}$$

## LEMMA.

*DVO numeri inter se multiplicati procreant numerum medium proportionalem inter eorum quadratos, in proportione ipsorum numerorum.*

*SINT enim duo numeri A, & B. Ex A, in B, fiat C, & ex A, in se, fiat quadratus D, & ex B, in se quadratus E. Dico C medium proportionalem esse inter D, & E; id est, E, C, D, esse continue proportionales in proportione B, ad A. Quoniam enim A, multiplicans B, & A, fecit C, & D; [c] erit C, ad D, vt B, ad A. Item quia multiplicans B, & A, fecit E, & C; [d] erit quoque E, ad C, vt B, ad A. Igitur E, C, D, continue proportionales sunt in proportione B, ad A. quod est propositum.* c [illegible] sept. d [illegible] sept.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A. | 3. | B. | 4. | | |
| D. | 9. | C. | 12. | E. | 16. |

## COROLLARIVM.

HINC fit, si duo numeri se mutuo multiplicantes producunt aliquem numerum, quadratos ipsorum numerorum se mutuo multiplicantes producere quadratum numeri producti. Cum enim numerus 12. ex 3. in 4. productus sit medio loco proportionalis inter eorum quadratos 9. & 16. [e] fiet ex 9 in 16. quadratus numeri 12. e [illegible]

## SCHOLIVM.

*IDEM hoc ænigma 26. soluetur sine præcedenti Lemmate, hac ratione. Ponatur in priori exemplo vnus numerorum 1ℛ. ideoque alter erit $\frac{78}{1ℛ}$. vt ex mutua eorum multiplicatione producatur numerus 78. Quadrati eorum 1ȝ. & [illegible] faciunt summam $\frac{1ȝȝ + 6084}{1ȝ}$. æqualem 205. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 1ȝȝ + 6084. & 205ȝ. Ablatisque 6084. vtrinque, erit æquatio inter 1ȝȝ & 205ȝ — 6084. vt prius*

*RVRSVS in posteriori exemplo ponatur vnus numerorum 1ℛ eritque alter [illegible]. vt eorum multiplicatio faciat 100.*

*Quadrati eorum 1ȝ. & $\frac{10000}{1ȝ}$. faciunt summam $\frac{1ȝȝ+10000}{1ȝ}$. æqualem 300 quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 1ȝȝ + 10000. & 300ȝ. Ablatuque 10000. vtrobique, erit æquatio inter 1ȝȝ. & 300ȝ — 10000. vt supra.*

XXVII. 27 *Duos numeros inuenire facientes summam datam, quorum quadrati faciant quoque datam summam.*

SIT summa numerorum 19. & quadratorum 205. Ponatur primus numerus 1℞. ideoque secundus 19 — 1℞. Quadrati eorum 1ȝ. & 361 — 38℞ + 1ȝ faciunt summam 361 — 38℞ + 2ȝ. æqualem 205. Additis 38℞ vtrobique, erit æquatio inter 361 + 2ȝ. & 38℞ + 205. Et ablatis 205. vtrinque, inter 156 + 2ȝ. & 38℞ Et rursum ablatis 156. vtrinque, inter 2ȝ. & 38℞ — 156. Diuisisque omnibus per 2. numerum zensorum, erit æquatio inter 1ȝ. & 19℞ — 78. quam ita resolues. Semissis numeri radicum est $\frac{19}{2}$. ex cuius quadrato $\frac{361}{4}$. detractis 78. hoc est, $\frac{312}{4}$. remanet numerus $\frac{49}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{7}{2}$. si addatur prædicta semissis $\frac{19}{2}$. fiet maior radix (quia numerus Cossicus duas radices habet) $\frac{26}{2}$ id est, 13. primus numerus quæsitus. Secundus ergo erit 6. nimirum 19 — 1℞. quia numerus 6. erit quoq; minor radix, quæ habebitur, si vltima radix inuenta $\frac{7}{2}$. ex prædicta semisse $\frac{19}{2}$. detraharur, remanet enim numerus $\frac{12}{2}$. siue 6. Numeri ergo qui quæruntur, sunt 13. & 6. quorum summa 19. & summa quadratorum 205.

RVRSVM summa numerorum sit 30. & quadratorum 600. Posito primo numero 1℞. & secundo 30 — 1℞. facient quadrati summam 900 — 60℞ + 2ȝ. æqualem 600. Additis 60℞. vtrinque, erit æquatio inter 900 + 2ȝ. & 60℞ + 600. Et ablatis 600. vtrobique, inter 300 + 2ȝ. & 60℞. Et rursum ablatis 300. vtrinque, inter 2ȝ. & 60℞ — 300. Diuisisque omnibus numeris per 2. numerum Zensorum, æquatio erit inter 1ȝ. & 30℞ — 150. cuius radix ita nota fiet. Semissis numeri radicum est 15. à cuius quadrato 225. demptis 150. remanet numerus 75. ad cuius radicem quadratam √ȝ 75. si addetur prædicta semissis 15. fiet maior radix √ȝ 75 + 15. prior numerus, qui positus est 1℞. Et si eadem radix quadrata √ȝ 75. tolletur ex prædicta semisse 15. reliqua fiet minor radix 15 — √ȝ 75. qui numerus æqualis est posteriori numero 30 — 1℞. Nam si ex 30. detrahatur radix inuenta √ȝ 75 + 15. remanebit numerus 15 — √ȝ 75. vt hæc formula docet. Eruntque duo numeri quæsiti √ȝ 75 + 15. & 15 — √ȝ 75. quorum summa est 30. & quadratorum summa 600. vt duæ hæ formulæ indicant.

30 + √ȝ 0
15 + √ȝ 75
15 — √ȝ 75

√ȝ 75 + 15
√ȝ 75 + 15
+ √ȝ 16875 + 225
75 + √ȝ 16875
300 + √ȝ 67500

15 — √ȝ 75
15 — √ȝ 75
— √ȝ 16875 + 75
225 — √ȝ 16875
300 — √ȝ 67500

DEBET autem summa quadratorum esse maior semisse quadrati, qui ex data summa numerorum gignitur, & minor quadrato eiusdem summæ. Itaque si summa numerorum proponererur 30. & quadratorum 400. foret quæstio impossibilis. Nam summa quadratorum maior non est semisse quadrati 900. ex data summa 30 producti Atque ita occurreret vltima æquatio inter 1ȝ. & 30℞ — 250. quæ resolui nequit. Nam ex 225 quadrato semissis numeri radicum auferri non possunt 250. &c.

QVOD si quadratorum summa sit maior quadrato summæ numerorum propositorum, solui etiam non poterit problema, nisi concedamus, vnum numerum esse maiorem ipsa summa, & alterum minorem nihilo. Vt si summa detur 40 & summa quadratorum 1602. Ponemus vnum numerũ 1℞. & alterum 40 — 1℞. Quadrati eorum 1ȝ. & 1600 — 80℞ + 1ȝ. faciunt summam 1600 — 80℞ + 2ȝ. æqualem 1602. Additis 80℞ vtrobique, erit æquatio inter 1600 + 2ȝ. & 80℞ + 1602. Et ablatis 1600. vtrinque, inter 2ȝ. & 80℞ + 2. Diuisisque omnibus per 2. numerum Zensorum, inter 1ȝ. & 40℞ + 1. Iam semissis numeri radicum est 20. ad cuius quadratum 400. si addatur 1. fiunt 401 Et si ad √ȝ 401. addatur prædicta semissis 20. fiet 1℞. 20 + √ȝ 401. prior numerus, quem posuimus 1℞. qui demptus ex 40. reliquus fiet numerus posterior 20 — √ȝ 401. vt in hac formula videre licet. Vbi vides priorem numerum 20 + √ȝ 401. maiorem esse, quam 40. cum √ȝ 401. maior sit quam 20. posteriorem vero 20 — √ȝ 401. minorem esse nihilo, nimirum 20. — 20 $\frac{1}{41}$; quorum vtrumque ineptum est. Et tamen quæstioni satisfaciunt. Nam simul efficiunt summam 40. cum + √ȝ 401. & — √ȝ 401. se mutuo interimant: & eorum quadrati 801 + √ȝ 641600. & 801 — √ȝ 641600. summam faciant 1602. Simile quid habuisti in ænigmate 149. superioris capitis Vides ergo, numeros minores nihilo non esse frustra excogitatos quippe cum per illos ænigmata quoque dissoluantur.

40 + √ȝ 0
20 + √ȝ 401
20 — √ȝ 401

XXVIII. 28 *Datum numerum in duos partiri, vt eorum quadrati datam summam efficiant.*

HIC nihil aliud quæritur, nisi vt duo numeri inueniantur efficientes datum numerum, ita vt eorum quadrati efficiant quoque datam summam. quod in antecedenti ænigmate factum est.

XXIX. 29 *Datum numerum in tres numeros continue proportionales partiri, quorum medius datus sit; cuius tamen quadratus maior non sit quadrato semissis illius numeri, qui relinquitur, detracto dato medio ex dato numero.*

SIT numerus 283. diuidendus in tres continue proportionales, quorum medius sit 78. Ponatur primus nume-

numerus 1℞ ac proinde tertius 205 — 1℞. vt duo hi faciant simul 205. qui numerus relinquitur, detracto dato medio 78. ex dato numero 283. Ex primo 1℞. in tertium 205 — 1℞. fit numerus 205℞ — 1ȝ. [a] qui æqualis erit quadrato medij, numero videlicet 6084. Addito ergo 1ȝ. vtrobique. erit æquatio inter 205℞ & 1ȝ + 6084. Et ablatis 6084. vtrinque inter 205℞ — 6084. & 1ȝ. quæ æquatio ita resoluetur. Semissis numeri radicum est $\frac{205}{2}$. à cuius quadrato $\frac{42025}{4}$. si demantur 6084. hoc est, $\frac{24336}{4}$. remanebit numerus $\frac{17689}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{133}{2}$. si addatur semissis prædicta $\frac{205}{2}$. fiet maior radix $\frac{338}{2}$. hoc est, 169. Et si prædicta radix $\frac{133}{2}$. tollatur ex prædicta semisse $\frac{205}{2}$. relinquetur minor radix $\frac{72}{2}$. id est 36. Sunt ergo tres numeri continue proportionales 36 78. 169. [a] 20. septi.

SIT rursum datus numerus 100. diuidendus in tres continue proportionales, quorum medius sit 30. Ponatur primus 1℞. ac proinde tertius 70 — 1℞. vt duo hi faciant simul 70 qui numerus relinquitur, detracto dato medio 30. ex dato numero 100. Ex primo 1℞. in tertium 70 — 1℞ fit numerus 70℞ — 1ȝ. [b] qui æqualis erit quadrato medij, numero videlicet 900. Addito ergo 1ȝ. vtrobique, erit æqualitas inter 70℞, & 1ȝ + 900. Ablatisque 900. vtrinque, inter 70℞ — 900. & 1ȝ. quam æquationem ita expedies. Semissis numeri radicum est 35. à cuius quadrato 1225 demptis 900. remanet numerus 325. ad cuius radicem quadratam addita prædicta semisse 35. fiet maior radix √ȝ 325 + 35. Et si eadem radix √ȝ 325. dematur ex semisse prædicta 35. relinquetur minor radix 35 — √ȝ 325. Itaque tres numeri quæsiti sunt 35 — √ȝ 325. 30 √ȝ 325 + 35. continue proportionales facientes summam 100. Et qui fit ex primo in tertium, æqualis est quadrato medij, numero videlicet 900. vt hæc formula indicat. [b] 20. septi.

    √ȝ 325 + 35
    35 − √ȝ 325
    ———————————————
    − 325 − √ȝ 398125
    + √ȝ 398125 + 1225
    ———————————————
    900

Quæ multiplicatio expeditior erit per ea, quæ cap. 23. dicta sunt, si numeri multiplicandi ita ordinentur, vt hæc altera formula monstrat. Nam si 325. quadratum posterioris particulæ tolletur ex 1225. quadrato prioris particulæ 35. reliquus fiet numerus 900.

    35 + √ȝ 325
    35 − √ȝ 325
    ———————————
    900

SI in eodem exemplo medius numerus detur 40. erit quæstio impossibilis. Nam posito primo numero 1℞. & tertio 60 — 1℞. fiet ex primo in tertium numerus 60℞ — 1ȝ. æqualis quadrato medij, nimirum numero 1600 Et reducta æquatione, erit æqualitas inter 1ȝ. & 60℞ — 1600. quod fieri nequit. Nam semissis numeri radicum est 30. à cuius quadrato 900. detrahi non possunt 1600. &c. Ratio est, quia numerus 1600. quadratus medij dati 40. maior est quadrato 900. semissis numeri 60. qui relinquitur, detracto medio dato 40. ex dato numero 100.

30 *Datum numerum in duas partes diuidere, ita vt earum cubi faciant summam datam quamcunque, quæ maior sit quarta parte cubi ex dato numero descripti.* XXX.

DATVS numerus 10. diuidendus sit in duas partes, quarum cubi faciant 370. qui numerus maior est quarta parte cubi ex 10. descripti, maior videlicet numero 250. Ponatur prima pars 1℞. & secunda 10 — 1℞. Cubi harum partium sunt 1ℭ. & 1000 — 300℞ + 30ȝ — 1ℭ. quorum summa 1000 — 300℞ + 30ȝ. æqualis esse debet numero 370. Additis 300℞. vtrinque, fiet æquatio inter 1000 + 30ȝ. & 300℞ + 370. Et ablatis 370. vtrobique inter 630 + 30ȝ. & 300℞ Et rursum ablatis 630. vtrinque, inter 30ȝ. & 300℞ - 630. Diuisis autem singulis hisce numeris per numerum Zensorum, id est, per 30. erit æquatio inter 1ȝ. & 10℞ — 21. quam sic resolues. Semissis numeri radicum 5. facit quadratum 25. à quo demptis 21. remanet numerus 4. ad cuius radicem quadratam 2. addita prædicta semisse 5. fiet maior radix 7. Et eadem radix 2. dempta ex semisse prædicta 5. reliquam faciet minorem radicem 3. Partes ergo numeri dati 10. sunt 7. & 3. quarum cubi 343 & 27. faciunt summam 370.

HOC idem ænigma fuit 141. capitis 29. præcedentis, sed solutum aliter, quam hic, nimirum per simplicem æquationem, quæ occurrit propter variam numerorum positionem.

Ibidem quoque docuimus, quo pacto ænigma hoc solui possit sine Algebra

31 *Datum numerum in duos numeros distribuere, vt idem sit excessus inter quadratum maioris, & quadratum minoris, qui inter quadratum dati numeri, & quadratum maioris partis.* XXXI.

SIT datus numerus 30. Ponatur maior eius pars 1℞. & minor 30 — 1℞ Tres quadrati sunt 900. 1ȝ. & 900 — 60℞ + 1ȝ. Excessus 900. supra 1ȝ. est 900 — 1ȝ. Excessus 1ȝ. supra 900 — 60℞ + 1ȝ. est 60℞ — 900. vt in hac formula subtractionis manifestum est.

    + 0 + 0 ℞ + 1 ȝ
    + 900 − 60 ℞ + 1 ȝ
    ———————————————
    − 900 + 60 ℞ + 0 ȝ

Est igitur æquatio inter hos excessus, id est, inter 900 — 1ȝ. & 60℞ — 900. Additisque 900. vtrobique, inter 1800 — 1ȝ. & 60℞. Et rursum addito 1ȝ. vtrinque, inter 1800. & 1ȝ + 60℞. Ablatisque 60℞. vtrobique, inter 1800 — 60℞. & 1ȝ. Radix ita inuenietur. Semissis numeri radicum est 30. ad cuius quadratum 900. additis 1800. fit numerus 2700. à cuius radice quadrata √ȝ 2700. si prædicta semissis 30. dematur, remanebit pretium vnius radicis √ȝ 2700. — 30. maior scilicet pars. qua detracta ex dato numero 30. relinquetur minor pars 60 — √ȝ 2700.

$$\begin{array}{r} +\sqrt{ℨ}\ 0 + 30 \\ +\sqrt{ℨ}\ 2700 - 30 \\ \hline -\sqrt{ℨ}\ 2700 + 60 \end{array}$$

vt in hac formula ſubtractionis apparet. Iam tres quadrati ſunt 900. 3600 — √ℨ 9720000. & 6300 — √ℨ 38880000. qui ſe mutuo excedunt hoc eodem numero √ℨ 9720000 —— 2700. vt in hiſce formulis ſubtractionum perſpicuum eſt.

$$\begin{array}{r} +900 + \sqrt{ℨ}\ 0 \\ +3600 - \sqrt{ℨ}\ 9720000 \\ \hline -2700 + \sqrt{ℨ}\ 9720000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +3600 - \sqrt{ℨ}\ 9720000 \\ +6300 - \sqrt{ℨ}\ 38880000 \\ \hline -2700 + \sqrt{ℨ}\ 9720000 \end{array}$$

IN poſteriori formula, quoniam √ℨ 9720000. & √ℨ 38880000. commenſurabiles ſunt, cum maiore per minorem diuiſa fiat Quotiens rationalis √ℨ 4. hoc eſt, 2. ſi minor à maiore ſubtrahatur, reliquus erit numerus √ℨ 9720000. Hæc omnia clara ſunt, ſi conſiderentur ea, quę de ſubtractione ſignorum + & —. & de ſubtractione radicum ſurdarum dicta ſunt.

XXXII. 32 *Datum numerum in duas partes diſtribuere, vt maioris partis quadratus cum minore parte faciat datum numerum quemcunque, minorem tamen quadrato dati numeri.*

SIT diuidendus datus numerus 10. in duas partes, vt quadratus maioris partis cum parte minore faciat 73 $\frac{3}{4}$. Ponatur maior pars 1℞. & minor 10 —— 1℞. Quadratus maioris partis eſt 1ℨ. qui cum minore parte facit ſummam 1ℨ + 10 —— 1℞. æqualem numero 73 $\frac{3}{4}$. Ablatis 10. vtrobique, erit æquatio inter 1ℨ —— 1℞. & 63 $\frac{3}{4}$. Additaque 1℞. vtrioque, inter 1ℨ. & 1℞ + 63 $\frac{3}{4}$. Radix ita eruetur. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 63 $\frac{3}{4}$. fit numerus 64. ad cuius radicem quadratam 8. ſi addatur prædicta ſemiſſis $\frac{1}{2}$. fiet pretium vnius radicis 8 $\frac{1}{2}$. maior pars, minor ergo erit 1 $\frac{1}{2}$. Nam quadratum maioris partis 8 $\frac{1}{2}$. eſt 72 $\frac{1}{4}$. & addita minore parte 1 $\frac{1}{2}$. fit numerus 73 $\frac{3}{4}$.

QVOD ſi minor pars ſtatuatur 1℞. & maior 10 —— 1℞. erit quadratus maioris partis 100 —— 20℞ + 1ℨ. Addita vero minore parte 1℞ fit ſumma 100 —— 19℞ + 1ℨ æqualis numero 73 $\frac{3}{4}$. Additis ergo 19℞ vtrobique, erit æquatio inter 1ℨ + 100. & 19℞ + 73 $\frac{3}{4}$. Ablatiſque 73 $\frac{3}{4}$. vtrinque, inter 1ℨ + 26 $\frac{1}{4}$. & 19℞. Ablatiſque rurſum 26 $\frac{1}{4}$. vtrobique, inter 1ℨ. & 19℞ —— 26 $\frac{1}{4}$. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{19}{2}$. à cuius quadrato $\frac{361}{4}$. ablatis 26 $\frac{1}{4}$. hoc eſt, $\frac{105}{4}$. remanet numerus $\frac{256}{4}$. cuius radix quadrata $\frac{16}{2}$. addita ad prædictam ſemiſſem $\frac{19}{2}$. facit maiorem radicem $\frac{35}{2}$. id eſt, 17 $\frac{1}{2}$. quæ inutilis eſt, cum non poſſit eſſe pars dati numeri 10. Minor ergo radix (quia numerus Coſſicus 19℞ —— 26 $\frac{1}{4}$. duplicem radicem habet) problema ſoluet. quæ reperietur, ſi radix quadrata vltimo loco inuenta $\frac{16}{2}$. dematur ex prædicta ſemiſſe $\frac{19}{2}$. Reliquus enim numerus 1 $\frac{1}{2}$. erit minor radix, oſtendens minorem partem numeri 10. maiorque propterea erit 8 $\frac{1}{2}$. veluti prius.

Vides ergo, non ſemper vtramque radicem, quam Coſſicus numerus habet, aſſumi poſſe, ad problematis propoſiti ſolutionem. Maior tamen radix inuenta $\frac{35}{2}$. quamuis ad problema poſitum non pertineat, optime tamen reſpondet huic æquationi inter 1ℨ. & 19℞ —— 26 $\frac{1}{4}$. Nam eius radicis quadratus eſt $\frac{1225}{4}$. æqualis 19℞ —— 26 $\frac{1}{4}$. cum 19℞. faciant $\frac{665}{2}$. ſiue $\frac{1330}{4}$. à quibus ſi demantur 26 $\frac{1}{4}$. hoc eſt $\frac{105}{4}$. remanet numerus $\frac{1225}{4}$.

XXXIII. 33 *Datum numerum extrema, ac media ratione ſecare.*

SIT datus numerus 10. ita ſecandus, vt proponitur: hoc eſt, vt minor pars, & maior, ac datus numerus 10. ſint continue proportionales, ſiue (quod idem eſt) vt quadratus maioris partis æqualis ſit numero, qui ex minore parte in datum numerum producitur. Ponatur maior pars 1℞. & minor 10 —— 1℞. Quadratus maioris partis eſt 1ℨ æqualis numero 100 —— 10℞. qui fit ex minore parte 10 —— 1℞. in 10. Semiſſis numeri radicum eſt 5. ad cuius quadratum 25. additis 100. fit numerus 125. à cuius radice quadrata √ℨ 125. ſi tollatur prædicta ſemiſſis 5 reliqua fiet radix √ℨ 125 — 5. maior pars. qua ablata ex 10. reliqua fiet minor pars 15 — √ℨ 125. vt in hac formula apparet. Nam quadratum maioris partis eſt 150 —— √ℨ 12500. ac tantundem fit ex minore parte in 10. vt duæ hę formulæ multiplicationum demonſtrant.

$$\begin{array}{r} \sqrt{ℨ}\ 0 + 10 \\ \sqrt{ℨ}\ 125 - 5 \\ \hline -\sqrt{ℨ}\ 125 + 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{ℨ}\ 125 - 5 \\ \sqrt{ℨ}\ 125 - 5 \\ \hline -\sqrt{ℨ}\ 3125 + 25 \\ 125 - \sqrt{ℨ}\ 3125 \\ \hline 150 - \sqrt{ℨ}\ 12500 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15 - \sqrt{ℨ}\ 125 \\ +10 \\ \hline 150 - \sqrt{ℨ}\ 12500 \end{array}$$

## SCHOLIVM.

*SINE Algebra diuidetur numerus datus extrema ac media ratione, hoc modo. Ad quadratum numeri adijciatur eiuſdem quadrati quarta pars, & ex radice quadrata numeri conflati dematur ſemiſſis dati numeri. Reliquus enim numerus erit maior pars, qua dempta ex numero dato, reliqua fiet minor pars. Hæc praxis colligitur tum ex ſolutione huius problematis, tum ex figura propoſ. 11. lib. 2. Eucl.*

34 Datum

34 *Datum numerum in duos numeros partiri, ita vt quadratus maioris ad quadratum minoris proportionem habeat datam.* XXXIIII.

SIT numerus 30. secandus in duos, vt maioris quadratus ad quadratum minoris proportionem habeat duplam sesquiquartam. Ponatur maior 1℞ & minor 30 — 1℞. Quadratus illius est 1ʒ. duplus sesquiquartus ad quadratum huius, nimirum ad 900 — 60℞ + 1ʒ. Si ergo hic quadratus multiplicetur per $2\frac{1}{4}$. erit æquatio inter 1ʒ. & $\frac{8100 - 540\text{℞} + 9\text{ʒ}}{4}$. quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 4ʒ & 8100 — 540℞ + 9ʒ. Additis igitur 540℞. vtrobique, erit æquatio inter 4ʒ + 540℞. & 8100 + 9ʒ. Ablatisque 4ʒ. vtrinque, inter 540℞. & 8100 + 5ʒ Et rursum ablatis 8100. vtrinque, inter 5ʒ. & 540℞ — 8100. Diuisisque omnibus per 5. erit æqualitas inter 1ʒ. & 108℞ — 1620. Semissis numeri radicum est 54. à cuius quadrato 2916. demptis 1620. remanet numerus 1296. cuius radix quadrata 36. ad prædictam semissem 54. facit maiorem radicem 90. quæ ad ænigma soluendum apta non est, cum non possit esse pars numeri dati 30. Si ergo eadem radix quadrata 36. dematur ex prædicta semisse 54. reliqua fiet minor radix 18. nimirum maior numerus quæsitus. Minor ergo erit 12. Nam 324. quadratus illius ad huius quadratum 144. proportionem habet duplam sesquiquartam.

VBI etiam vides, quamuis Cossicus numerus duplicem radicem habeat, non tamen semper vtramque assumi posse. licet maior ad vnguem etiam respondeat æquationi. Nam 8100. quadratus maioris radicis 90. æqualis est 108℞ — 1620. cum 108℞ efficiant 9720. à quibus si demantur 1620. relinquuntur 8100.

35 *Datum numerum in duos numeros partiri, vt eorum quadrati summam datam conficiant, maiorem tamen semisse quadrati ex dato numero geniti, & minorem quadrato eiusdem numeri.* XXXV.

SIT numerus 40. diuidendus in duos, quorum quadrati faciant 928. qui numerus maior est, quam 800. semissis quadrati ex 40. procreati, & minor, quam 1600. quadratus eiusdem numeri 40. Ponatur vnus numerorum 1℞. & alter 40 — 1℞. Quadrati sunt 1ʒ. & 1600 — 80℞ + 1ʒ. qui summam faciunt 2ʒ + 1600 — 80℞. æqualem 928. Additis 80℞. vtrobique, erit æquatio inter 2ʒ + 1600 & 80℞ + 928. Et ablatis 928. vtrinque, inter 2ʒ + 672. & 80℞. Et rursum ablatis 672. vtrobique inter 2ʒ & 80℞ — 672. Diuisisque omnibus per 2. inter 1ʒ & 40℞ — 336. Semissis numeri radicum est 20. à cuius quadrato 400. demptis 336. remanet numerus 64. cuius radix quadrata 8. addita ad prædictam semissem 20. facit maiorem radicem 28. hoc est, maiorem numerum, Minor autem erit 12. quem etiam exhibet minor radix. Nam si quadrata radix inuenta 8. dematur ex prædicta semisse 20. remanent 12. Iam quadratus 784. maioris numeri 28. cum 144. quadrato minoris numeri 12. facit datam summam 928.

HOC ænigma solutum etiam fuit in ænigmate 170. præcedentis cap. per æquationem simplicem.

36 *Duos numeros in dato excessu inuenire, quorum quadrati datam summam efficiant, quæ maior tamen sit quadrato dati excessus.* XXXVI.

SIT datus excessus 11. & summa quadratorum 281 quæ maior est quadrato 121. dati excessus 11. Ponatur minor numerus 1℞ ideoque maior 1℞ + 11. Quadrati 1ʒ. & 1ʒ + 22℞ + 121. faciunt summam 2ʒ + 22℞ + 121. æqualem 281. Ablatis 121. vtrobique, erit æqualitas inter 2ʒ + 22℞. & 160. Demptisque rursum 22℞. vtrinque, inter 2ʒ. & 160 — 22℞. Diuisisque omnibus per 2. inter 1ʒ. & 80 — 11℞. Semissis numeri radicum est $\frac{11}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{121}{4}$. additis 80. siue $\frac{320}{4}$. fit numerus $\frac{441}{4}$. à cuius radice quadrata $\frac{21}{2}$. ablata prædicta semisse $\frac{11}{2}$. remanet valor vnius radicis $\frac{10}{2}$. hoc est, 5. minor numerus. Maior autem erit 16. Atque horum duorum numerorum quadrati 25. & 256. faciunt 281.

SIT rursum datus excessus 11. & summa quadratorum 122 maior quadrato 121. excessus dati 11. Ponatur minor numerus iterum 1℞. & maior 1℞ + 11. Quadrati horum numerorum faciunt, vt prius, summam 2ʒ + 22℞ + 121. æqualem 122. Ablatis 121. vtrobique, erit æquatio inter 2ʒ + 22℞. & 1. Et ablatis rursum 22℞. vtrinque, inter 2ʒ. & 1 — 22℞. Diuisisque omnibus per 2. inter 1ʒ. & $\frac{1}{2}$ — 11℞. Semissis numeri radicum est $\frac{11}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{121}{4}$. addita $\frac{1}{2}$. siue $\frac{2}{4}$. fit numerus $\frac{123}{4}$. à cuius radice quadrata √ʒ $\frac{123}{4}$ dempta prædicta semisse $\frac{11}{2}$. relinquetur pretium vnius radicis √ʒ $\frac{123}{4}$ — $\frac{11}{2}$. minor numerus, & additis 11 siue, $\frac{22}{2}$. fit maior numerus √ʒ $\frac{123}{4}$ + $\frac{11}{2}$. Quadrati horum numerorum faciunt summam 122. vt hæ formulæ multiplicationum indicant

| | |
|---|---|
| √ʒ $\frac{123}{4}$ + $\frac{11}{2}$ | √ʒ $\frac{123}{4}$ — $\frac{11}{2}$ |
| √ʒ $\frac{123}{4}$ + $\frac{11}{2}$ | √ʒ $\frac{123}{4}$ — $\frac{11}{2}$ |
| + ʒ√ $\frac{14883}{16}$ + $\frac{121}{4}$ | — √ʒ $\frac{14883}{16}$ + $\frac{121}{4}$ |
| $\frac{123}{4}$ + √ʒ $\frac{14883}{16}$ | $\frac{123}{4}$ — √ʒ $\frac{14883}{16}$ |
| $\frac{244}{4}$ + √ʒ $\frac{59532}{16}$ | $\frac{244}{4}$ — √ʒ $\frac{59532}{16}$ |

Nam $\frac{244}{4}$. & $\frac{244}{4}$. faciunt $\frac{488}{4}$. hoc est, 122. & radices surdæ se mutuo destruunt.

37 *Dato numero, alium inuenire, per quem si diuidatur datus numerus, fiat Quotiens superans inuentum numerum dato numero.* XXXVII

SIT datus numerus 60. inueniendusque sit alius, per quem si diuidatur 60 fiat Quotiens superans inuentum diuisorem numero 7. Ponatur numerus, qui quæritur, 1℞. Quotiens ergo erit $\frac{60}{1\text{℞}}$. qui superat diuisorem 1℞. numero $\frac{60 - 1\text{ʒ}}{1\text{℞}}$. (vt patet, si 1℞ detrahatur ex $\frac{60}{1\text{℞}}$.) qui æqualis debet esse dato numero 7. ita vt æquatio sit

inter

inter $\frac{60-1ʓ}{1℞}$. & 7. quæ per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 60 − 1ʓ. & 72℞. Addito ergo 1ʓ vtrobique, erit æquatio inter 60. & 1ʓ + 72℞. Et ablatis 72℞. vtrinque, inter 1ʓ. & 60 − 72℞. Semissis numeri radicum est $\frac{7}{2}$ ad cuius quadratum $\frac{49}{4}$. additis 60. siue $\frac{240}{4}$. fit numerus $\frac{289}{4}$ à cuius radice quadrata $\frac{17}{2}$. si dematur prædicta semissis $\frac{7}{2}$ remanebit pretium vnius radicis $\frac{10}{2}$. hoc est, 5. numerus quæsitus. Nam diuisis 60. per 5. fit Quotiens 12. qui diuisorem 5. numero 7. superat.

XXXVIII. 38 *Datum numerum in duos numeros partiri, vt ex vno in alterum fiat alius datus numerus minor quarta parte quadrati ex primo dato numero procreati: hoc est, ita vt radix quadrata dati numeri secundi minoris quarta parte quadrati ex primo dato numero procreati sit medio loco proportionalis inter duos numeros inuentos.*

SIT datus numerus 10. diuidendus in duos, inter quos √ʓ 10. sit medio loco proportionalis, hoc est, vt ex eorum multiplicatione producatur numerus 10. Ponatur vnus numerorum 1℞. & alter 10 − 1℞. Ex eorum multiplicatione fit numerus 10℞ — 1ʓ. æqualis 10. Addito 1ʓ. vtrobique, fiet æquatio inter 10℞. & 1ʓ + 10. Et ablatis 10. vtrinque, inter 10℞ — 10. & 1ʓ. Semissis numeri radicum est 5 à cuius quadrato 25. demptis 10. fit reliquus numerus 15. ad cuius radicem quadratam √ʓ 15. addita prædicta semissis 5. facit maiorem radicem √ʓ 15 + 5. eademque radix quadrata detracta ex prædicta semisse 5. reliquam facit minorem radicem 5 — √ʓ 15. Atque hi duo numeri √ʓ 15 + 5. & 5 — √ʓ 15. faciunt summam 10. & ex vno in alterum fit quoque 10. vt in hac formula multiplicationis manifestum est. Nam — √ʓ 375. & + √ʓ 375. se mutuo interimunt; & ex additione + 25. & — 15. fit numerus 10.

```
            5 − √ʓ 15
          √ʓ 15 + 5
    ----------------------
          + 25 − √ʓ 375
  + √ʓ 375 − 15
    ----------------------
            10
```

HOC idem ænigma soluimus per simplicem æquationem in præcedenti cap. ænigmate 172.

```
    5 − √ʓ 15
    5 + √ʓ 15
  -------------
       10
```

MVLTIPLICATIO quoque prædicta numeri 5 − √ʓ 15. in 5 + √ʓ 15. perficietur, si 15 quadratus posterioris particulæ ex 25. quadrato prioris particulæ detrahatur, vt cap. 23. declaratum est. Idem hoc ænigma solutum fuit in ænigmate 23. alio tamen exemplo proposito.

XXXIX. 39 *Datum numerum diuidere in duos, vt eorum quadrati summam faciant, quæ productum ex eorum multiplicatione superet dato numero.*

SIT datus numerus 30. & excessus datus 228. Ponatur vnus numerorum 1℞. & alter 30 — 1℞. Quadrati sunt 1ʓ. & 1ʓ + 900 — 60℞. qui summam faciunt 2ʓ + 900 — 60℞. quæ superare debet numerum productum ex 1℞. in 30 — 1℞. hoc est, numerum 30℞ — 1ʓ. excessu 228. ita vt æqualitas sit inter 2ʓ + 900 — 60℞ & 30℞ + 228 — 1ʓ. Et addito 1ʓ. vtrinque, inter 3ʓ + 900 — 60℞. & 30℞ + 228. Et additis 60℞. vtrobique, inter 3ʓ + 900. & 90℞ + 228. Et ablatis 228. vtrinque, inter 3ʓ + 672. & 90℞. Et rursum ablatis 672 vtrobique, inter 3ʓ. & 90℞ — 672. Diuisisque omnibus per 3. inter 1ʓ. & 30℞ — 224. Semissis numeri radicum est 15: a cuius quadrato 225. demptis 224. superest 1. cuius radix quadrata 1. addita ad prædictam semissem 15. facit maiorem radicem 16. Eadem vero ex semisse prædicta 15. detracta relinquit minorem radicem 14. Itaque quæsitæ partes numeri 30. sunt 16. & 14. Quadrati enim earum 256. 196. summam faciunt 452. quæ numerum 224. factum ex ductu 16. in 14. superat numero 228.

HOC idem problema soluimus per simplicem æquationem in ænigmate 173. præcedentis capitis, proposito tamen alio exemplo.

SI numerus diuidendus proponeretur 20. & excessus 30. fieret problema impossibile, vt ipsa operatio docebit.

XL. 40 *Datum numerum partiri in duos, quorum radices quadratæ habeant differentiam datam, cuius tamen quadratus minor sit numero dato.*

SIT datus numerus 30 diuidendus in duos, quorum radices quadratæ habeant differentiam 5. Ponatur minoris radix 1℞. adeoque maioris radix 1℞ + 5. vt se excedant quinario. Quadrati harum radicum 1ʓ. & 1ʓ + 10℞ + 25. faciunt summam 2ʓ + 10℞ + 25. æqualem 30. Ablatis 25. vtrobique, manebit æqualitas inter 2ʓ + 10℞. & 5. Ablatisque rursum 10℞ vtrinque, inter 2ʓ. & 5 — 10℞. Diuisisque omnibus per 2. inter 1ʓ & $\frac{5}{2}$ — 5℞. Semissis numeri radicum est $\frac{5}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{25}{4}$. additis $\frac{5}{2}$. siue $\frac{10}{4}$. fit numerus $\frac{35}{4}$. à cuius radice quadrata √ʓ $\frac{35}{4}$. dempta prædicta semisse $\frac{5}{2}$ fiet pretium radicis √ʓ $\frac{35}{4}$ — $\frac{5}{2}$. minoris scilicet numeri radix. Additis ergo 5 fiet maioris numeri radix √ʓ $\frac{35}{4}$ + $\frac{5}{2}$. quæ duæ radices se mutuo excedunt quinario. Et in se ductæ quadrate, faciunt numeros, qui quæruntur, 15 — √ʓ $\frac{875}{4}$. & 15 + √ʓ $\frac{875}{4}$. qui faciunt 30. numerũ datum.

IDEM ænigma solui etiam potest per simplicem æquationem, hoc modo. Ponatur minoris numeri radix 1℞ — $\frac{5}{2}$. & maioris 1℞ + $\frac{5}{2}$. vt hæc illam superet quinario. Ambæ in se ductæ quadrate faciunt 1ʓ — 5℞ + $\frac{25}{4}$. & 1ʓ + 5℞ + $\frac{25}{4}$. quorum summa 2ʓ + $\frac{50}{4}$. æqualis est 30. Ablatis $\frac{50}{4}$. hoc est, 12$\frac{1}{2}$. vtrobique, manebit æquatio inter 2ʓ & 17$\frac{1}{2}$. Diuisisque 17$\frac{1}{2}$. per 2. fiet 1ʓ. $\frac{35}{4}$. & 1℞ √ʓ $\frac{35}{4}$. Cum ergo minoris numeri radix posita sit 1℞ — $\frac{5}{2}$ erit ipsa radix minoris numeri √ʓ $\frac{35}{4}$ — $\frac{5}{2}$. Et maioris numeri radix √ʓ $\frac{35}{4}$ + $\frac{5}{2}$. cum posita sit 1℞ + $\frac{5}{2}$. Inuentæ ergo sunt eædem radices, quæ prius, &c.

41 Datum

41 *Datum numerum diuidere in duos, quorum radices inter se multiplicatæ faciant datum quemcunque numerum.* XLI.

SIT datus numerus 12. secandus in duos, quorum radices inter se multiplicatæ faciant 5. Ponatur vnus numerorum 1℞. & alter 12 — 1℞. Erunt eorum radices, √𝔷 1℞. & √𝔷 (12 — 1℞.) Hæ inter se multiplicatæ faciunt √𝔷 (12℞ — 1𝔷) qui numerus æqualis esse debet numero 5. Igitur & eorum quadrati 12℞ — 1𝔷. & 25. æquales erunt. Additoque 1𝔷. vtrobique, erit æquatio inter 12℞. & 1𝔷 + 25. Et ablatis 25. vtrinque, inter 12℞ — 25. & 1𝔷. Semissis numeri radicum est 6 à cuius quadrato 36 demptis 25. superest numerus 11. ad cuius radicem quadratam √𝔷 11. addita prædicta semisse 6. fiet maior radix √𝔷 11 + 6. siue 6 + √𝔷 11. id est, maior numerus quæsitus. Et si eadem √𝔷 11. tollatur ex semisse prædicta 6 reliqua fiet minor radix 6 — √𝔷 11. nimirum minor numerus quæsitus. Atque duo hi numeri 6 + √𝔷 11. & 6 — √𝔷 11. faciunt propositum numerum 12. & eorum radices sunt √𝔷 (6 + √𝔷 11) & √𝔷 (6 — √𝔷 11) quæ inter se multiplicatæ faciunt √𝔷 25. id est. 5. vt hæc formula monstrat. Nam si earum quadrata 6 + √𝔷 11. & 6 — √𝔷 11. inter se multiplicentur, (quod fiet, si 11. quadratum posterioris particulæ ex 36. quadrato particulæ prioris detrahatur, vt cap. 23. dictum est) fiet productus √𝔷 25. id est, 5.

√𝔷 (6 + √𝔷 11)
√𝔷 (6 — √𝔷 11)
———————
√𝔷 25

PER simplicem æquationem soluemus idem ænigma, hoc modo. Ponatur vnus numerus 6 + 1℞. & alter 6 — 1℞. quorum radices √𝔷 (6 + 1℞) & √𝔷 (6 — 1℞ inter se multiplicatæ faciunt numerum √𝔷 (36 — 1𝔷) vt hæc formula indicat, æqualem numero 5 Igitur & eorum quadrati 36. — 1𝔷 & 25. æquales erunt. Additoque 1𝔷. vtrinque, erit æquatio inter 36. & 1𝔷 + 25. Ablatisque 25. vtrobique, inter 11. & 1𝔷. Diuisis ergo 11. per 1. fiet 1𝔷. 11. & 1℞ √𝔷 11. Et quia vnus numerorum positus fuit 6 + 1℞. erit ipse numerus 6 + √𝔷 11. Alter vero, quem posuimus 6 — 1℞. erit 6 — √𝔷 11. quemadmodum supra.

√𝔷 (6 + 1℞)
√𝔷 (6 — 1℞)
———————
— 6℞ — 1𝔷
36 + 6℞
———————
√𝔷 (36 — 1𝔷)

42 *Dato numero, inuenire alium, qui cum dato efficiat quadratum numeri inuenti.* XLII.

SIT datus numerus 40. Ponatur inuentus numerus 1℞. cuius quadratus 1𝔷. Ergo 1℞ + 40. æqualia sunt 1𝔷. Semissis numeri radicum est 1/2. ad cuius quadratum 1/4. additis 40. fit numerus 40 1/4. id est, 161/4. ad cuius radicem quadratam √𝔷 161/4. addita prædicta semisse 1/2. fiet pretium 1℞. √𝔷 161/4 + 1/2 nimirum numerus quæsitus. qui cum dato numero 40. facit √𝔷 161/4 + 40 1/2. qui numerus æqualis est quadrato numeri inuenti √𝔷 161/4 + 1/2. Nam hic in se ductus (vt apposita formula docet) producit numerum 161/4 + √𝔷 644/16. hoc est, 40 1/4 + √𝔷 161/4. propterea quod hæ minutiæ √𝔷 644/16. & √𝔷 161/4. æquales sunt.

√𝔷 161/4 + 1/2
√𝔷 161/4 + 1/2
———————
+ √𝔷 161/16 + 1/4
161/4 + √𝔷 161/16
———————
161/4 siue 40 1/4 + √𝔷 644/16

SIT rursus datus numerus 100. Ponatur numerus quæsitus 1℞. Ergo 1℞ + 110. æqualia sunt 1𝔷. Semissis numeri radicum est 1/2. ad cuius quadratum 1/4. additis 110. fit numerus 110 1/4. siue 441/4 ad cuius radicem quadratam 21/2. addita prædicta semisse 1/2. fit pretium 1℞. 22/2. hoc est, 11 numerus quæsitus. Huius enim quadratus 121. æqualis est numero conflato ex dato 110. & inuento 11.

HOC problema propositum etiam fuit in ænigmate 3. huius cap. in alijs tamen numeris.

43 *Datum numerum in duos partiri, vt summa quadratorum cum producto ex vno in alterum faciat datum numerum quemcunque.* XLIII.

SIT datus numerus diuidendus 20. & quadrati cum producto ex vna parte in alteram faciant 309. Ponatur vnus numerorum 1℞. & alter 20 — 1℞. Quadrati faciunt summam 2𝔷 + 400 — 40℞. quæ cum producto ex vno in alterum, id est, cum 20℞ — 1𝔷 facit numerum 1𝔷 + 400 — 20℞ æqualem 309. Additis 20℞. vtrobique, erit æquatio inter 1𝔷 + 400. & 20℞ + 309 Et ablatis 309. vtrinque, inter 1𝔷 + 91. & 20℞. Et rursum ablatis 91. vtrinque, inter 1𝔷. & 20℞ — 91. Semissis numeri radicum est 10 à cuius quadrato 100. ablatis 91. remanet numerus 9. ad cuius radicem 3. addita prædicta semisse 10. fit maior radix 13. Et eadem radice 3. dempta ex prædicta semisse 10. reliqua fiet minor radix 7. Duæ ergo partes numeri 20. sunt 13. & 7. Nam earum quadrati 169. & 49. vna cum 91. producto ex vno in alterum faciunt 309.

IDEM exequemur per simplicem æquationem, hoc modo. Ponatur maior pars 10 + 1℞. & minor 10 — 1℞. vt simul conficiant 20. Quadrati sunt 1𝔷 + 20℞ + 100 & 1𝔷. — 20℞ + 100. facientes summam 2𝔷 + 200. quæ cũ producto ex vna parte in alteram, nimirum cum 100 — 1𝔷, qui productus habetur, si 1𝔷. id est, quadrat' posterioris particulæ demat̃ ex 100. quadrato prioris particulę vt hic apparet facit numerũ 1𝔷 + 300. æqualem 309.

| | |
|---|---|
| 10 + 1 ℞ | |
| 10 − 1 ℞ | |
| 100 − 1 ʒ | |

lem 309. Ablatis ergo 300. vtrobique, manebit æqualitas inter 1ʒ. & 9. Diuisisque 9. per 1. fiet 1ʒ. 9 & 1℞. 3. Ergo maior pars posita 10 + 1℞ erit 13. Minor autem posita 10 — 1℞. erit 7. veluti prius.

XXXXIIII. 44 *Numerum inuenire, qui in datum numerum ductus faciat numerum æqualem ei, quem inuenti numeri quadratus cum quolibet numero, qui minor sit quadrato ex semisse dati numeri procreato facit.*

SIT inueniendus numerus, qui ductus in 10. tantum faciat, quantum eius quadratus cum 20. numero scilicet minore, quam quadratus semissis numeri 10. Ponatur numerus quæsitus 1℞. qui ductus in 10. facit 10 ℞. æquales 1ʒ + 20. nimirum quadrato ex 1℞. procreato, vna cum 20. Ablatis 20. vtrobique, manebit æqualitas inter 10℞ — 20. & 1ʒ. Semissis numeri radicum est 5. à cuius quadrato 25. demptis 20. remanet numerus 5. cuius radix √ʒ5. addita prædictæ semissi 5. facit √ʒ5 + 5. maiorem radicem. Et eadem radix dempta ex prædicta semisse 5 reliquam faciet minorem radicem 5 — √ʒ5. Atque vterque numerus √ʒ5 + 5. & 5 — √ʒ5. problema conficit. Nam multiplicatio √ʒ5 + 5. in 10. facit 50 + √ʒ 500. quantum nimirum fit ex 30 + √ʒ 500. quadrato numeri √ʒ5 + 5. vna cum 20 Item ex 5 — √ʒ5. in 10. fit numerus 50 — √ʒ 500. æqualis quadrato 30 — √ʒ500. numeri 5 — √ʒ5. vna cum 20.

ITEM sit inueniendus numerus, qui ductus in 20. tantum faciat, quantum eius quadratus cum 84. Ponatur quæsitus numerus 1℞. Ex 1℞. in 20. fit numerus 20℞. æqualis 1ʒ + 84. nimirum quadrato ex 1℞. procreato, vna cum 84. Ablatis 84. vtrobique, manebit æqualitas inter 20℞ — 84. & 1ʒ. Semissis numeri radicum est 10. à cuius quadrato 100. demptis 84. superest numerus 16. cuius radix 4. addita ad prædictam semissem 10. facit maiorem radicem 14. Ablata vero ex eadem semisse reliquam facit minorem radicem 6. Atque numerus vterque 14. & 6. problema soluit. Nam ex 14. in 20. fit numerus 280. æqualis ei, quem eius quadratus 196. cum 84. facit. Item ex 6. in 20. fit numerus 120. æqualis ei, quem eius quadratus 36. cum 84. efficit.

XXXXV. 45 *Numerum inuenire, qui ad quemuis datum numerum additus faciat summam, quæ ducta in numerum inuentum faciat numerum datum quemcunque.*

SIT inueniendus numerus, quo addito ad 12. & summa ducta in numerum inuentum, producatur 189. Ponatur numerus quæsitus 1℞. Additis 12. fit numerus 1℞ + 12. qui ductus in inuentum nimirum in 1℞. facit numerum 1ʒ + 12 ℞. æqualem 189. Ablatis 12 ℞ vtrobique, erit æquatio inter 1ʒ & 189 — 12℞. Semissis numeri radicum est 6. ad cuius quadratum 36. additis 189. fit numerus 225. à cuius radice 15. ablata prædicta semisse 6. manet valor 1℞. 9. numerus videlicet quæsitus. Hic enim additus ad 12. facit 21. & ex 21. in 9. fit datus numerus 189.

ITEM sit inueniendus numerus, quo addito ad 12. & summa ducta in numerum inuentum, fiat numerus 400. Ponatur 1℞ Additis 12. fit numerus 1℞ + 12. qui ductus in 1℞. facit numerum 1ʒ + 12℞. æqualem 400. Ablatisque 12℞. vtrobique, manet æqualitas inter 1ʒ. & 400 — 12℞. Semissis numeri radicum est 6. ad cuius quadratum 36. additis 400. fit numerus 436. à cuius radice, √ʒ 436. si dematur prædicta semissis 6. reliqua fiet æstimatio vnius radicis √ʒ 436 — 6. numerus videlicet, quem inquirimus. Nam si addatur ad 12. fiet numerus √ʒ 436 + 6. vt in hac formula vides.

| | |
|---|---|
| √ʒ 436 − 6 | |
| + 12 | |
| √ʒ 436 + 6 | |

Hic autem numerus √ʒ. 436 + 6. multiplicatus per inuentum numerum √ʒ 436 — 6. facit numerum datum 400. vt hæc altera formula docet.

| | |
|---|---|
| √ʒ 436 + 6 | |
| √ʒ 436 − 6 | |
| 400 | |

quæ multiplicatio fiet, si 36. quadratus posterioris particulæ 6. subducatur à 436. quadrato prioris particulæ, vt cap. 23. declaratum fuit.

XXXXVI. 46 *Datum numerum in duas partes secare, vt numerus procreatus ex vna in alteram ductus in quadratum dati numeri faciat numerum quemcunque datum.*

SIT numerus datus 20. secandus in duos, vt numerus ex eorum multiplicatione procreatus, si ducatur in 400. quadratum dati numeri, efficiat 300 Ponatur vnus numerus 1℞. & alter 20 — 1℞. Ex 1℞. in 20. — 1℞. fit numerus 20℞ — 1ʒ Et hic ductus in 400. facit 8000℞ — 400ʒ. qui æqualis esse debet 300. Additis 400ʒ vtrobique, erit æquatio inter 8000℞. & 300 + 400ʒ. Et ablatis 300. vtrinque, inter 400ʒ & 8000℞ — 300. Diuisis omnibus per 400. erit æquatio inter 1ʒ & 20℞ — ¾. Semissis radicum est 10. à cuius quadrato 100. siue 400/4 demptis ¾. remanent 397/4. cuius √ʒ 397/4. addita semissi prædictæ 10. facit maiorem radicem 10 + √ʒ 397/4. & ablata ex eadem semisse 10. relinquit radicem minorem 10 — √ʒ 397/4. quæ sunt partes quæsitæ. Nam ex vna in alteram fit numerus ¾. si nimirum posterioris particulæ quadratum 397/4. dematur ex 100. siue ex 400/4. quadrato prioris particulæ. At ex ¾. in 400. quadratum dati numeri 20. fit numerus 1200/4. hoc est, 300.

47 *Numerum inuenire, cuius quadratus auctus dato numero, si ducatur in eundem quadratum mulctatum alio numero dato, producat datum numerum quemcunque.* XLVII.

INVENIENDVS sit numerus, cuius quadratus octonario auctus, si ducatur in eundem quadratum mulctatum ternario, producat 6942. Ponatur quæsitus numerus 1℞. Eius quadratus 1ʒ. auctus octonario, erit 1ʒ + 8. mulctatus vero ternario, 1ʒ − 3. Hi duo numeri inter se multiplicati faciunt 1ʒʒ + 5ʒ — 24. vt in hac formula vides. qui numerus æqualis esse debet numero 6942. Additis ergo 24. vtrobiq;, erit æqualitas inter 1ʒʒ + 5ʒ. & 6966. Et ablatis 5ʒ. vtrinque, inter 1ʒʒ. & 6966 − 5ʒ. Iam sic.

| |
|---|
| 1ʒ + 8 |
| 1ʒ − 3 |
| − 3ʒ − 24 |
| 1ʒʒ + 8ʒ |
| 1ʒʒ + 5ʒ − 24 |

Semissis numeri Zensorum est $\frac{5}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{25}{4}$. additis 6966. hoc est, $\frac{27864}{4}$. fit summa $\frac{27889}{4}$. ex cuius radice quadrata $\frac{167}{2}$. detracta semisse prædicta $\frac{5}{2}$. remanent $\frac{162}{2}$. hoc est, 81. vnus Zensus, cuius radix 9. dabit pretium vnius radicis pro numero quæsito. Nam eius quadratus 81. auctus octonario facit 89. & mulctatus ternario, 78. fitque ex 89. in 78. numerus datus 6942.

SI ijsdem positis, produci debeat numerus 10. reperietur æquatio inter 1ʒʒ. & 34 — 5ʒ. Iam sic. Semissis numeri Zensorum est $\frac{5}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{25}{4}$. additis 34. hoc est, $\frac{136}{4}$. fit summa $\frac{161}{4}$. à cuius radice quadrata √ʒ $\frac{161}{4}$. detracta prædicta semisse $\frac{5}{2}$. fiet 1ʒ. √ʒ $\frac{161}{4}$ − $\frac{5}{2}$. & huius radix quadrata, √ʒ(√ʒ $\frac{161}{4}$ − $\frac{5}{2}$) numerus quæsitus. Nam eius quadratus √ʒ $\frac{161}{4}$ − $\frac{5}{2}$. auctus octonario, siue $\frac{16}{2}$. facit √ʒ $\frac{161}{4}$ + $\frac{11}{2}$. Mulctatus vero ternario, siue $\frac{6}{2}$. facit √ʒ $\frac{161}{4}$ − $\frac{11}{2}$. qui duo numeri inter se multiplicati producunt numerum 10. vt hæc formula indicat.

| |
|---|
| √ʒ $\frac{161}{4}$ + $\frac{11}{2}$ |
| √ʒ $\frac{161}{4}$ − $\frac{11}{2}$ |
| $\frac{40}{4}$. siue 10. |

Nam si $\frac{121}{4}$. quadratus posterioris particulæ detrahatur ex $\frac{161}{4}$. quadrato particulæ prioris remanent $\frac{40}{4}$. hoc est, 10.

---

# *ÆNIGMATA VARIA NVMERORVM AD res materiales contractorum, cum nonnullis exemplis ad secundas radices pertinentibus.*

## CAPVT XXXI.

PROPONEMVS in hoc cap. præter ænigmata, quæstiones nonnullas alias non admodum difficiles, quarum aliquæ non solum per regulam Falsi, verum etiam per solam regulam Trium expediri possunt; vt præstantia regulæ Algebræ magis eluceat: quippe quæ omnes Arithmeticæ regulas complecti videatur. Hinc igitur exordiamur.

1 *Summam pecuniæ, quam in sacculo habeo, existimat quidam astantium valere 600. aur. Cuius errorem sic corrigo. Si ad meam pecuniam accederent partes $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. & à summa detraheretur $\frac{1}{12}$. eiusdem meæ pecuniæ, tunc haberem 600. aureos. Quæstio est, quanta sit mea pecunia.* I.

PONATVR esse 1℞. aur. Si accedant partes $\frac{1}{2}$℞. $\frac{1}{3}$℞. $\frac{1}{4}$℞. quæ faciunt summam 1 $\frac{1}{12}$℞. fiet tota pecunia 2 $\frac{1}{12}$℞. Ablata autem $\frac{1}{12}$℞. reliquæ fient 2℞. æquales 600. Diuisis igitur 600. per 2. fiet 1℞ 300. Atque hæc est pecunia in meo sacculo. Nam si accedant partes $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. nimirum aurei 150. 100. & 75. fiet summa aur. 625 & dempta $\frac{1}{12}$. nimirum aur. 25. reliquus erit numerus 600.

2 *Viator quidam conficit quotidie 9. milliaria. Alius decimo post die elapso idem iter instituit, ex eodem loco conficitq; quotidie 14. milliaria. Quæritur, quoto die posterior priorem assequetur.* II.

PONATVR, ambos simul futuros in 1℞. dierum. Ergo prior vltra 90. milliaria, quæ in decem diebus absoluit, conficiet in 1℞ dierum præterea 9℞. milliariorum, quandoquidem singulis diebus 9 milliaria conficit. Posterior autem conficiens quotidie 14. milliaria, conficiet in 1℞. dierum, 14℞ milliariorum. Et quia in 1℞. dierum tot milliaria prior necessario confecerit, vna cum 90. quæ in 10. diebus absoluit, quot posterior in 1℞. dierum; quandoquidem tunc simul futuri sunt: erit æquatio inter 9℞ + 90. & 14℞. Ablatisque 9℞. vtrobique, inter 90. & 5℞. Diuisis ergo 90. per 5. fiet 1℞. 18. Igitur post 18. dies conuenient. Nam prior in 18. diebus absoluit milliaria 162. additisque 90. quæ in præcedentibus 10. diebus confecit, fient 252. milliaria, quot videlicet posterior in 18. diebus absoluit.

### SCHOLIVM.

HÆC porro quæstio in numeris abstractis ita proponeretur. *Quæratur numerus, qui ductus in 9. & ad productum addito 90. numerum efficiat æqualem ei, qui ex eodem numero in 14. multiplicato gignitur. Posito enim numero quæsito 1℞.*

*erunt 9℞ + 90. æquales numero 14℞. Ablatu ergo 9℞ vtrobique, reperietur æqualitas inter 90. & 5℞. Diuisisque 90. per 5. fiet 1℞ 18. numerus, quem quærimus. Nam hic ductus in 9. facit 162. & additis 90. fit numerus 252. æqualis ei, qui fit ex 18. in 14.*

III. 3 *Viator singulis diebus 9. milliaria conficit: alius vero decimo post die elapso idem iter ingreditur. Quæritur quot milliaria absoluet hic, vt priorem assequatur in 18. diebus.*

PONATVR 1℞ milliariorum. Ergo in 18. diebus conficiet 18℞. milliariorũ. Cum ergo prior singulis diebus conficiens 9. milliaria, absoluat in 18. diebus 162. milliaria, & additis 90. quæ perambulauit in prioribus 10. diebus, fit manifestum, eum confecisse 252. milliaria. Est ergo æquatio inter 18℞. & 252. Diuisisq; 252. per 18. fiet 1.℞ 14. atque tot milliaria conficere debet posterior, vt in 18. diebus priorem assequatur.

IIII. 4 *Interrogatus quidam, quota sit hora diei; ita respondit. Dimidiata pars horarum à media nocte vsque ad hoc instans elapsarum addita ad tres quartas horarum futurarum ad sequentem mediam noctem, indicabit numerum horarum, quem quæris. Quæritur ergo, quota tunc sit hora.*

PONATVR 1℞ horarum à media nocte præteritarum. Cum ergo ab vna media nocte ad aliam mediam noctem effluant horæ 24 supererunt vsque ad mediam noctem insequentem horæ 24 — 1℞. Huius numeri $\frac{3}{4}$. faciunt $\frac{72 - 3℞}{4}$. quibus si addatur $\frac{1}{2}$℞. horarum præteritarum, siue $\frac{2}{4}$℞. fiet numerus $\frac{72 - 1℞}{4}$. æqualis 1℞. Quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 4℞. & 72 — 1℞. Additaque 1℞ vtrinque, erit æquatio inter 72. & 5℞. Diuisis ergo 72. per 5. fiet 1℞. 14$\frac{2}{5}$. numerus horarum, quæ à media nocte vsque ad horam quæstionis effluxerunt. Ac proinde erit tunc hora 2. & Min. 24. à meridie, cum 1. hora contineat 60. Min quod ita probatur Dimidiata pars horarum 14$\frac{2}{5}$. à media nocte præteritarum facit horas 7$\frac{1}{5}$. quibus si addantur $\frac{3}{4}$ horarum 9$\frac{3}{5}$. quæ supersunt vsque ad mediam noctem, nimirum 7$\frac{1}{5}$. fient horæ 14$\frac{2}{5}$.

EODEM modo procedemus, si sermo sit de horis ab occasu Solis, more Italorum. Nam si quis responderit, eam tunc instare horam, quæ ex $\frac{3}{4}$. horarum à proximo Solis occasu elapsarum additis ad semissem horarum, quæ vsque ad alterum occasum Solis supersunt, conficitur: Ponemus 1℞. horarum à proximo occasu præteritarum. Cum ergo ab vno occasu ad alium occasum fluant horæ 24. supersunt vsque ad sequentem occasum horæ 24 — 1℞. Huius numeri semissis facit $\frac{24 - 1℞}{2}$. hoc est, $\frac{48 - 2℞}{4}$. quæ addita ad $\frac{3}{4}$℞. horarum elapsarum faciet $\frac{48 + 1℞}{4}$. qui numerus æqualis est 1℞. quæ æquatio per multiplicationẽ in crucem reducetur ad hanc inter 4℞. & 48 + 1℞. Ablataque 1℞. vtrobique, erit æquatio inter 48. & 3℞. Diuisisque 48. per 3. fiet 1℞ 16 numerus horarum ab occasu præteritarum. quod ita probatur Tres quartæ horarum 16. elapsarum faciunt 12. horas, quibus si addatur $\frac{1}{2}$. horarum 8. quæ vsque ad alterum occasum supersunt, nimirum 4. fient horæ 16.

V. 5 *Quidam habet duas mensuras vini, quarum vna valet 12. nummos, & altera 15. Vult autem ex vtroque vino miscere vnam mensuram, cuius pretium sit 13. nummorum. Quæritur, quantum vini de quali bet mensura recipiendum sit.*

PONE 1℞ partium mensuræ vilioris vini. Et pretiosioris vini mensuram 1 — 1℞. Tunc institue regulam Trium bis, hoc modo.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Prioris vini | mensura 1 | numm. 12 | mens. 1℞? | numm. facit 12℞. |
| Posterioris vini. | 1 | 15 | 1 — 1℞? | facit 15 — 15℞. |

Nam si 1. mensura prioris vini valet 12. numm. 1℞. vnius mensuræ eiusdem vini valebit 12℞. numm. Et si 1. mensura posterioris vini valet 15 numm. 1 — 1℞. mens. eiusdem vini valebit 15 — 15℞ numm. Igitur 1℞ mens. prioris vini, & 1 — 1℞. mens. posterioris valebunt 15 — 3℞. numm. quod pretium æquiualebit 13. numm. Additis ergo 3℞. vtrobique, erit æquatio inter 3℞ + 13. & 15. Ablatisque 13. vtrinque, inter 3℞. & 2. Diuisis ergo 2. per 3. fiet 1℞. $\frac{2}{3}$. De viliori igitur vino recipiendæ sunt $\frac{2}{3}$. vnius mensuræ, & de præstantiori $\frac{1}{3}$. vnius mensuræ quod sic probatur.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Prioris vini | mens. 1 | numm. 12 | mens. $\frac{2}{3}$? | valent | numm. 8 |
| Posterioris vini. | 1 | 15 | $\frac{1}{3}$? | valent | 5 |

Nam $\frac{2}{3}$. vnius mensuræ prioris vini valebunt 8. numm. & $\frac{1}{3}$. mensuræ vini posterioris, 5. numm. atque idcirco 1. mensura mixta 13. numm.

VI. 6 *Mensura vini valet 10. numm. Quantum ergo aquæ commiscendum est vni mensuræ, vt 1. mensura mixta valeat 7. numm?*

PONE 1℞ mensuræ aquæ. Deinde institue regulam Trium hoc modo.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| mens. vini. mens. aquæ | numm. | mens. | mixta | numm. |
| 1 + 1℞ | 10 | 1? | valet | $\frac{10}{1 + 1℞}$ |

Nam

Nam si 1. mensura vini vna cum 1℞. mensuræ aquæ valet 10. numm. 1. mensura ex vino & aqua mixta valebit $\frac{10}{1+1℞}$. Itaque æquatio erit inter $\frac{10}{1+1℞}$. & 7. quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 10. & 7 + 7℞. Ablatisque 7. vtrobique, æquatio erit inter 3 & 7℞. Diuisisque 3. per 7. fiet 1℞ $\frac{3}{7}$. Ac tantum aquæ vnius mensuræ commiscendum est cum 1. mensura vini, vt 1 mensura mixta valeat 7. numm. quod ita probatur.

| mens. ex vino & aqua | numm. | mens. | | numm. |
|---|---|---|---|---|
| 1 $\frac{3}{7}$. | 10 | 1? | valet | 7 |

**Nam si 1. mensura vini cũ $\frac{3}{7}$. vnius mensuræ aquæ valet 10. numm. 1. mensura sola mixta valebit 7. numm.**

7 *Sunt in quodam vasculo 20. mensuræ vini, quarum quælibet valet 12. numm. Infunditur deinde vasculo illi aqua, donec vasculum vino illo & aqua repleatur. Et tunc 1. mensura mixta valet 10. numm. Quæritur, quanta sit capacitas illius vasculi.* VII.

**PONE mensuras 20 + 1℞. vnius mensuræ. Deinde institue regulam Trium sic.**

| mens. vini. | mens. aquæ. | numm. | mens. mixta | | numm. |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 + | 1℞ | 240 | 1? | valet | $\frac{240}{20+1℞}$. |

Nam si 1. mensura vini valet 12. numm. mensuræ vini 20 + 1℞. mens. aquæ simul valebunt 240 numm. Igitur 1. mensura mixta valebit $\frac{240}{20+1℞}$. numm. atque ita inuenta est æquatio inter $\frac{240}{20+1℞}$. & 10. quæ per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 240. & 200 + 10℞ Et ablatis 200. vtrinque, manebit æqualitas inter 40. & 10℞. Diuisisque 40. per 10. fiet 1℞. 4 atque tot mens. aquæ infusæ sunt illi vasculo, ita vt totum vasculum capiat 24. mensuras. quod probatur sic.

| mens. vini & aquæ | numm. | mens. | | numm. |
|---|---|---|---|---|
| 24 | 240 | 1? | valet | 10. |

Nam si 24. mensuræ ex vino & aqua valent 240. numm. propterea quod 1. mens. vini valet 12. numm. valebit 1. mens. mixta 10. numm.

8 *Duo tabellarij ex duabus ciuitatibus, inter quas intercipiuntur Leucæ 140. eodem die proficiscuntur, alter versus alterum. Vnus quolibet die conficit 8. Leucas, alter vero 6. Leucas. Quæstio est, quando conuenient, sibique mutuo occurrent.* VIII.

PONE in 1℞. dierum. & institue regulam Trium sic.

| Dies | Leucæ | Dies | Leucæ |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 1℞? | 8℞. |
| 1 | 6 | 1℞? | 6℞. |

Prior ergo in 1℞. dierum conficier 8℞. Leucarum. Et posterior 6℞. atque ambo simul emensi erunt 14℞. leucarum, hoc est, leucas 140. Est ergo æquatio inter 14℞. & 140. Diuisis igitur 140. per 14. fiet 1℞. 10. Atque decimo die peracto conuenient. quod sic probo.

| Dies | Leucæ | Dies | Leucæ |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 10? | 80 |
| 1 | 6 | 10? | 60 |

Nam prior in 10. diebus conficiet 80. leucas, & posterior 60. quæ simul totum spatium intermedium leucarum 140. constituunt.

9 *Quidam permutans 568. aureos, pro eis recipit quatuor genera monetarum. Primi generis monetæ 7. faciunt 1. aur. Secundi generis, 18. Tertij, 21. & quarti 28. Recipit autem ex quolibet genere eundem numerum monetarum. Quæritur, quotnam monetas cuiuslibet generis accipiat.* IX.

PONATVR 1℞. monetæ cuiuslibet, & regula Trium instituatur quater sic.

| Mon. | aur. | Mon. | aur. |
|---|---|---|---|
| 7 | 1 | 1℞? | $\frac{1}{7}$℞ |
| 18 | 1 | 1℞? | $\frac{1}{18}$℞ |
| 21 | 1 | 1℞? | $\frac{1}{21}$℞ |
| 28 | 1 | 1℞? | $\frac{1}{28}$℞ |

Nam si 7. mon. faciunt 1. aur. 1℞. mon. faciet $\frac{1}{7}$℞. aur. & sic de reliquis. Faciunt autem fractiones in quarto loco descriptæ numerum $\frac{71}{252}$℞. aur. æqualem numero 568. aur. Diuisis ergo 568. per [illegible] fiet 1℞. 2016. atque tot monetas ex quolibet genere recipiet. quod sic probo.

| Mon. | aur. | Mon. | aur. |
|---|---|---|---|
| 7 | 1 | 2016? | 288 |
| 18 | 1 | 2016? | 112 |
| 21 | 1 | 2016? | 96 |
| 28 | 1 | 2016? | 72 |

Nam 2016.moo.primi generis faciunt 288.aur. Secundi autem generis, 112.aur. Tertij, 96.aur. & quarti 72.aur.qui omnes faciunt summam 568.aur.

X. 10 *Mercator quidam emit lanam, & ceram pro 124. aur. Constant autem 100. libræ lanæ 7. aur. & 100. lib. ceræ 14. aur. emitq́; duplo plures lib. lanæ, quam ceræ. Quæstio est, quot lib. vtriusq́; rei emerit.*

PONE 1℞ librarum ceræ, & 2℞ librarum lanæ & institue bis regulam Trium, hoc modo.

| lib. | aur. | lib. | aur. |
|---|---|---|---|
| 100 lanæ | 7 | 2℞ lib. lanæ ? | $\frac{14}{100}$℞ |
| 100 ceræ | 14 | 1℞ lib. ceræ ? | $\frac{14}{100}$℞ |

Erit ergo inuenta æquatio inter $\frac{28}{100}$℞ aur. & 124. aur. Diuisisque 124. per $\frac{28}{100}$. fiet 1℞. $442\frac{6}{7}$. atque tot lib. ceræ emit, & lanæ lib. $885\frac{5}{7}$. quod ita probatur.

| lib. | aur. | lib. | aur. |
|---|---|---|---|
| 100 lanæ | 7 | $885\frac{5}{7}$? | 62 |
| 100 ceræ | 14 | $442\frac{6}{7}$? | 62 |

Ita enim pro lana, ac cera expendit 124. aur.

XI. 11 *Emit quidam aliquot vlnas panni, quas iterum vendidit. Emit autem 5. vlnas pro 7. aur. & vendidit 7. vlnas pro 11. aur. lucratusque est hac mercatura 100. aur. Quæritur, quotnam fuerint illæ vlnæ.*

PONE 1℞ vlnarum, & institue regulam Trium bis.

| vlnæ | aur. | vlnæ | aur. |
|---|---|---|---|
| 5 | 7 | 1℞? | $\frac{7}{5}$℞ |
| 7 | 11 | 1℞? | $\frac{11}{7}$℞ |

Vides, si $\frac{7}{5}$℞ aur. quos expendit, detrahantur ex $\frac{11}{7}$℞ aur. quos recepit, relinqui $\frac{6}{35}$℞ aur. pro lucro. Est ergo æquatio inter $\frac{6}{35}$℞ aur. & 100. aur. Diuisisque 100. per $\frac{6}{35}$. fiet 1℞. $583\frac{1}{3}$. vln. atq; tot fuerunt vlnæ emptæ atque venditæ. quod sic probo

| vlnæ | aur. | vlnæ | aur. |
|---|---|---|---|
| 5 | 7 | $583\frac{1}{3}$? | $816\frac{2}{3}$. |
| 7 | 11 | $583\frac{1}{3}$? | $916\frac{2}{3}$. |

Vbi cernis, eum lucratum esse 100. aureos.

XII. 12 *Emit quidam aliquot vlnas panni, expendens 11. aur. pro 7. vlnis. Et totum pannum iterum vendidit, coactusque est dare 5. vlnas pro 7. aureis: perdiditque in hac mercatura 100. aur. Quæritur, quot vlnas emerit, ac vendiderit.*

Pone 1℞. vln. &c. vt prius. & institue regulam Trium bis, hoc modo.

| vln. | aur | vln. | aur. |
|---|---|---|---|
| 7 | 11 | 1℞? | $\frac{11}{7}$℞ |
| 5 | 7 | 1℞? | $\frac{7}{5}$℞ |

Igitur si $\frac{7}{5}$℞ aur. quos recepit, detrahantur ex $\frac{11}{7}$. ℞ aur. quos expendit, emerget damnum $\frac{6}{35}$℞ aur. eritque æquatio inter $\frac{6}{35}$℞ aur. & 100. aur. Diuisis ergo 100. per $\frac{6}{35}$. fiet 1℞ $583\frac{1}{3}$ vln. atque tot vlnæ fuerunt emptæ, ac venditæ. quod sic probo.

| vln. | aur. | vln. | aur. |
|---|---|---|---|
| 7 | 11 | $583\frac{1}{3}$? | $916\frac{2}{3}$. |
| 5 | 7 | $583\frac{1}{3}$? | $816\frac{2}{3}$. |

Vides ergo eum damnum fecisse 100. aureorum.

XIII. 13 *Libræ 100. ceræ emuntur 17. aureis. Quæritur, quot libræ vendendæ sint pro 1. aur. vt 102. aur. lucrentur 18. aur.*

Pone 1℞ librarum, & institue regulam Trium bis.

| aur. | lib. | aur. | lib. |
|---|---|---|---|
| 17 | 100 | 102? | 600 |
| 1 | 1℞ | 102 + 18? | 120℞ |

Nam

Nam 102.aur.dabunt 600.lib.Et si pro 1.aur.datur 12ℓ.lib.dabuntur 1202ℓ.lib.pro aur. 102+18.quæ 1202ℓ. æquales sunt 600.lib.quia tota cera venditur.

Eritque æquatio inter 1202ℓ.lib.& 600.lib.Diuisis ergo 600.per 120.fiet 12ℓ.5.lib.Atque tot libræ vendendæ sunt pro 1.aur.vt in 600.libris fiat lucrum 18.aur. pro 102.aur.quod sic probo.

| lib. | aur. | lib. | aur. |
|---|---|---|---|
| 100 | 17 | 600? | 102 |
| 5 | 1 | 600? | 120 |

Vbi in priori exemplo vides 600.lib.facere 102.aur.In posteriori vero 120.aur.id est,102+18.

14 *Emit quidam 100. lib. ceræ pro 17. aur. in quibus vendendis fecit damnum 18. aur. pro 102. aur. Quæritur quot libras pro 1. aur. dederit.* XIIII.

Pone 12ℓ. librarum, &c.

| aur. | lib. | aur. | lib. |
|---|---|---|---|
| 17 | 100 | 102? | 600 |
| 1 | 12ℓ | 102−18? | 842ℓ |

Eritque æquatio inter 842ℓ.lib.& 600.lib. Diuisis igitur 600.per 84.fiet 12ℓ $7\frac{1}{7}$.lib.Atque tot lib.dedit pro 1. aur.vt damnum fecerit 18.aur.in 102.aur.& 600.libris. quod sic probo.

| lib. | aur. | lib. | aur. |
|---|---|---|---|
| 100 | 17. | 600? | 102 |
| $7\frac{1}{7}$ | 1 | 600? | 84 |

Vbi vides expensos fuisse 102.aur.pro 600.lib.Et pro eisdem receptos fuisse 84.aur.id est,102−18.

15 *Tres mercatores ineunt societatem.Primus ponit 40.aur.per 2.menses.Secundus 20.aur.per 5.menses Tertius summam quandam aur.per 3.menses.Lucrati sunt autem 3276. aur. de quibus primo obtigerunt 1040.aur.Secundo 1300.& tertio 936. Quæritur quot aureos tertius posuerit.* XV.

Ponatur 12ℓ aureorum.

| aur. | mens. | lucrum aur. | aur. |
|---|---|---|---|
| 40 | 2 | 3276 | 1040 primi |
| 20 | 5 | 3276 | 1300 secundi |
| 12ℓ | 3 | 3276 | 936 tertij |

Per multiplicationem aureorum in tempus,reducentur numeri ad regulam Trium hoc modo.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 252 | 80 | 3276? | 1040 primi |
| | 100 | 3276? | 1300 secundi |
| | 32ℓ.vel 72 | 3276? | 936 tertij |

VT autem inueniatur æquatio, & pretium 12ℓ.inueniendus est numerus primus in regula Trium, qui nimirum summa est trium numerorum 80.100.& 32ℓ.hoc modo. Quoniam ita se habet primus ille numerus inueniendus ad 80. vt 3276. ad 1040. [a] fiet idem numerus ex primo in quartum, qui ex secundo in tertium. [a] 19 sept. Si ergo 262080.productus ex secundo 80.in tertium 3276.diuidatur per quartum 1040 exibit primus 252. Ex quo si dematur summa ex 80.& 100.collecta, nimirum 180.remanebit pretium 32ℓ. videlicet 72. Diuisis ergo 72.per 3.fiet 12ℓ 24.numerus aur.quos tertius posuit.quæ pecunia ducta in 3.menses facit 72.&c.

Pretium 12ℓ.hoc etiam modo reperietur. Inuento primo numero 252 [b] erit numerus 235872. factus [b] 19. sept. ex primo 252.in quartum 936.æqualis numero 98282ℓ facto ex secundo 32ℓ.in tertium 3276. Diuisis igitur 235872.per 9828.fiet 12ℓ. 24. vt prius.

16 *Tres socij volunt inter se distribuere 455. aur.ea conditione, vt quoties primus recipit 2.toties secundus recipiat 3. Et quoties secundus recipit 4. toties tertius recipiat 5. Quæritur, quot aureos quilibet recipiat ex illa summa 455. aureorum.* XVI.

PONE primum accipere 12ℓ.Et secundum $1\frac{1}{2}$2ℓ vt habeat numerum sesquialterum ad primum. Tertium vero $1\frac{7}{8}$2ℓ.vt habeat numerum sesquiquartum ad secundum.Erit ergo æquatio inter $4\frac{3}{8}$2ℓ.& 455. Diuisis igitur 455.per $4\frac{3}{8}$.fiet 12ℓ 104.numerus primi. Secundus ergo accipiet 156 nimirum $1\frac{1}{2}$2ℓ.Tertius vero 195.nimirum $1\frac{7}{8}$2ℓ.quod sic probatur. Tres numeri 104.156.195.faciunt summam 455.diuidendam. Et quoties 2.sunt in 104.toties 3 sunt in 156. Et quoties 4.sunt in 156.toties 5.sunt in 195.cum idem Quotiens fiat, diuidendo 104. per 2.& 156.per 3.item diuidendo 156.per 4.& 195.per 5.

1 2ℓ
$1\frac{1}{2}$ 2ℓ
$1\frac{7}{8}$ 2ℓ

EADEM via tenenda est, si plures socij fuerint: vt si fuerint quatuor, & quoties tertius accipit 6. toties quartus accipiat 7. ponendæ erunt $2\frac{3}{16}$ ℞ pro quarto, vt habeat numerum sesquisextum ad tertium. Si igitur diuidendi sint aurei 21840. erit æquatio inter $6\frac{9}{16}$ ℞. & 21840. Diuisis igitur 21840. per $6\frac{9}{16}$ fiet 1℞. 3328. portio primi, quem posuimus accipere 1℞. Portio secundi erit $1\frac{1}{2}$℞. id est, 4992. Portio tertij erit $1\frac{7}{8}$℞. nimirum 6240. Portio denique quarti erit $2\frac{3}{16}$℞. hoc est, 7280. quod probabis, vt prius. Nam omnes quatuor portiones faciunt summã diuidendam 21840. & idem Quotiens fit, diuidendo 3328. per 2. & 4992. per 3. Atque idem quoque, diuidendo 4992. per 4. & 6240. per 5. Deniq; idem ẽt, diuidendo 6240. per 6. & 7280. per 7.

| | |
|---|---|
| 1 | ℞ |
| $1\frac{1}{2}$ | ℞ |
| $1\frac{7}{8}$ | ℞ |
| $2\frac{3}{16}$ | ℞ |

XVII. 17 *Habeo quatuor auri fragmenta, quæ æquiualent aureis 164. Et primum in valore duplum est secundi: secundum triplum tertij: & tertium quadruplum quarti. Quæritur valor singulorum fragmentorum.*

PONE quartum, siue minimum 1℞. aur tertium 4℞. secundum 12℞. & primum 24℞. Sunt ergo 41℞ æquales 164 aur. Diuisisque 164 per 41. fiet 1℞. 4. atque tot aureis æquiualet minimum fragmentum, siue quartum: atque idcirco tertium valebit 16. aur. secundum 48. & primum 96. qui quidem aurei faciunt summam 164 & seruant proportiones in quæstione expressas.

XVIII. 18 *Tres socij conferunt totam suam pecuniam, atque ita colligunt 100. aur. Est autem pecunia primi subdupla pecuniæ secundi: & pecunia secundi subtripla pecuniæ tertij. Quæritur, quantum quisque contulerit.*

PONE primum contulisse 1℞. Secundum 2℞ & tertium 6℞. Eruntq; 9℞ æquales 100. aur. Diuisis igitur 100. per 9 fiet 1℞. $11\frac{1}{9}$ pecunia primi. Secundi pecunia idcirco erit $22\frac{2}{9}$. Et tertij $66\frac{6}{9}$. quæ tres summæ faciunt 100. aur. seruantque proportiones in quæstione expressas.

XIX. 19 *Moriens quidam testamentum condit, relinquitque 3000. aur. distribuendos inter vxorem, filium & duas filias hac conditione, vt portio filij sit dupla portionis matris: & portio matris dupla quoque portionis vnius filiæ. Quæritur, quanta sit vniuscuiusque portio.*

PONATVR portio vnius filiæ 1℞. matris 2℞. & filij 4℞. Erunt ergo 8. ℞ æquales 3000. aur.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Portio | filiæ | 1℞ | id est | 375 | aur. |
| | filiæ | 1℞ | | 375 | |
| | matris | 2℞ | | 750 | |
| | filij | 4℞ | | 1500 | |

Diuisisque 3000. per 8 fiet 1℞ 375 portio vnius filiæ. atque idcirco portio matris 750. & filij 1500.

XX. 20 *Mercator quidam qualibet parte tertia suæ pecuniæ lucratur $\frac{1}{20}$. eiusdem pecuniæ. Deinde qualibet parte tertia eiusdem pecuniæ lucratur $\frac{1}{3}$. lucri prioris. Et sic omnibus computatis, inuenit 864. aur. Quæritur quanta fuerit illa pecunia, & quantum vtrumque lucrum.*

PONATVR 1℞ pecuniæ. Ergo primum lucrum fuit $\frac{3}{20}$℞ quando quidem qualibet $\frac{1}{3}$℞. lucrata est $\frac{1}{20}$℞. Deinde secundum lucrum fuit $\frac{1}{3}$℞ prioris lucri $\frac{3}{20}$℞. nimirum $\frac{3}{60}$℞. hoc est, $\frac{1}{20}$℞. quandoquidem qualibet $\frac{1}{3}$℞ lucrata est $\frac{1}{3}$. prioris lucri. Iam 1℞. $\frac{3}{20}$℞. & $\frac{1}{20}$℞. faciunt summã $1\frac{1}{5}$℞. æqualem 864. aur. Diuisis ergo 864. per $1\frac{1}{5}$. fiet 1℞. 720. atque tot aureos habuit mercator ille. Ergo lucrum primum $\frac{3}{20}$℞. fuit 108. aur. Et lucrum secundum $\frac{1}{20}$. fuit 36 aur. quæ duo lucra cum 720. aur. faciunt 864. aur.

XXI. 21 *Mercator quidam qualibet parte quarta suæ pecuniæ lucratur $\frac{1}{20}$. eiusdem pecuniæ. Deinde qualibet parte tertia eiusdem pecuniæ lucratur $\frac{1}{10}$. summæ ex eadem pecunia, & lucro collectæ. Et sic singulis computatis, inuenit mercator ille 400. aur. Quæritur, quanta fuerit illa pecunia, & quantum vtrumque lucrum.*

PONE pecuniam fuisse 1℞ Ergo primum lucrum fuit $\frac{4}{20}$℞. hoc est, $\frac{1}{5}$℞. Deinde secundum lucrum fuit $\frac{18}{50}$℞ siue $\frac{9}{25}$℞. nimirum $\frac{3}{10}$. summæ $\frac{6}{5}$℞. ex priori lucro, & 1℞. collectæ. Iam 1℞. $\frac{1}{5}$℞. & $\frac{9}{25}$℞ faciunt summam $1\frac{14}{25}$℞. æqualem 400. aur. Diuisis ergo 400. per $1\frac{14}{25}$. fiet 1℞. $256\frac{16}{39}$. aur. atque tot aur. habuit mercator ille. Primum autem lucrum $\frac{1}{5}$℞. fuit aur. $51\frac{11}{39}$. Secundum vero lucrum $\frac{9}{25}$℞. fuit $92\frac{4}{13}$. quæ duo lucra cum $256\frac{16}{39}$. faciunt 400. aur.

XXII. 22 *Mercator quidam qualibet parte quarta suæ pecuniæ lucratur $\frac{1}{30}$. eiusdem pecuniæ. Deinde singulis partibus quintis eiusdẽ pecuniæ prioris lucratur $\frac{1}{27}$. eiusdem pecuniæ. Atque ita singulis computatis, inuenit 2136. aur. Quæritur, quanta fuerit illa pecunia, & quantum vtrumq; lucrum.*

PONE pecuniam fuisse 1℞. Ergo primum lucrum fuit $\frac{4}{30}$℞. siue $\frac{2}{15}$℞. Secundum vero $\frac{5}{27}$℞. Iam 1℞. $\frac{2}{15}$℞. & $\frac{5}{27}$℞. faciunt summam $1\frac{43}{135}$℞ æqualem 2136. aur. Diuisis igitur 2136. per $1\frac{43}{135}$. fiet 1℞. 1620. aur. pecunia mercatoris. Ergo primum lucrum $\frac{2}{15}$℞. fuit 216. aur. Secundum vero $\frac{5}{27}$℞. fuit 300. aur. quæ duo lucra cum 1620. aur. faciunt summam 2136. aur.

23 *Tria poma aurea venduntur 11. denariolis. Quaritur quot poma vendantur pro 572. denariolis.* XXIII.

HÆC quæstio per regulam Trium expedietur hoc modo.

| Denar. | pom. aur. | Denar. | pom. aur. |
|---|---|---|---|
| 11 | 3 | 572? | 156. |

Per Algebram vero soluetur, si pro quarto numero inueniendo in regula Trium ponatur 1Ꝛ pomorum. [a] Et [a] 19. sept. quia tantum fit ex primo in quartum, quantum ex secundo in tertium, erit numerus 11Ꝛ productus ex primo

| Denar. | pom. aur. | Denar. | pom. aur. |
|---|---|---|---|
| 11 | 3 | 572? | 1Ꝛ |

in quartum, æqualis numero 1716. producto ex secundo in tertium. Diuisis ergo 1716. per 11. fiet 1Ꝛ. 156. numerus pomorum, quæ constant 572. denar. Vides ergo excellentiam Algebræ etiam in quæstionibus regulæ Trium. quod etiam in sequenti exemplo apparebit.

24 *Libræ 47. quarundam mercium constant aur. 30. Quæritur, quanti constabunt 100. libræ.* XXIV.

PONATVR 1Ꝛ. vt hic vides.

| lib. | aur. | lib. | aur. |
|---|---|---|---|
| 47 | 30 | 100? | 1Ꝛ |

Est ergo æquatio inter 47 Ꝛ. & 3000. Diuisis ergo 3000 per 47 fiet 1Ꝛ. $63\frac{39}{47}$. aur.

25 *Est massa quædam argenti pondus habens marcarum 7. quarum qualibet continet 5. semiuncias puri argenti, & 11. semiuncias cupri. Commiscetur autem massæ illi liquatæ alia massa cupri puri, ponderis 21. marcarum. Quæritur quantum argenti puri habitura sit qualibet marca illius massæ nouæ 28. marcarum.* XXV.

HIC certum est, pauciores semiuncias puri argenti contineri in 28. marcis, quam in 7. quippe cum semunciæ in his contentæ distributæ sint æqualiter inter 28. marcas. Et quia in illis 7. ponuntur 35. semunciæ puri argenti, diuisis his per 28. reperientur in qualibet marca $1\frac{1}{4}$. semunciæ puri argenti. Si igitur 1 marca pondus habet 16. semunciarum, erunt in qualibet marca $14\frac{3}{4}$. semunciæ cupri. Hoc autem ita esse, facile probabitur. Nam pondus 21. marcarum cupri puri, faciet 336. semuncias cupri: Et si accedant 77 semunciæ in prioribus 7 marcis contentæ, fient semunciæ cupri 413. qui numerus etiam producitur ex $14\frac{3}{4}$. (quot nimirum semuncias cupri in qualibet marca inesse diximus) in 28. marcas. Sed vt quæstio hæc soluatur per Algebram, sic stabit exemplum ad regulam Trium inuersam.

| arg. mix. | arg. pur. | arg mix. | arg. pur |
|---|---|---|---|
| 7. marc. | 5. semiunc. | 28. marc? | semiunc. 1Ꝛ |

Et quoniam in regula Trium inuersa, numerus factus ex primo in secundum, æqualis est numero facto ex tertio in quartum, propterea quod tertius numerus in regula Trium ordinaria deberet tenere primum locum, vt in Arithmetica practica diximus: erit æquatio inter 35. & 28Ꝛ Diuisisque 35. per 28 fiet 1Ꝛ. puri argenti semunciæ $1\frac{1}{4}$. vt prius.

26 *Quinque conuictores singulis hebdomadis soluunt 11. aur. quantum ergo soluent 18. conuictores in 40. diebus.* XXVI.

HÆC quæstio spectat ad regulam Trium compositam. quæ ad regulam Trium simplicem reducitur per multiplicationem conuictorum in tempus, vt hic.

| Conuict. | Dies | aur. | Conuict. | Dies | aur. |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 7 | 11 | 18 | 40? | 1Ꝛ |

| Conuict. | aur. | Conuict. | aur. |
|---|---|---|---|
| 35 | 11 | 720? | 1Ꝛ |

Nam tantum soluet vnus in duobus diebus, quantum duo in vno. Et tantum vnus in 35. diebus, quantum 5. in septem. atque hæc est ratio, cur dicta multiplicatio fieri debeat. Posito igitur quarto numero 1Ꝛ. erit æquatio inter 35 Ꝛ. & 7920. Diuisis ergo 7920. per 35. fiet 1Ꝛ. $226\frac{2}{7}$. aur. quot nimirum 18. conuictores in 40. diebus soluent.

XXVII. 27 *Pro tribus ponderibus æqualibus vehendis per leucas 7. debentur vectori 11. grossi, quorum quilibet valet denariolos 25. Quæro iam, quot similia pondera sint vehenda per 40. leucas pro 400. grossis.*

HÆC etiam quæstio ad regulam Trium compositam pertinet, vt hic vides.

| Grossi | Pond. Leuc. | Grossi | Pond. Leuc. |
|---|---|---|---|
| 11 | 3 7 | 400? | 1℞ 40 |

Pone 1℞. Pond. vehendorum, & reduc regulam ad regulam Trium ordinariam per multiplicationem pond. in spatium itinerarium: quandoquidem tantum soluendum est pro 1. pondere per 2. Leucas, quantum pro 2. pond. per 1. Leucam: & tantum per 1. pond. per 21. Leuc. quantum pro 3 pond. per 7 Leuc. quam reductionem

| Grossi | Pond. | Grossi | Pond. |
|---|---|---|---|
| 11 | 21 | 400? | 40℞ |

hic cernis. Erit igitur æquatio inter 440℞. & 8400. Diuisis ergo 8400. per 440. fiet 1℞. $19\frac{1}{11}$. Pond. vehenda per 40. Leucas pro 400 grossis. Nam si pro 3. pond. per 7. Leucas soluuntur 11. grossi, pro $19\frac{1}{11}$. pond. per 7. Leucas soluentur 70 grossi. vt hic vides.

| Pond. | Grossi | Pond. | Grossi |
|---|---|---|---|
| 3 | 11 | $19\frac{1}{11}$? | 70 |

Deinde si per 7 Leucas soluuntur 70 grossi, per 40 Leucas soluentur 400. grossi, vt hic vides.

| Leuc. | Grossi | Leuc. | Grossi |
|---|---|---|---|
| 7 | 70 | 40? | 400 |

XXVIII. 28 *Tres sartores perficiunt 7. tunicas 14. diebus. Quot igitur diebus duo sartores perficient 8. tunicas?*

Pone 1℞. dierum

| Sart. Dies | Tunic. | Sart. Dies | Tunic. |
|---|---|---|---|
| 3 14 | 7 | 2 1℞ | 8 |

Reductis numeris per multiplicationem ad regulam Trium ordinariam, vt hic.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 42 | 7 | 2℞ | 8 |

Erit æquatio inter 336. & 14℞. Diuisis ergo 336. per 14. fiet 1℞. 24. dies, in quibus duo sartores 8. tunicas perficient. Nam si 3. sartores in 14. diebus perficiunt 7. tunicas, duo sartores in 14. diebus, nimirum in eodem tempore, perficient $4\frac{2}{3}$. tunicas, vt hic cernitur.

| Sart. | Tunic. | Sart. | Tunic. |
|---|---|---|---|
| 3 | 7 | 2? | $4\frac{2}{3}$. |

Deinde si tunicæ $4\frac{2}{3}$. absoluuntur 14 diebus, tunicæ 8. absoluentur diebus 24. vt hic constat.

| Tunic. | Dies | Tunic. | Dies |
|---|---|---|---|
| $4\frac{2}{3}$ | 14 | 8? | 24 |

XXIX. 29 *Seruo cuidam promisit quidam ciuis pro 12. mensibus mercedem 10. aur. & 1. tunicam. Post 7. autem menses dedit illi tunicam, & 2. aur. Quanti ergo æstimata est tunica illa?*

PONE eius pretium esse 1℞. aur. Et dic. Si 12. menses poscunt 1℞ + 10. aur. quantum postulat 1. mensis? inueniesque $\frac{1℞+10}{12}$. aur. Rursum dic. Si 7. menses poscunt 1℞ + 2. aur. quantum postulat 1. mensis? inueniesque $\frac{1℞+2}{7}$. aur. vt hic vides.

| Menses | Aurei | Mensis | Aurei |
|---|---|---|---|
| 12 | 1℞ + 10 | 1? | $\frac{1℞+10}{12}$ |
| 7 | 1℞ + 2 | 1? | $\frac{1℞+2}{7}$ |

Erit ergo æquatio inter $\frac{1℞+10}{12}$ & $\frac{1℞+2}{7}$. cum vterque numerus sit merces 1. mensis quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 7℞ + 70. & 12℞ + 24. Ablatis ergo 24 vtrinque, erit æquatio inter 7℞ + 46. & 12℞. Rursumque ablatis 7℞. vtrobique, inter 46 & 5℞. Diuisis igitur 46 per 5. fiet 1℞ $9\frac{1}{5}$. aur. pro pretio tunicæ. Nam hac ratione merces 12. mensium erit $19\frac{1}{5}$. aur. nimirum 10. aur. & tunica. Igitur merces 7. mensium erit $11\frac{1}{5}$ aur vt hic vides. nimirum 2. aur. & pretium tunicæ $9\frac{1}{5}$. aur.

| Menses. | Aur. | Menses. | Aur. |
|---|---|---|---|
| 12 | $19\frac{1}{5}$. | 7? | $11\frac{1}{5}$. |

30 Ciuis

30 *Ciuis quidam seruo suo pigro ita mercedem 30. dierum constituit, vt laboranti singulis diebus dare velit 7. grossos: ociantem vero mulctare 5. grossis. Ratione autem inita post 30. dies, seruus ille neque recipit aliquid, neque domino aliquid reddit. Quot igitur diebus laborauit, & quot laborare intermisit?* XXX.

PONE 1℞. dierum laboris, ideoque 30 —— 1℞ dierum otij. Et institue regulam Trium bis, hoc modo.

| | Dies | grossi | Dies | grossi |
|---|---|---|---|---|
| Laboris | 1 | 7 | 1℞? | 7℞ |
| Otij | 1 | 5 | 30—1℞? | 150—5℞ |

Quia igitur tantum meruit, quantum demeruit, erit æquatio inter 7℞,&150—5℞. Additisque 5℞ vtrobique, inter 12 ℞. & 150. Diuisis ergo 150 per 12. fiet 1℞. 12 $\frac{1}{2}$ dies laboris, & otij 17 $\frac{1}{2}$. quod ita probatur.

| | Dies | grossos | Dies | grossos |
|---|---|---|---|---|
| Laboris | 1 | 7 | 12 $\frac{1}{2}$? | 87 $\frac{1}{2}$ |
| Otij | 1 | 5 | 17 $\frac{1}{2}$? | 87 $\frac{1}{2}$ |

Vbi vides, tantam esse mercedem, quanta est mulcta.

31 *Mercator quidam vendidit 20. libras partim croci, & partim zinziberis, aureis 45. Vendidit autem 1 lib. croci aureis 3. & 1. libram zinziberis $\frac{1}{2}$. aur. Quæstio est, quot libræ croci venditæ sint, & quot zinziberis?* XXXI.

PONE 1℞ librarum croci, ideoque 20 —— 1℞ librarum zinziberis, & institue regulam Trium bis, hoc modo.

| | lib. | aur. | lib. | aur. |
|---|---|---|---|---|
| Croci | 1 | 3 | 1℞? | 3℞ |
| Zinzib. | 1 | $\frac{1}{2}$ | 20—1℞? | $\frac{20-1℞}{2}$ |

Æquatio igitur est inter summam ex 3℞ aur. & $\frac{20-1℞}{2}$ aur. collectam, & 45. aur. Est autẽ illa summa 10 + $\frac{5}{2}$℞ aur. (Nam $\frac{20-1℞}{2}$ æquiualent numero 10 — $\frac{1}{2}$℞. cui si addantur 3℞ aur. fit summa 10 + $\frac{5}{2}$℞.) Igitur æquatio est inter aur. 10 + $\frac{5}{2}$℞ aur. & 45. aur. Ablatisq; 10. aur. vtrobique, inter $\frac{5}{2}$℞ & 35. Diuisis igitur 35 per $\frac{5}{2}$. fiet 1℞. 14. Atque tot lib. croci venditæ sunt, ac proinde 6. lib. zinziberis. quod ita probatur.

| | lib. | aur. | lib. | aur. |
|---|---|---|---|---|
| Croci | 1 | 3 | 14? | 42 |
| Zinzib. | 1 | $\frac{1}{2}$ | 6? | 3 |

Vbi vides ex pretio 14 lib. croci, & 6 lib. zinziberis colligi 45 aureos.

32 *Negociator quidam habet duo genera monetarum numero 560. quæ æquiualent 160. aureis. Quædam illarum monetarum valent $\frac{1}{3}$. aur. & reliquarum quælibet $\frac{1}{4}$. aur. Quæritur numerus priorum, ac posteriorum.* XXXII.

PONE 1℞. priorum, & posteriorum 560 — 1℞. & institue regulam Trium bis, hoc modo.

| Monet. | aur. | Monet. | aur. |
|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{3}$ | 1℞? | $\frac{1}{3}$℞ |
| 1 | $\frac{1}{4}$ | 560—1℞? | $\frac{560-1℞}{4}$ |

Quarti numeri inuenti æquiualent 160. aur. Summa illorum numerorum facit aur 140 + $\frac{1}{12}$ ℞. (Nam $\frac{560-1℞}{4}$. æquiualent numero 140 —— $\frac{1}{4}$℞. cui si addatur $\frac{1}{3}$℞. fit summa 140 + $\frac{1}{12}$ ℞) Est igitur æquatio inter aur. 140 + $\frac{1}{12}$ ℞, & 160 aur. Ablatisque 140 vtrinque, inter $\frac{1}{12}$ ℞ & 20. Diuisis igitur 20 per $\frac{1}{12}$ fiet 1℞. 240. atque tot monetæ sunt prioris generis, quarum singulæ valent $\frac{1}{3}$ aur posterioris autem generis, quarum singulæ valent $\frac{1}{4}$. aur. sunt 320. quod ita probatur.

| Monet. | aur. | Monet. | aur. |
|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{3}$ | 240? | 80 |
| 1 | $\frac{1}{4}$ | 320? | 80 |

Vbi cernis, numeros in quarto loco positos facere 160. aur.

33 Qui-

XXXIII. 33 *Quidam lanio boues emit, qui interrogatus, quanti vnum emerit, respondit: Quanto 10. boues emi pluris 40. aureis, tanto 18. boues emissem pluris 96. aureis. Quæritur de pretio.*

HÆC quæstio soluetur per modum regulæ Algebræ sine numeris Cossicis, & sine positione 1 ℞. quod sane peregregium videri possit. quod etiam in proximis tribus quæstionibus, quæ sequuntur, faciemus. Quoniam igitur boues 10 — 40. aur. excessus est pretij 10. boum supra 40 aur. quippe cum dicat lanio, se amplius 40 aur. expendisse, quos non debuisset expendere. Item boues 18 — 96. aur. excessus est pretij 18. boum supra 96 aur. quos non debuisset expendere. atque hi duo excessus æquales ponuntur: erit æquatio inter boues 10 — 40 aur. & boues 18 — 96 aur. Additisque 96. aur. vtrobique, inter boues 10 + 56 aur. & boues 18. (Nam ex 96. additis ad — 40. fit summa + 56) Et ablatis 10 bobus vtrinque, inter 56 aur & 8. boues. Diuisis ergo 56 per 8. fiet pretium 1 bouis 7 aur. quod ita probatur. 10 boues valebunt 70 aur. ablatisque 40 aur. quos vltra iustum pretium expendit, remanent aur. 30 pro pretio 10 boum. Item 18 boues valebunt 126 aur. detractisque 96 aur. quos non debuerat expendere, remanent similiter 30 aur. pro pretio 18 boum.

Si dixisset lanio ille, se 10 boues tanto emisse pluris 40 aur. quanto emere potuisset 18 boues minoris 96 aur. existeret æquatio inter boues 10 — 40 aur. & aur. 96. — 18 bobus. quia ille esset excessus pretij 10 boū vltra 40 aur. hic autem excessus aur. 96. vltra pretium 18 boum. Additis igitur 18 bobus vtrinque, erit æquatio inter 28 boues — 40 aur. & 96 aur. Additisque rursum 40 aur. vtrobique, inter 28 boues. & 136 aur. Diuisis ergo 136 per 28. fiet pretium 1 bouis aur. $4\frac{6}{7}$. quod probatur sic. Boues 10. valebunt aur $48\frac{4}{7}$. & demptis 40. aur. remanent aur. $8\frac{4}{7}$. pro pretio 10 boum. Item 18 boues valebunt aur. $87\frac{3}{7}$. quibus demptis ex 96. remanent similiter aur. $8\frac{4}{7}$. pro pretio 18 boum.

Sic si dicas. Emi 4 grossis — 3. ouis, 41. oua, erit æquatio inter 4 gros. — 3. ouis, & 41. oua. Additisq; 3. ouis vtrobique, inter 4. gros. & 44. oua. Diuisis igitur 44 per 4. fiet Quotiens 11. atque tot oua ementur 1 grosso.

Item si dicas. 4 grossi — 3. denar. faciunt 97. denariolos, inuenies 1 gros. facere 25 denar.

Item si dicat quis, 4 aur. + 125 gros. facere aur. $10\frac{1}{4}$. Demptis 4 aur. vtrobique, erit æquatio inter 125 gros. & $6\frac{1}{4}$ aur. Diuisis ergo $6\frac{1}{4}$ aur. per 125 gros. fiet Quotiens $\frac{1}{20}$ aur. valor 1 grossi, hoc est, 1 groff. facit $\frac{1}{20}$ vnius aurei. Quod si diuides 125 groff. per $6\frac{1}{4}$ aur. fiet Quotiens 20 atque tot grossi facient 1. aureum.

XXXIV 34 *Quando 7. vlnæ cuiusdam panni emuntur $4\frac{1}{2}$. aur. emuntur eodem pretio 17. vlnæ aur. 10. groff. $18\frac{4}{7}$. Quæstio est, quot grossi faciant 1. aur.*

QVONIAM eadem est proportio 7. vln. ad $4\frac{1}{2}$. aur. quæ 17 vln. ad aur. 10. groff. $18\frac{4}{7}$. collocabimus hos quatuor numeros proportionales hoc ordine.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| vlnæ | aur. | vlnæ | aur. | groff. |
| 7 | $4\frac{1}{2}$. | 17? | 10. | $18\frac{4}{7}$. |

a 19. sept. a Et quia tantum fit ex primo in quartum, quantum ex secundo in tertium; erit æquatio inter 70. aur. + 130 groff. & [illegible] aur. siue $76\frac{1}{2}$. aur. Ablatisque 70. aur. vtrobique, inter 130 groff. & $6\frac{1}{2}$. aur. Diuisis ergo 130 per $6\frac{1}{2}$. fiet Quotiens 20. atque tot grossi æquiualent 1. aureo.

XXXV. 35 *Quidam recepit à mercatore crocum pro 10. aur. Deinde rursum ab eodem accepit 24. lib. croci. Tandem reddit mercatori 30. lib. croci, & mercator, supputato pretio croci, restituit ei 14. aur. Quæritur pretium 1. lib. croci.*

HIC vides 10. aur. + 24 lib esse totum debitum, quod emptor mercatori debet. Similiter 30. lib. — 14. aur. Est ergo æquatio inter 10 aur. + 24 lib. & 30 lib. — 14. aur. Additisque 14. aur. vtrobique, inter 24 aur. + 24 lib. & 30 lib. Ablatisque 24 lib vtrinque, inter 24 aur. & 6 lib. Diuisis igitur 24 per 6 fiet Quotiens 4. atque tot aurei faciunt pretium 1. libræ. quod sic probatur.

Pro 10 aur. emuntur libræ $2\frac{1}{2}$. atque ita emptor recepit à mercatore lib. $26\frac{1}{2}$. quæ valent 106 aur. Si igitur mercatori restituantur 30 lib. debebit mercator emptori lib. $3\frac{1}{2}$. cum hic solum receperit lib. $26\frac{1}{2}$. Valent autem $3\frac{1}{2}$ lib. aur. 14. quos mercator emptori restituit.

XXXVI. 36 *Ciuis quidam inuenit, nescio quot, pauperes ante ianuam domus suæ: quibus è denariolis, quos in manu habet, septenos erogat denariolos. quo facto, supersunt ei in manu 24. denarioli. Quod si cuilibet dare voluisset 9. defuissent illi 32. denarioli. Quæritur, quot pauperes fuerint, & quot denariolos ciuis ille habuerit in manu.*

HIC vides. 7. summas denariolorum, quarum quælibet æqualis est numero pauperum, + 24 denar. æquales esse toti numero denariolorū, quos ciuis ille in manu habebat: propterea quod tot denarioli, quot sunt pauperes, vnam summā constituunt; ac proinde toties 7. denarioli, quot sunt pauperes, constituent 7. summas, Eodem modo 9. summæ denariolorum, quarum quælibet æqualis est eidem numero pauperum, — 32. denar. æquales erunt toti numero denariolorum, quos ille ciuis habebat in manu. Ergo æquatio erit inter 7. summ. + 24. & 9. summ. — 32. Additisq; 32. vtrinque, inter 7. summ. + 56 & 9. summ. Ablatisq; 7. summ. ex 9. inter 56. & 2. summ. Diuisis ergo 56 per 2 fiet Quotiens 28. numerus pauperum. Nam si cuilibet dentur 7. denar. erogati erunt 196. denar. Et quia tunc superfuerunt 24. denar. habuit ciuis ille in manu 220. denar. Quod si cuilibet dare voluisset 9. denar. oportuisset illum habere in manu 252. denar. Defuissent ergo illi 32. denarioli.

37 Pro

37 *Pro 70. summis librarum quarundam mercium penditur vectigal 1. summa — 32. aur. Et pro 200. summis penditur 1. summa + 20. aur. Quæritur, quanti 1. summa constet.* XXXVII

PONE 1℞ aur. & institue regulam Trium bis, hoc modo.

| Summæ | aur. | Summa | aur. |
| --- | --- | --- | --- |
| 70 | 1℞ − 32 | 1? | $\frac{1℞-32}{70}$ |
| 200 | 1℞ + 20 | 1? | $\frac{1℞+20}{200}$ |

Nam si pro 70. summ. penditur vectigal 1℞ − 32 aur. pro 1. summa pendetur $\frac{1℞-32}{70}$ aur. &c. Atque ita erit æqualitas inter $\frac{1℞-32}{70}$ aur & $\frac{1℞+20}{200}$ aur. cum vterque numerus sit vectigal 1. summæ. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 200℞ − 6400 aur. & 70℞ + 1400 aur. Additis igitur 6400. vtrobique, erit æquatio inter 200℞ & 70℞ + 7800. Ablatisq; 70℞ vtrinque, inter 130℞ & 7800. Diuisis ergo 7800 per 130. fiet 1℞. 60 aur. pro pretio vnius summæ. quod sic probatur. Pro 70 summis penditur vectigal 28 aur. nimirum 1℞ − 32 aur. Et pro 200. summis pendetur vectigal 80 aur. nimirum 1℞ + 20 aur. vt hic apparet.

| Summæ | aur. | Summæ | aur. |
| --- | --- | --- | --- |
| 70 | 28 | 200? | 80 |

38 *Vlnæ 10. panni rubri cum 4. vlnis panni nigri constant aur. 88. atque eodem pretio 2. vlnæ panni rubri cum 4. vlnis panni nigri constant aur. 32. Quæstio est de pretio 1. vlnæ.* XXXVIII

PONATVR 1℞ pretium 1. vlnæ panni rubri. Constabuntque 10 vlnæ 10℞. ac proinde 4 vlnæ panni nigri constabunt 88 aur. − 10℞. Vlnæ vero 2. panni rubri constabunt 2℞, ideoque 4 vlnæ panni nigri, 32 aur. − 2℞. Erit ergo æquatio inter 88 aur. − 10℞ & 32 aur. − 2℞. cum vterque numerus sit pretium 4 vlnarũ panni nigri. Additis igitur 10℞ vtrobiq;, erit æquatio inter 88 aur. & 32 aur. + 8℞ Ablatisq; 32. aur. vtrinque, inter 56 aur. & 8℞. Diuisis ergo 56 per 8. fiet 1℞. 7. aur. pro pretio vnius vlnæ panni rubri. quod probatur. Nam 10 vlnæ valebunt aur. 70. propterea que 4. vlnæ panni nigri, aur. 18. qui cum 70. faciunt 88. aur. Igitur 1 vlna panni nigri valebit aur. 4 $\frac{1}{2}$. Atque hoc pretio 2 vlnæ panni rubri cum 4 vlnis panni nigri valebunt aur. 32.

QVOD si 10. vlnæ panni rubri cum 4 vlnis panni nigri constent aur. 88. atque eodem pretio 2 vlnæ panni rubri cum 6 vlnis panni nigri constent aur. 41. constabunt 4. vlnæ panni nigri aur. 88 − 10℞. Et 6. vlnæ panni nigri, aur. 41 − 2℞. si nimirum ponatur 1℞. pro pretio 1 vlnæ panni rubri, vt prius Sed non erit æquatio inter aur. 88 − 10℞. & aur. 41 − 2℞. cum prior numerus sit pretium 4 vlnarum panni nigri. posterior vero 6 vlnarum. Oportet ergo prius inuestigare pretium 4 vlnarum ex pretio 6 vlnarum, per regulam Trium, hac ratione.

| Vlnæ | aur. | Vlnæ | aur. |
| --- | --- | --- | --- |
| 6 | 41 − 2℞ | 4? | $\frac{164-8℞}{6}$ |

Inuenieturque 4 vlnarum pretium $\frac{164-8℞}{6}$ aur. atque ita inuenta erit æquatio inter aur. 88 − 10℞ & aur. $\frac{164-8℞}{6}$. quæ per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter aur. 528 − 60℞. & aur. 164 − 8℞. Additisque 60℞ vtrobique, inter 528 aur. & aur. 164 + 52℞. Et ablatis 164 aur. vtrinque inter 52℞. & 364 aur. Diuisis ergo 364 per 52 fiet 1℞. 7 aur. pro pretio 1 vlnæ panni rubri, veluti prius.

ET si 10 vlnæ panni rubri cum 4 vlnis panni nigri constarent 88 aur. vt prius, sed 2 vlnæ panni rubri cum 4 vlnis panni nigri valerent tantum 20 aur inuenires pretium 1℞. 8 $\frac{1}{2}$ pro pretio 1 vlnæ panni rubri. quod probare potes. Nam 10 vlnæ panni rubri valebunt 85 aur. & 4 vlnæ panni nigri, aur. 3. ideoque 1 vlna $\frac{3}{4}$ aur. Atque ita 2 vlnæ panni rubri valebunt aur. 17. qui cum 3 aur. nimirum cum pretio 4 vlnarum, faciunt 20 aur.

39 *Mercator in tribus nundinis eandem aureorum summam exponens lucratus est in singulis $\frac{1}{8}$. suæ summæ aureorum. Deinde ad alias se conferens nundinas lucratus est $\frac{3}{10}$. eiusdem suæ summæ priore lucro auctæ. Atque ita deprehendit se habere 1287 aur. Quæritur summa aureorum, quos initio habuit.* XXXIX.

PONATVR 1℞. Et quia in singulis nundinis lucratus est $\frac{1}{8}$℞. habebit post illas tres nundinas aur. 1 $\frac{3}{8}$℞ hoc est, $\frac{11}{8}$℞. Deinde quia cum $\frac{11}{8}$℞ lucratus est $\frac{3}{10}$ ℞. id est, $\frac{33}{80}$℞. si hoc lucrum ad $\frac{11}{8}$℞ adiiciatur, fiet summa $\frac{143}{80}$℞. quam vltimo loco habuit. quæ æqualis est 1287 aur. Diuisis ergo 1287 per $\frac{143}{80}$ fiet 1℞. 720 summa aureorum illius mercatoris. Nam eius $\frac{3}{8}$. quas in tribus nundinis est lucratus, sunt 270. aur. qui cum 720. faciunt 990 aur. cum quibus tandem lucratus est $\frac{3}{10}$. nimirum $\frac{3}{10}$. hoc est, 297 aur qui cum 990. faciunt aur. 1287.

IN numeris abstractis proponeretur hæc quæstio hunc in modum. Inuenire numerum, qui cum $\frac{3}{8}$. ipsius, & cum $\frac{3}{10}$. huius summæ faciat 1287. Hic enim numerus inuenietur 720. &c.

40 In

XL. 40 *In exercitu Imperatoris peditum numerus octuplo maior est numero equitum. In hos distribuuntur aur. 392000. ita vt omnibus singulis peditibus, & 16. cuilibet equiti dentur. Quæritur, quot sint pedites, & quot equites.*

PONATVR 1℞ equitum, ideoque 8℞ peditum, instituaturque regula Trium bis, hoc modo.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Eques 1 | aur. 16 | Equitum 1℞? | aur. 16℞. |
| Pedes 1 | 5 | 8℞? | 40℞ |

Erunt igitur 56℞ aur. æquales 392000 aur. Quare diuisis 392000 per 56. fiet 1℞. 7000. numerus equitum. ideoque pedites fuerunt 56000. octies plures. Nam ita distributi erunt equitibus aur. 112000. & peditibus aur. 280000. qui cum illis faciunt 392000. aur.

XLI. 41 *Tres milites prædam quandam aureorum æqualiter inter se diuidere volebant. Sed oborta lite, vt fit, ad manus ventum est, & tantum quisque rapuit, quantum per vim potuit. Deinde lite composita, numerarunt singuli pecunias suas, ac tandem deprehenderunt, primum acceptis 5. à secundo, habere numerum æqualem numero aureorum, qui secundo superfuerunt: Secundum vero, acceptis 7. à tertio, habere numerum æqualem residuo tertij: Tertium denique, acceptis 9. à primo, habere numerum triplum eius, qui primo superest. Quæritur summa aureorum in illa præda repertorum, & quantum quisque rapuerit.*

PONE primum rapuisse 1℞. Acceptis ergo 5. à secundo, habuit 1℞ + 5. qui numerus æqualis dicitur esse residuo secundi. Antequam secundus igitur dedit 5. primo, habuit 1℞ + 10. Acceptis autem 7. à tertio, habuit 1℞ + 17 ac tantundem fuit residuum tertij. Igitur antequam tertius dedit 7. secundo, habuit 1℞ + 24. Acceptis vero 9. à primo, habuit 1℞ + 33. qui numerus triplus esse dicitur eius, qui primo remanet, hoc est, 1℞ − 9. Ergo huius triplum 3℞ − 27. æquale est 1℞ + 33. Additisque 27. vtrobique, erit æquatio inter 1℞ + 60. & 3℞ Ablataque 1℞ vtrinque, inter 60. & 2℞. Diuisis ergo 60 per 2. fiet 1℞ 30. numerus primi. Numerus autem secundi, qui inuentus est 1℞ + 10. fuit 40. Tertius autem, qui inuentus est, rapuisse 1℞ + 24 habuit 54. & summa aureorum fuit 124. quod probare poteris. Nam primus, acceptis 5. à secundo, habebit 35. quot nimirum secundo supersunt. Et secundus, acceptis 7. à tertio, habebit 47. quot videlicet tertio supersunt. Tertius denique, acceptis 9 à primo, habebit 63. qui numerus triplus est residui primi, nimirum 21. Iam si 124 aur in tres æquales partes distribuantur, obuenient cuique militi 41 $\frac{1}{3}$. aur.

XLII. 42 *Quatuor socij marsupium inuenerunt aureis plenũ, è quibus quilibet partem forte fortuna accepit. Sed cum singuli suos aureos numerarent, cognouerunt, primum, acceptis 25. à secundo, habere numerum æqualem residuo secundi: Secundum vero, acceptis 30. à tertio, habere triplum residui tertij: Tertium autem, acceptis 40. à quarto, habere numerum duplum residui quarti: Quartum denique, acceptis 50. à primo, habere numerum triplum residui primi, ac præterea 5. Quæritur aureorum summa, & quot quisque acceperit.*

PONE primum accepisse 1℞ Acceptis ergo 25. à secundo, habebit 1℞ + 25. ac totidem supererunt secundo, ac proinde secundus, antequam dedit 25. primo, habuit 1℞ + 50. Acceptis autem 30. à tertio, habebit 1℞ + 80. Remanserunt ergo tertio $\frac{1}{3}$℞ + 26 $\frac{2}{3}$. vt ille numerus huius sit triplus: ac proinde tertius antequam dedit 30. secundo, habuit $\frac{1}{3}$℞ + 56 $\frac{2}{3}$. Acceptis autem 40. à quarto, habebit $\frac{1}{3}$℞ + 96 $\frac{2}{3}$. qui numerus duplus esse debet residui quarti ac proinde quarto tunc superfuerunt $\frac{1}{6}$℞ + 48 $\frac{1}{3}$. Et antequam daret 40. tertio, habuit $\frac{1}{6}$℞ + 88 $\frac{1}{3}$. Hic denique, acceptis 50. à primo, habebit $\frac{1}{6}$℞ + 138 $\frac{1}{3}$ qui numerus, demptis 5. triplus esse debet numeri 1℞ − 50. qui primo superest. Ergo huius triplum 3℞ − 150. æquale est $\frac{1}{6}$℞ + 133 $\frac{1}{3}$. Additis ergo 150. vtrobique, erit æqualitas inter 3℞. & $\frac{1}{6}$℞ + 283 $\frac{1}{3}$. Ablataque $\frac{1}{6}$℞ vtrinque, inter 2 $\frac{5}{6}$℞. & 283 $\frac{1}{3}$. Diuisis igitur 283 $\frac{1}{3}$ per 2 $\frac{5}{6}$℞. fiet 1℞. 100. numerus primi. Ergo secundus 1℞ + 50. erit 150. Tertius autem $\frac{1}{3}$℞ + 56 $\frac{2}{3}$. erit 90. Quartus denique $\frac{1}{6}$℞ + 88 $\frac{1}{3}$. erit 105. Ita namque primus cum 25. secundi habebit 125. ac tantum etiam remanet secundo. Secundus vero cum 30. tertij habebit 180. numerum scilicet triplum numeri 60. qui tertio superest. Tertius deinde cum 40. quarti habebit 130. qui numerus duplus est numeri 65 qui quarto superest. Quartus denique cum 50. primi habebit 155. qui numerus, demptis 5. triplus est numeri 50. qui primo superest.

| | |
|---|---|
| 100. | 1℞ |
| 150. | 1℞ + 50 |
| 90. | $\frac{1}{3}$℞ + 56 $\frac{2}{3}$ |
| 105. | $\frac{1}{6}$℞ + 88 $\frac{1}{3}$ |

XLIII. 43 *In exercitu Cæsareo ex Germanis, Vngaris, & Italis conflato, sunt quidem Germani 25000. Vngari vero faciunt [illegible]. Germanorum, atque Italorum. Itali denique faciunt $\frac{1}{8}$. Germanorum, atque Vngarorum. Quæritur numerus Vngarorum, & Italorum, & quantus sit totus exercitus.*

PONE pro Vngaris 1℞ Ergo Germani simul cum Italis erunt 2 ℞. Et totus exercitus 3 ℞. Quia vero Itali faciunt $\frac{1}{8}$. Germanorum vna cum Vngaris. sunt autem Vngari cum Germanis 1℞ + 25000. facient Itali

Itali $\frac{1}{8}$℞ + 3125. Quoniam igitur Germani sunt 25000. & Vngari 1℞, atque Itali $\frac{1}{8}$℞ + 3125. erit totus exercitus 1$\frac{1}{8}$℞ + 28125. æqualis 3℞. Ablatis ergo 1$\frac{1}{8}$℞ vtrobique, erit æquatio inter 28125. & 1$\frac{7}{8}$℞. Diuisisque 28125. per 1$\frac{7}{8}$. fiet 1℞ 15000. numerus Vngarorum. Itali vero erunt 5000. nimirum $\frac{1}{8}$. Germanorum, atque Vngarorum, qui simul faciunt 40000. totusque exercitus erit 45000.

44 *Sunt duo Duces, quorum vnus milites habet pauciores 40. quam alter. Et vterque suis militibus 1200. aur. distribuit, quo facto euenit, vt prioris Ducis milites singuli haberent 5. aur. amplius, quam milites Ducis posterioris. Quæstio est, quot milites vterque Dux habeat, & quot aureos singuli milites accipiant.* XLIV.

PONATVR 1℞ militum pauciorum, & 1℞ + 40. plurium. Si per hos milites diuidantur 1200. aur. fient Quotientes $\frac{1200}{1℞}$. & $\frac{1200}{1℞+40}$. numeri videlicet aureorum, qui singulis obuenerunt. Et quoniam quilibet priorum habet 5. amplius, quam posteriorum quilibet; si posteriori Quotienti addantur 5. fiet summa $\frac{5℞+1400}{1℞+40}$. (vt in hac formula vides) æqualis priori Quotienti $\frac{1200}{1℞}$. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 1200℞ + 48000. & 5ℨ + 1400℞. Ablatisque 1200℞ vtrinque, inter 48000. & 5ℨ + 200℞. Et rursum ablatis 200℞ vtrobique, inter 48000 — 200℞. & 5ℨ. Diuisisque omnibus per 5. inter 9600 — 40℞. & 1ℨ. Semissis numeri radicum est 20. ad cuius quadratum 400. additis 9600. fit numerus 10000. à cuius radice quadrata 100. si auferatur prædicta semissis 20. remanet pretium 1℞, 80. numerus scilicet militum pauciorum. Ergo plures erunt 120. nimirum 40. amplius, quam 80. quod probatur. quia diuisis 1200 per 80. fit Quotiens 15. atque tot aureos singuli militum 80. accipiunt. Diuisis autem 1200 per 120. fit Quotiens 10. numerus videlicet aureorum, quos singuli militum 120. accipiunt. Vbi vides, quemlibet priorum habere 5. amplius, quam quemlibet posteriorum.

$$\frac{1200}{1℞+40} \quad \frac{5}{1} \qquad \frac{5℞+200}{1℞+40}$$

45 *Duæ Societates, quarum altera alteram 4. hominibus superat, parem aureorum summam viritim diuidunt. In singulos minoris Societatis cedunt 8. aurei amplius, quam in singulos maioris. Aureorum autem summa numerum sociorum vtriusque societatis superat aureis 172. Quæritur summa aureorum, ac Sociorum.* XLV.

PONATVR pro minore Societate, 1℞ hominum; ac propterea pro maiore, 1℞ + 4. Eritque summa aureorum 2℞ + 176. quæ summa diuisa per 1℞ & per 1℞ + 4. facit Quotientes $\frac{2℞+176}{1℞}$. & $\frac{2℞+176}{1℞+4}$. numeros scilicet aureorum, qui cuilibet obueniunt. Et quia prior Quotiens superat posteriorem 8. aureis: si ad posteriorem addantur 8 aur. fiet summa $\frac{10℞+208}{1℞+4}$ (vt in hac formula vides) æqualis priori Quotienti $\frac{2℞+176}{1℞}$. quę æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 10ℨ + 208℞ & 2ℨ + 184℞ + 704. Ablatis autē 2ℨ. vtrobique, erit æquatio inter 8ℨ + 208℞. & 184℞ + 704. Et rursum ablatis 184℞ vtrinque, inter 8ℨ + 24℞ & 704. Et ablatis rursum 24℞ vtrobique, inter 8ℨ. & 704 — 24℞. Diuisisque omnibus per 8. inter 1ℨ. & 88 — 3℞. Semissis numeri radicum est $\frac{3}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{9}{4}$ additis 88, siue $\frac{352}{4}$ fit numerus $\frac{361}{4}$. à cuius radice quadrata $\frac{19}{2}$. si demátur prædicta semissis $\frac{3}{2}$. supererit pretium 1℞. $\frac{16}{2}$. hoc est, 8. numerus minoris Societatis: maioris autem numerus Sociorum erit 12 nimirum 1℞ + 4. Summa denique aureorum erit 192. nimirum 2℞ + 176. quod probatur. Nam diuisis aureis 192. per 8. & 12. fiunt Quotientes 24. & 16. quorum ille hunc superat 8. aureis.

$$\frac{2℞+176}{1℞+4} \quad \frac{8}{1} \qquad \frac{8℞+32}{1℞+4}$$

46 *Mercator quidam ad nundinas ter profectus, prima negotiatione lucratus est summam æqualem suæ pecuniæ, ita vt post primam negotiationem habuerit duplum suæ pecuniæ. Deinde in secunda negotiatione lucratus est radicem quadratam eius dupli, ac præterea 2. aureos. In tertia denique negotiatione lucratus est quadratum totius prioris summæ, & insuper 4. aureos. Atque ita deprehendit se habere 510. aureos. Quæritur summa pecuniæ, quam initio habuit.* XLVI.

PONE illum post secundam negotiationem habuisse 1℞, cum qua lucratus est in tertia negotiatione eius quadratum, ac præterea 4 aur. ita vt lucrum hoc fuerit 1ℨ + 4. Igitur post tertiam negotiationem habuit summam 1ℨ + 1℞ + 4. æqualem 510. aur. Ablatis 4. vtrinque, erit æquatio inter 1ℨ + 1℞. & 506. Ablataque rursus 1℞ vtrobique, inter 1ℨ & 506 — 1℞. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 506. fit numerus 506$\frac{1}{4}$. hoc est $\frac{2025}{4}$ à cuius radice quadrata $\frac{45}{2}$. si tollatur prædicta semissis $\frac{1}{2}$ remanet pretium 1℞, $\frac{44}{2}$. hoc est, 22. Atque tot aureos post secundam negotiationem habuit Et quia hoc fuit lucrum radicis pecuniæ, quam post primam negotiationem habuit, præterea 2 aurei: demptis 2 supererunt 20. nimirum lucrum radicis pecuniæ, quam habuit post negotiationem primam. Ergo illa pecunia ponatur 1ℨ. cuius radix quadrata 1℞. Eritq; lucrum post secundam negotiationē, 1ℨ + 1℞ æquale 20. Ablata autem 1℞ vtrobique, erit æquatio inter 1ℨ, & 20 — 1℞. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 20.

hoc est, $\frac{80}{4}$. fit numerus $\frac{81}{4}$. à cuius radice quadrata $\frac{9}{2}$. dempta prædicta semisse $\frac{1}{2}$. supererit pretium 1℞ $\frac{8}{2}$. hoc est, 4. Atque tantum fuit lucrum secundæ negotiationis, + 2. Ablatis igitur 4. & 2. ex 22. (nimirum ex pecunia, quam post secundam negotiationem habuit) supersunt 16 ac tantum habuit post primam negotiationem, quæ pecunia dicitur esse dupla illius, quam ad nondinas attulit: ac proinde initio habuit 8. aur. quod probatur. Nam post primam negotiationem habuit 16 aur. & post secundam 22. nimirum radicem numeri 16, & præterea 2, hoc est 6 quæ cum 16 faciunt 22. Cum his lucratus est quadratum, nimirum 484. ac præterea 4. atque ex 22. 484. & 4. colligitur summa 510 aur.

XLVII. 47 *Visum est hoc loco artificium, quo Archimedes argenti quantitatem aureæ coronæ permixtam deprehendit, per regulam Algebræ explicare.*

CAPIANTVR igitur duæ massæ, auri vna, & altera argenti, æqualis ponderis cum corona. Deinde vas æneum affabre factum aqua impleatur, & immissa corona, 100 librarum, ponamus effluxisse 65. lib. aquæ. Repleto postea vase iterum aqua, immissam massam auri puri 100. librarum eiecisse 60. libras aquæ. Denique iterum repleto vase aqua, immissam massam puri argenti eiecisse 90 lib. aquæ. Ponatur 1℞ lib. argenti contineri in corona, ac proinde lib. auri 100 — 1℞. & instituatur regula Trium bis, hoc modo.

| | lib. | aquæ | lib. | lib. |
|---|---|---|---|---|
| Auri | 100 | 60 | 100 — 1℞? | $\frac{6000-60x}{100}$ |
| Argenti | 100 | 90 | 1℞? | $\frac{90x}{100}$ |

Reperies enim libras auri 100 — 1℞ eiicere libras aquæ $\frac{6000-60x}{100}$. si 100 lib. auri eiiciunt 60 lib. At 1℞ lib. argenti eiicere libras aquæ $\frac{90x}{100}$ si 100 lib argenti eiiciunt 90 lib. aquæ. Hæ libræ aquæ eiectæ faciunt $\frac{6000+30x}{100}$ lib. aquæ (Quoniam enim fractiones $\frac{6000-60x}{100}$ & $\frac{90x}{100}$ eundem habent denominatorem, satis est addere numeratores, & summæ constatæ 600 + 30℞. supponere eundem denominatorem 100) æquales 65 lib. quas corona eiicit. Hæc æquatio inter $\frac{6000+30x}{100}$. & 65. per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 6000 + 30℞. & 6500. Ablatisque 6000. vtrinque, erit æquatio inter 30℞ & 500. Diuisis ergo 500 per 30. fiet 1℞. 16 $\frac{2}{3}$. atque tot libræ argenti in corona permixtæ fuerunt: ac propterea solum 83 $\frac{1}{3}$ libræ auri in eadem reperiuntur. quod probatur, vt hic vides.

| | lib. | aquæ | lib | aquæ |
|---|---|---|---|---|
| Argenti | 100 | 90 | 16 $\frac{2}{3}$? | 15 |
| Auri | 100 | 60 | 83 $\frac{1}{3}$? | 50 |

Reperies enim libras argenti 16 $\frac{2}{3}$. eiicere lib. aquæ 15. & libras auri 83 $\frac{1}{3}$. eiicere lib. aquæ 50. quæ cum 15. faciunt 65. quot videlicet libræ aquæ effluunt, si corona in aquam imponatur.

## S C H O L I V M.

*EODEM modo soluetur hæc quæstio. Sunt tres massæ eiusdem ponderis, nimirum 10. librarum: Vna auri puri, altera argenti puri, & tertia ex auro, argentoque mixta. Prima autem eiicit $\frac{1}{16}$. lib. aquæ: Secunda $\frac{1}{4}$. lib. aquæ: ac tertia $\frac{3}{8}$. lib. aquæ. Nam si instituetur regula trium bis, si in tertia massa ponatur 1℞. lib. argenti, ac proinde auri lib. 10 — 1℞.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Auri | lib. 10. | aquæ lib. $\frac{1}{16}$ | 10 — 1℞ | lib. auri? | aq. lib. $\frac{10-1x}{160}$ |
| Argenti | lib. 10. | aquæ lib. $\frac{1}{4}$ | 1℞ | lib. argenti. | aq. lib. $\frac{1x}{40}$ |

*Nam duo numeri in quarto loco facient summam $\frac{400+3440x}{16000}$. lib. aquæ æqualem $\frac{3}{8}$. lib. aquæ, quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 12000. & 3200 + 6880 ℞. Et ablatis 3200. vtrobique, erit æquatio inter 8800. & 6880 ℞. Diuisis igitur 8800 per 6880 fiet 1℞. 1 $\frac{12}{43}$. atque tot lib. argenti sunt in tertia massa, ac proinde in eadem erunt lib. 8 $\frac{31}{43}$. auri, quod probatur, vt hic vides.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Argenti | lib. 10 | aq. lib. $\frac{1}{4}$ | arg. lib. 1 $\frac{12}{43}$? | aq lib $\frac{[illegible]}{1720}$ |
| Auri | lib. 10 | aq lib. $\frac{1}{16}$ | aur. lib. 8 $\frac{31}{43}$? | aq. lib. $\frac{375}{[illegible]}$ |

*tanentes argenti lib. 1 $\frac{12}{43}$ eiicere aquæ lib. $\frac{568}{1720}$. & auri lib. 8. $\frac{31}{43}$. eiicere aquæ lib. $\frac{375}{[illegible]}$. quæ cum illis faciunt $\frac{3}{8}$. libr. aquæ.*

*QVOD si quis desideret magis accuratam rationem deprehendendi quantitatem auri, & argenti in corona illa, vel in tertia massa proxime data, is legat eruditissimum libellum Marini Chetaldi Patritij Ragusini, qui inscribitur Promotus Archimedes. Vbi in propos. 7. varias causas errorum, qui in prædicto Archimedis artificio committi possunt, enumerat. Deinde in propos. 8. magis accuratum artificium demonstrat.*

XLVIII. 48 *Tres mercatores lucrati sunt 700. aur. quos inter se ita distribuerunt, habita ratione pecuniæ, quam quisque ad negotiationem attulit, vt portio secundi superarit portionem primi aureis 12. portio vero tertij portionem secundi aureis 16. Quæritur, cuiusque portio quanta fuit.*

PONATVR portio primi 1℞. eritque propterea portio secundi 1℞ + 12. & tertij 1℞ + 28. Hæ tres portiones simul faciunt 3℞ + 40. æquales 700. Ablatis 40 vtrobique, erit æquatio inter 3℞. & 660. Diuisis igitur

igitur 660 per 3. fiet 1𝓍. 220. portio primi. Portio autem secundi erit 232. & tertij 248. quę omnes simul faciunt 700.

49 *Tres lusores, quorum quisque certam summam aureorum attulit, eam sortem habuerunt, vt statim primus lucratus sit $\frac{1}{2}$. secundi: Deinde secundus $\frac{1}{3}$. tertij: tertius denique $\frac{1}{4}$. primi. Atque ita contigit, vt singuli haberent 700. aur. Quæritur, quot quisque aureos ad ludum attulerit.* XLIX.

PONATVR pecunia primi 1𝓍 qui si det $\frac{1}{4}$𝓍 tertio, supererunt ei $\frac{3}{4}$𝓍, quæ cum $\frac{1}{2}$. secundi debent facere 700. Ergo $\frac{1}{2}$. secundi est 700 — $\frac{3}{4}$𝓍 atque ideirco huius duplum attulit, nimirum 1400 — 1$\frac{1}{2}$𝓍. Nam ita, postquam perdiderit $\frac{1}{2}$. remanebunt illi 700 — $\frac{3}{4}$𝓍. qui numerus cum $\frac{1}{3}$. tertij debet facere 700. Ergo $\frac{1}{3}$. tertij est $\frac{3}{4}$𝓍; ideoque ad ludum attulit 2$\frac{1}{4}$𝓍, siue $\frac{9}{4}$𝓍. qui si amiserit $\frac{1}{3}$. supererunt ei $\frac{6}{4}$𝓍 quæ cum $\frac{1}{4}$. primi, nimirum cum $\frac{1}{4}$𝓍. habebit $\frac{7}{4}$𝓍 æquales 700. Diuisis igitur 700 per $\frac{7}{4}$ fiet 1𝓍. 400. pecunia videlicet primi. Ac proinde secundus, qui inuentus est attulisse 1400 — 1$\frac{1}{2}$𝓍. attulit ad ludum aur. 800. Et tertius aur. 900. nimirum 2$\frac{1}{4}$𝓍 quod probatur. Nam si primus amittat $\frac{1}{4}$. supererunt 300. aur. qui cum $\frac{1}{2}$. aureorum 800. quos secundus attulit, faciunt 700. aur. Item $\frac{1}{2}$. secundi, nimirum 400. aurei cum $\frac{1}{3}$. tertij, id est, cum 300. facit similiter 700 aur. Ac denique $\frac{2}{3}$. tertij, postquam amiserit $\frac{1}{3}$. nimirum 600 aur. cum $\frac{1}{4}$. primi, id est, cum 100. facit quoque 700. aureos.

50 *Quidam habet duo vasa aurea, & vnum operculum, cuius pretium est 150. aur. quod additum ad pretium primi vasis facit pretium triplum pretij secundi vasis. Additum vero idem operculum vasi secundo facit precium æquale pretio primi vasis. Quæstio est de pretio vtriusque vasis.* L.

PONATVR pretium primi 1𝓍 Ergo 1𝓍 + 150. tripla sunt pretij secundi vasis, ideoque eius æstimatio est $\frac{1}{3}$𝓍 + 50 aur. Cui si accedat operculum 150 aur erit eius tunc pretium $\frac{1}{3}$𝓍 + 200 aur. æquale 1𝓍. nimirum pretio primi vasis. Ablata $\frac{1}{3}$𝓍. vtrinque, erit æquatio inter $\frac{2}{3}$𝓍. & 200. Diuisis igitur 200 per $\frac{2}{3}$. fiet 1𝓍. 300 aur. pretium scilicet primi vasis. Secundi autem vasis pretium, quod inuentum est $\frac{1}{3}$𝓍 + 50 erit 150 aur. quod probatur. Nam 300 aur. hoc est, pretium primi vasis, cum pretio operculi, id est, cum 150. faciunt summam 450. triplam pretij secundi vasis, nimirum 150 aur. At 150. aur. pretium videlicet secundi vasis, cum operculo, siue cum 150 aur. faciunt summam 300 aur. æqualem pretio primi vasis.

51 *Quidam emit, nescio quot, perdices, ita vt si emisset seorsum illarum $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. & $\frac{1}{5}$. & insuper 6. haberet 100. perdices. Quæritur numerus perdicum.* LI.

PONATVR 1𝓍, cuius $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. & $\frac{1}{5}$. faciunt $\frac{47}{60}$𝓍. quę cum 6. faciunt $\frac{47}{60}$𝓍 + 6. æqualia 100. Ablatis 6 vtrobique, erit æquatio inter $\frac{47}{60}$. & 94. Diuisis igitur 94 per $\frac{47}{60}$. fiet 1𝓍. 120. numerus videlicet perdicum emptarum. Nam eius $\frac{1}{3}$. est 40. & $\frac{1}{4}$. est 30. & $\frac{1}{5}$. est 24 quę omnes partes cum 6. faciunt summam 100 perdicum.

52 *Alexander Magnus, cum quadam die familiariter cum Calisthene philosopho ageret de ætate sua, & amicorum suorum Ephestionis, & Clyti, ita disseruit. Ego, inquit, Ephestionem meum duobus annis antecedo. At Clytus amborum annos sua ætate comprehendit, & præterea annos quatuor. Cui Calisthenes. Cum pater meus vixerit annos 96 iucunda mihi fuit ista relatio, ô Rex. Nam annos trium vestrum ætas eius præcise habuit. Quæritur, qua ætate Alexander colloquium istud habuerit, & quot annos tam Ephestio, quam Clytus tunc habuerit.* LII.

PONATVR pro annis Ephestionis 1𝓍. Igitur anni Alexandri fuerunt 1𝓍 + 2. & Clyti 2𝓍 + 6. qui omnes faciunt annos 4𝓍 + 8 æquales 96. Ablatis 8 vtrobique, erit æquatio inter 4𝓍 & 88. Diuisis igitur 88 per 4 fiet 1𝓍. 22. anni nimirum Ephestionis. Alexander igitur habuit 24. annos Clytus vero 50. qui anni in vnam collecti summam faciunt 96 annos.

53 *Nicanor ea pugna, qua interijt, occurrit Iudæ Machabæo, agmine quadrato collecto ex Syrorum auxiliarijs militibus, atque ijs, quos secum adduxerat. Cæsi sunt autem ex eo agmine 35000. Reliqui fuga elapsi sunt, quorum numerus fuit 156. vltra numerum auxiliariorum militum Syrorum. Quæstio est, quot militibus occurrerit Nicanor Machabæo, & quot habuerit milites auxiliarios, quot item secum adduxerit.* LIII.

PONATVR pro agmine illo quadrato 1𝔷. in quo computati sunt milites cæsi 35000. Item numerus fuga seruatorum 156. & numerus militum auxiliariorum incognitus. Ponatur hic numerus 1𝓍. cui si addantur milites cæsi 35000. & 156. fuga seruati, conflabitur summa 1𝓍 + 35156. æqualis 1𝔷. nimirum toti agmini quadrato. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 35156. hoc est, $\frac{140624}{4}$. conficietur numerus $\frac{140625}{4}$ ad cuius radicem quadratam $\frac{375}{2}$. si addatur prędicta semissis numeri radicum, nimirum $\frac{1}{2}$. fiet 1𝓍. $\frac{376}{2}$. hoc est, 188. numerus videlicet auxiliariorum militum. ipse vero secum adduxit 35156. atque idcirco totum agmen quadratum comprehendit 35344. qui numerus quadratus est habens radicem 188.

LIV. 54 *Quidam habet 4. maſſas ex argento, & cupro mixtas. Pondus primæ continet 11. marcas, quarum qualibet conflatur ex 9. ſemiuncijs puri argenti, & 7. ſemiunc. cupri puri: quia 1. marcam ſtatuimus comprehendere 16. ſemiuncias. Pondus ſecundæ maſſæ eſt 15. marcarum, quarum ſingulæ continent 7 ſemiunc. argenti, & 9. ſemiunc. cupri. Pondus tertia maſſa habet 24. marcas, quarum ſingulæ conſtant 10. ſemiunc. argenti, & 6. ſemiunc. cupri. Pondus denique quartæ maſſæ eſt 136. marcarum, quarum ſingulæ continent 14. ſemiunc. argenti, & 2. ſemiunc. cupri. Vult autem ex hiſce maſſis conflare vnam, additis aliquot marcis argenti, ita vt quælibet marca contineat 15. ſemiunc. puri argenti, & 1. ſemiunc. puri cupri. Quæſtio iam eſt, quantum argenti puri admiſcendum ſit illis maſſis, & quot marcas maſſa noua ſit habitura.*

PONATVR 1℞. marcarum puri argenti addendarum. Quoniam vero omnes marcæ mixtæ in illis 4. maſſis contentæ ſunt 186. & omnes ſemiunciæ puri argenti 2348. & cupri 628. vt hic vides.

| Marcæ mixtæ | Semiunciæ puri arg. | Semiunc. puri cupri. |
|---|---|---|
| 11 | 99 | 77 |
| 15 | 105 | 135 |
| 24 | 240 | 144 |
| 136 | 1904 | 272 |
| 186 | 2348 | 628 |

Cum enim prima maſſa marcarum 11. quælibet marca contineat 9 ſemiunc. argenti puri, & cupri 7 ſemiunc. erunt in tota illa maſſa 99 ſemiunc. argenti puri, & 77 ſemiunc. puri cupri, &c. instituenda erit regula trium hoc modo.

| Marcæ mixtæ | Mar. pu. arg. | Semiunc. cupri. | Mar. mix. | Semiun. cupri. |
|---|---|---|---|---|
| 186 + 1℞ | | 628 | 1 | $\frac{628}{186+1℞}$ |

Hoc eſt, Marcæ mixtæ 186 + 1℞. marcarum puri arg. continent 628. ſemiunc. cupri, (quia in maſſa conflanda comprehenduntur 628 ſemiunc. cupri; quot videlicet in 4. maſſis compoſitis continentur, cum nulla noua ſemiunc. cupri accedat) quot ergo ſemiunc. cupri continebit 1 marca noua mixta? Inuenies enim $\frac{628}{186+1℞}$. ſemiunc. cupri, quæ fractio æquiualet 1 ſemiunc. cupri: propterea quod in vna marca noua mixta continetur tantum 1 ſemiunc. cupri ex hypotheſi. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 628. & 186 + 1℞ Ablatiſque 186. vtrobique, erit æquatio inter 442. & 1℞. Erit ergo 1℞. 442. atque tot marcæ argenti puri admiſcendæ ſunt, vt ſingulæ marcæ comprehendant 15 ſemiunc. puri arg. & 1 ſemiunc. cupri. quod ſic probatur Quoniam in 4 illis maſſis propoſitis continentur 186 marcæ mixtæ, ſi addantur inuentæ 442 marcæ argenti puri, fient marcæ mixtæ 628. atque idcirco quælibet habebit 1 ſemiunc. cupri, quod in omnibus ſimul ſint 628 ſemiunc. cupri.

ET quia vna marca poſita eſt 16 ſemiunciarum, comprehendent 442 marcæ puri arg. ſemiuncias 7072 quibus ſi addantur ſemiunciæ 2348 puri argenti, quæ in 4 maſſis propoſitis reperiuntur, fient 9420 ſemiunc. puri argenti. quæ diſtributæ in 628 marcas nouæ maſſæ conflatæ, dabunt cuilibet marcæ 15 ſemiuncias argenti puri.

HÆC eadem quæſtio facile etiam expedietur ſine Algebræ auxilio. Quoniam enim in 4 maſſis propoſitis habentur 628 ſemiunciæ cupri, neceſſe eſt, vt maſſa noua conflanda ſit totidem marcarum, vt nimirum cuilibet 1 ſemiuncia cupri poſſit aſſignari. Si igitur 186 marcæ mixtæ, quas 4. illæ maſſæ continent, detrahantur ex 628. ſupererunt 442 marcæ puri argenti addendæ ad 186 marcas, vt fiat numerus marcarum 628. in noua maſſa conflata comprehenſarum.

QVOD ſi maſſa ex 4. propoſitis conflanda ſit cum argento addito, vt ſingulæ marcæ contineant 13 ſemiuncias puri arg & 3 ſemiunc. cupri. Diuiſis 628 ſemiunciis cupri per 3. exibit numerus marcarum in noua maſſa, 209 $\frac{1}{3}$. Ita enim quælibet marca 3 ſemiunc. cupri continebit Si igitur ex 209 $\frac{1}{3}$. demantur marcę 186. in 4. primis maſſis contentę, reliquus fiet numerus 23 $\frac{1}{3}$. marcarum puri arg. addendarum: conflabiturque numerus 209 $\frac{1}{3}$. marcarum in maſſa noua comprehenſarum: quarum quęlibet 13 ſemiunc. arg. puri comprehendet Nam in marcis 209 $\frac{1}{3}$. continentur ſemiuncię $\frac{10048}{3}$. ex quibus ſi demantur 628. ſiue $\frac{1884}{3}$. ſemiunc. cupri puri in maſſa noua contentę, remanebunt $\frac{8164}{3}$ ſemiunc. argenti puri: quibus in 209 $\frac{1}{3}$. marças diſtributis, prouenient cuilibet marcæ 13 ſemiunc puri argenti.

SI vero maſſa ex eiſdem 4 maſſis conflanda ſit, cum cupro addito, vt ſingulę marcæ contineant 12 ſemiunc. argenti puri, & 4 ſemiunc cupri puri: erit cuprum adiiciendum, non autem argentum. quia diſtributis 2348 ſemiunc. argenti, quę in 4. illis maſſis exiſtunt, in 186 marcas, reperientur in qualibet marca plures ſemiuncię argenti, quam 12. nimirum 12 $\frac{116}{186}$. Diuiſis igitur 2348 ſemiunc. argenti puri per 12. exibit in Quotiente numerus marcarum in noua maſſa, 195 $\frac{2}{3}$. Sic enim quęlibet marca continebit 12 ſemiunc. argenti puri Demptis autem marcis 186. quas illę 4 maſſæ complectuntur, remanebunt 9 $\frac{2}{3}$ marcę cupri addendę, vt conflectur noua maſſa marcarum 195 $\frac{2}{3}$. quarum quęlibet 4 ſemiunc. cupri continebit. Nam in marcis 195 $\frac{2}{3}$. continentur $\frac{9392}{3}$ ſemiunciæ. E quibus ſi demantur 2348 ſemiunc. argenti, hoc eſt, $\frac{7044}{3}$. relinquentur $\frac{2348}{3}$ ſemiunc. cupri, quibus diſtributis in 195 $\frac{2}{3}$ marcas, prouenient cuilibet marcę 4. ſemiunc. cupri.

IAM vero ſi quæratur, quantum cupri addendum ſit quatuor illis maſſis, vt in qualibet marca nouæ maſſæ conflatæ reperiantur 15 ſemiunc. puri cupri, & 1 argenti: inſtituenda erit regula Trium hoc modo, poſita 1℞ marcarum puri cupri.

Marcæ

| Marcæ mix. | Marcæ pu. cup. | Semiun. arg. | Mar. mix. | Sem. arg. pu. |
|---|---|---|---|---|
| 186 + 1℞ | | 2348 | 1? | $\frac{2348}{186+1℞}$ |

Eritque quartus numerus æqualis 1 ſemiunciæ argenti puri: quæ æqualitas per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 2348 & 186 + 1℞. Ablatisque 186. vtrobique, erit æquatio inter 2162 & 1℞. Erit ergo 1℞ 2162. numerus videlicet marcarum cupri admiſcendarum, vt ſingulæ marcæ contineant 15 ſemiunc. cupri, & 1 argenti. Quoniam enim in 4. illis maſſis exiſtunt 186. marcæ, additis proxime inuentis 2162. fit numerus marcarum 2348. ac proinde quælibet habebit 1 ſemiunc. argenti: quippe cum in omnibus ſimul ſint 2348 ſemiunc. argenti. Et quia 2162. marcæ puri cupri comprehendunt ſemiunc. 34592. ſi addantur 628. ſemiunc. cupri in quatuor prioribus maſſis contentæ, fient 35220 ſemiunc. quibus diſtributis in 2348 marcas nouæ maſſæ conflatæ, congruent cuilibet marcæ 15 ſemiunciæ cupri.

SI autem quæſtio ſit, quantum argenti contineat 1. marca, ſi 4. illæ maſſæ conflentur, & nihil eis addatur: ſic ſtabit regula Trium.

| Marcæ | Semiunc. arg. | Marca | Semiunc. arg. |
|---|---|---|---|
| 186 | 2348 | 1? | $12\frac{58}{93}$ |

Continebit ergo 1 marca ſemiunc. arg. $12\frac{58}{93}$. & proinde ſemiunc. cupri $3\frac{35}{93}$.

SIC ſi quæratur, quantum cupri contineat 1 marca, ſic ſtabit regula.

| Marcæ | Semiunc. cupri | Marca | Semiunc. cupri |
|---|---|---|---|
| 186 | 628 | 1? | $3\frac{35}{93}$ |

Continebit enim 1 marca ſemiunc. cupri puri $3\frac{35}{93}$. ideoque $12\frac{58}{93}$. ſemiuncias puri argenti.

ET ſi quæſtio ſit, cuius ponderis maſſa continens in qualibet marca 3 ſemiunc. argenti, & 13 cupri, commiſcenda ſit illis 4 maſſis, vt ſingulæ marcæ nouæ maſſæ conflatæ contineant 5 ſemiunc. argenti, & 11. cupri, ponatur pro numero marcarum addendarum 1℞. & pro numero ſemiunc. argenti in illa maſſa contentarum, 3℞ quia numerus ſemiunciarum in illa maſſa triplus eſt numeri marcarum, quandoquidem quælibet marca comprehendere dicitur 3 ſemiunc. argenti. Sic igitur ſtabit regula Trium.

| Mar. mix. | Mar. mix. nouæ | Semiunc. arg. | Sem. arg. nouæ | Marca noua | Sem. arg. |
|---|---|---|---|---|---|
| 186 + 1℞ | | 2348 + 3℞ | | 1? | $\frac{2348+3℞}{186+1℞}$ |

Quartus enim numerus æquabitur 5 ſemiuncijs argenti, quot nimirum 1 marca maſſæ nouæ includere debet. quæ æqualitas per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 2348 + 3℞ & 930 + 5℞. Ablatisque 930 vtrobique, erit æquatio inter 1418 + 3℞ & 5℞. Ablatisque rurſum 3℞ vtrinque, inter 1418 & 2℞. Diuiſis igitur 1418 per 2. fiet 1℞ 709 numerus marcarum, quas maſſa quinta commiſcenda continebit. Additis igitur 186 marcis quatuor priorum maſſarũ; fiet noua maſſa marcarum 895. quarũ quælibet continet 5. ſemiunc. argenti, & 11. cupri. quod ſic probatur. Duc 895. marcas in 16 ſemiunc. facies que 14320. ſemiuncias partim argenti, & partim cupri in maſſa noua marcarum 895. contentas. Deinde duc eaſdem marcas 895. in 5. ſemiunc. argenti, quas quælibet marca continere debet, faciesque ſemiunc. argenti 4475 in noua illa maſſa contentas. Denique duc eaſdem marcas 895. in 11. ſemiunc. cupri, quas quælibet marca continere debet, efficiesque 9845. ſemiunc. cupri, quæ cum 4475 ſemiunc. argenti faciunt 14320 quot nimirum ſemiunciæ in vniuerſum continentur in 895. marcis.

55 *Duo Societatem ineunt: quorum ſecundus duplo plus pecuniæ ſecum affert, quam primus, ac præterea 5. aur. Lucrati ſunt autem 960. aur. ex quibus primo obuenerunt aur. 300. & ſecundo 660. Quantum ergo ſinguli impoſuerunt.* LV.

PONE pro primo 1℞. ideoque pro ſecundo 2℞ + 5. Summa amborum eſt 3℞ + 5. qui lucrati ſunt 960. aur. Inſtitue ergo regulam Trium ſic.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3℞ + 5 | 960 | 1℞? | $\frac{960℞}{3℞+5}$ |

Inuenies enim primum, qui poſuit 1℞. lucrari $\frac{960℞}{3℞+5}$. qui numerus æqualis eſt 300. aur. qui primo obuenerunt. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 960℞. & 900℞ + 1500. Ablatis igitur 900℞ vtrobique, remanebit æquatio inter 60℞. & 1500. Diuiſis igitur 1500 per 60. fiet 1℞ 25. pro aureis, quos primus poſuit. Ergo ſecundus poſuit 55. aur. quod probatur. Amborum enim ſumma eſt 80 aur. Ergo regula Trium ſic ſtabit bis.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 80 | 960 | 25? | 300 | 80 | 960 | 55? | 660 |

56 *Duo habent pecuniam, nimirum 200. aur. ſimul, & pecunia ſecundi diuiſa per pecuniam primi faciat Quotientem $1\frac{1}{2}$. Quæſtio eſt, quantam quiſque pecuniam habeat.* LVI.

HÆC quæſtio cum ſequentibus ad ſecundas radices pertinet. Ponatur pro primo 1℞. & pro ſecundo 1A. Reſoluenda ergo eſt ſecunda radix in primam hoc modo. Quoniam ambo habent 200. aur. erit æquatio

inter 1℞ + 1A, & 200. Ablataque 1℞ vtrinque, inter 1A, & 200 — 1℞. Erit igitur 1A, resoluta in 200 — 1℞. Quare pono denuo numerum primi 1℞, & secundi 200 — 1℞. qui simul faciunt 200. aur. Diuiso iam numero secundi per numerum primi, fit Quotiens $\frac{200 - 1℞}{1℞}$. æqualis $1\frac{1}{2}$ hoc est, $\frac{3}{2}$. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 400 — 2℞, & 3℞. Additisque 2℞ vtrobique, erit æquatio inter 400 & 5℞ Diuisis ergo 400 per 5 fiet Quotiens 80. numerus prioris. Ergo secundus habebit 120. nimirum 200 — 1℞. quo numero diuiso per 80 fit Quotiens $1\frac{1}{2}$.

Aliter. Ponatur numerus secundi 1℞, & primi 1A. Ergo iterum erit æquatio inter 1℞ + 1A, & 200. aur. Ablataque 1℞ vtrobique, inter 1A, & 200 — 1℞. atque ita 1A, resoluta est in 200 — 1℞. Pono ergo denuo pro secundo 1℞ & pro primo 200 — 1℞. Diuiso illo per hunc fit Quotiens $\frac{1℞}{200 - 1℞}$. æqualis $\frac{3}{2}$. quæ æqualitas per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 2℞. & 600 — 3℞. Additisq; 3℞ vtrinque, erit æquatio inter 5℞ & 600. Diuisis ergo 600 per 5. fiet 1℞. 120. pro numero secundi. Primus ergo habet 80. nimirum 200 — 1℞. vt prius.

LVII. 57 *Septem mercatores debent cuidam creditori pecuniam hoc modo. Sex, excluso septimo, debent simul 994. aur.*
*Deinde sex, secluso primo, debent 882. aur.*
*Sex, secluso secundo, debent aur. 952.*
*Sex, dempto tertio, debent aur. 896.*
*Sex, excluso quarto, debent aur. 910.*
*Sex, secluso quinto, debent aur. 840.*
*Sex denique, excepto sexto, debent aur. 1036.*
*Quæritur iam, quanta sit summa totius debiti, & quantum quisque debeat.*

PRIMVM quia excluditur debitum septimi à tota summa: si pro debito septimi ponatur 1℞ erit summa totius debiti 994 + 1℞. aur.

Deinde quia excluditur debitum primi: si pro eo ponatur 1A, erit summa totius debiti aur. 882 + 1A.

Tertio quia excluditur debitum secundi, pone pro eo 1B, aur. eritque summa totius debiti aur. 952 + 1B

Quarto quia eximitur debitum tertij, si pro eo ponatur 1C, aur. erit summa totius debiti aur. 896 + 1C.

Quinto quia subticetur debitum quarti, si pro eo ponatur 1D, aur. erit totius debiti summa aur. 910 + 1D

Sexto quia supprimitur debitum quinti, si pro eo ponatur 1E, aur. habebitur summa totius debiti 840 + 1E, aur.

Septimo denique, quia non exprimitur debitum sexti, si pro eo ponatur 1F, aur. erit summa totius debiti 1036 + 1F, aur.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 994 | + | 1 | ℞ |
| 882 | + | 1 | A |
| 952 | + | 1 | B |
| 896 | + | 1 | C |
| 910 | + | 1 | D |
| 840 | + | 1 | E |
| 1036 | + | 1 | F |

Quia igitur summa omnium, hoc est, totum debitum septies ponitur, vt hic vides, habebimus sex æquationes, si superiorem cum singulis inferioribus conferemus; propterea quod quodlibet totum sibi ipsi est æquale. Videlicet.

Primum 994 + 1℞. æqualia sunt 882 + 1A. Igitur ablatis 882. vtrobique, erit æquatio inter 112 + 1℞, & 1A. Cum ergo pro debito primi posita sit 1A; erit debitum primi aur. 112 + 1℞.

Deinde eodem modo æquatio erit inter 994 + 1℞, & 952 + 1B. Ablatisque 952 vtrinque, inter 42 + 1℞ & 1B, ac proinde debitum secundi 42 + 1℞.

Tertio similiter æquatio erit inter 994 + 1℞ & 896 + 1C. Ablatisque 896 vtrinque, inter 98 + 1℞, & 1C ideoque debitum tertij erit 98 + 1℞.

Quarto pari ratione erit æquatio inter 994 + 1℞, & 910 + 1D. Ablatisque 910 vtrobique, inter 84 + 1℞ & 1D Debitumque quarti erit aur. 84 + 1℞.

Quinto non secus erit æquatio inter 994 + 1℞, & 840 + 1E. Ablatisque 840 vtrobique, inter 154 + 1℞. & 1E: propterea que debitum quinti erit aur. 154 + 1℞.

SEXTO non aliter æquatio erit inter 994 + 1℞, & 1036 + 1F. Ablatisque 994 vtrobique, inter 1℞, & 42 + 1F. Rursumque ablatis 42 vtrinque, inter 1℞ — 42. & 1F. ideoque debitum erit sexti aur. 1℞ — 42.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Debitum primi | | 112 | + | 1 | ℞ |
| Secundi | | 42 | + | 1 | ℞ |
| Tertij | | 98 | + | 1 | ℞ |
| Quarti | | 84 | + | 1 | ℞ |
| Quinti | | 154 | + | 1 | ℞ |
| Sexti | 1 | ℞ | — | | 42 |
| Septimi | 1 | ℞ | | | |

Et quia pro debito septimi posita fuit 1℞. erunt omnium debita hæc, quæ faciunt summam 7℞ + 448. aur. æqualem 994 + 1℞. cum hic etiam numerus toti debito æqualis sit, vt paulo ante diximus. Ablata ergo 1℞. vtrinque, erit æquatio inter 6℞ + 448. & 994. Ablatisque rursum 448 vtrobique, inter 6℞, & 546. Diuisis igitur 546 per 6. fiet 1℞. 91. debitum septimi, quod fuit 1℞. Hinc facile debita aliorum elicies. Quoniam enim debitum primi fuit 112 + 1℞. erit ipsum debitum 203.

summa

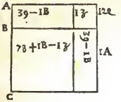
summa nimirum ex 91.& 112.conflata. Sic etiam debitum sexti erit 49. nimirum 1℞ — 42. & sic de cæteris, vt hic cernis.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Debitum | Primi | 203 | aur. | Summa omnium, seu totum debitum. 1085 aur. |
| | Secundi | 133 | | |
| | Tertij | 189 | | |
| | Quarti | 175 | | |
| | Quinti | 245 | | |
| | Sexti | 49 | | |
| | Septimi | 91 | | |

Probatio. Dempto debito septimi ex toto debito, debebunt 6. alij aur. 994. Item dempto debito primi ex eodem debito toto, debebunt 6. alij, aur. 882. & sic de cæteris.

58 *Duo socij habent duos numeros aureorum, quorum summa à summa quadratorum ex ipsis procreatorum subtracta, relinquit 78. Addita vero ad numerum ex eorum multiplicatione productum facit 39. Quæritur, qui sint isti numeri.* LVIII.

HANC quæstionem per sequentem figuram explicabimus, vbi quadratum rectæ A C, diuisum est in duo quadrata, & duo complementa, quorum quodlibet inter duo quadrata medium proportionale est, vt in Lemmate propos. 54. lib. 10. Eucl. demonstrauimus, & supra quoque in numeris in Lemmate ænigmatis 26. cap. 30. ostendimus. Ponatur ergo minor numerus 1℞; nimirum linea AB, & maior 1A, nimirum linea BC. Summa autem ex ipsis conflata, nimirum linea AC, ponatur 1B. Eritque quadratum rectæ AB. 1ʒ. Et quoniam summa numerorum 1B, subtracta ex duobus quadratis rectarum AB, BC, relinquit 78. facient duo illa quadrata 78 + 1B. Ita enim si ex illis demetur 1B, relinquentur 78. Igitur quadratum rectæ BC, erit 78 + 1B, — 1ʒ. Si enim duo quadrata faciunt 78 + 1B, vt diximus, erit solum quadratum rectæ BC, 78 + 1B —— 1ʒ.




Deinde quia summa numerorum A B, B C, nimirum 1B, addita ad productum ex eorum multiplicatione, id est, ad complementum AD, facit 39. erit complementum hoc 39 —— 1B. Ita namque si addatur 1B, fiet ipsum complementum 39.

Quia vero quadratum rectę AC, quæ valet 1B, constat ex duobus quadratis rectarum AB, BC, id est, ex 78 + 1B, & ex duobus complementis, hoc est, ex 78 — 2B, estq; quadratum rectæ AC, ex 1B, procreatum 1Bʒ. erit æquatio inter 1Bʒ. & 156 — 1B. qui numerus conflatur ex 78 + 1B, id est, ex duobus quadratis, & ex duobus complementis, hoc est, ex 78 — 2B. Huius autem numeri 156 — 1B, radix non aliter inuestigabitur, quam ex numero 156 — 1℞, ac si hic æqualis esset 1ʒ. nimirum hoc pacto. Semissis numeri radicū est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 156. hoc est, $\frac{624}{4}$. fit numerus $\frac{625}{4}$. à cuius radice quadrata $\frac{25}{2}$. si dematur prędicta semissis $\frac{1}{2}$, remanebit pretium 1℞. $\frac{24}{2}$. hoc est 12. ac tantum valet recta AC, hoc est, 1B, summa numerorum 1℞ & 1A.

Quoniam igitur 1B, est 12. complementum 39 — 1B, erit 27 & quadratum maius 78 + 1B — 1ʒ. erit 90 — 1ʒ. estque complementum 27. medium proportionale inter quadratum hoc maius 90 — 1ʒ. & quadratum minus 1ʒ. vt initio diximus: si ducatur 90 — 1ʒ in 1ʒ. fiet numerus 90ʒ — 1ʒʒ. [a] æqualis quadrato ex 27. descripto nimirum numero 729. Addito ergo 1ʒʒ. vtrobique, erit æquatio inter 90ʒ. & 729 + 1ʒʒ. & ablatis 729. vtrobique, inter 90ʒ — 729. & 1ʒʒ Huius numeri 90ʒ — 729. radicem Zensizensicam ita inueniemus. Semissis numeri Zensorum est 45 à cuius quadrato 2025. si demantur 729. remanet numerus 1296. ad cuius radicem 36. si addatur prædicta semissis 45. fit 1ʒ81. maior, minor autem erit 9. si nimirum ex prædicta semisse 45 dematur inuenta radix 36. Zensorum autem 81. & 9. radices quadratæ sunt 9. & 3 numeri quæsiti. Nam eorum quadrati sunt 81. & 9 à quorum summa 90. si ipsorum numerorum summa 12. detrahatur, reliquus fit numerus 78. Et si eadem summa 12. addatur ad 27. numerum ex eorum multiplicatione productum, fit summa 39. [a] 20. septi.

PORRO postquam inuentum fuit, 1B, summam numerorum 1℞. & 1A, esse 12. facilius inueniemus vtrumque numerorum 1℞ & 1A, seorsum, per ænigma 172. cap. 29 Quoniam enim complementum quod fit ex AB, in CB, inuentum est 27. si numerus 12. diuidatur in duas partes, vt ex vna in alteram fiat numerus 27. qui non maior est quarta parte quadrati ex numero 12. facti, vt in prædicto ænigmate docuimus, inuenietur vna pars 3. & altera 9. Idem quoque efficietur per ænigma 38. cap. 30.

VEL, si numerus 12. per ænigma 170. cap. 29 vel 35. cap. 30. diuidatur in duos numeros, quorum quadrati simul faciant 90 summam videlicet duorum quadratorum rectarum AB, CB, quæ inuenta est 90. reperientur iterum duæ partes 3. & 9.

## S C H O L I V M.

*EX hoc ænigmate facile intelligitur, eum qui quæstiones per Algebram soluere vult, debere optime esse exercitatum in Geometriæ scientia, vt cap. 1. diximus. Hoc enim ænigma ab eo, qui Geometricā ignorat, vix, aut nullo modo soluetur, vt patet.*

59 *Duo socij habent duas summas aureorum. Quadrati numeri ex summis procreatis faciunt 340. Sed ipsæ summæ inter se multiplicatæ faciunt $\frac{6}{7}$ maioris quadrati. Quæstio est, quantæ sint istæ summæ.* LIX.

PONATVR maior summa 1℞, & minor 1A. Quadrati sunt 1ʒ. & 1Aʒ. qui simul facere debent 340.

 Igitur

Igitur 1ʒ. erit 340 — 1 Aʒ. & 1 Aʒ. erit 340 — 1ʒ. Duo vero numeri inter se multiplicati faciunt numerum 1℞A, æqualem $\frac{6}{7}$ʒ. hoc est, $\frac{6}{7}$. maioris quadrati, qui est 1ʒ. Si igitur æquatio est inter 1℞A, & $\frac{6}{7}$ʒ. erit quoque æquatio inter horum numerorum quadrata, nimirum inter 1ʒ Aʒ. & $\frac{36}{49}$ʒʒ. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 49ʒ Aʒ, & 36ʒʒ. Et per depressionem signi ʒ, primæ radicis, erit æquatio inter 49 Aʒ, & 36ʒ. Ac per regulam Trium, si 36ʒ. æquiualent 49 Aʒ. æquiualebit 1ʒ. numero $\frac{49Aʒ}{36}$. vt hic vides, abiecto signo ʒ. in primo ac tertio numero.

36     49Aʒ     1ʒ     $\frac{49Aʒ}{36}$.

Et quoniam 1 Aʒ. fuit æqualis numero 340 — 1ʒ. erit quoque æquatio inter 1 Aʒ. & 340 — $\frac{49Aʒ}{36}$. quandoquidem 1ʒ. inuentus fuit æqualis numero $\frac{49Aʒ}{36}$. Additis igitur $\frac{49Aʒ}{36}$. vtrobique, erit æquatio inter 1 Aʒ + $\frac{49Aʒ}{36}$. & 340. Cum ergo 1 Aʒ. faciat $\frac{36}{36}$ Aʒ. (quod $\frac{36}{36}$. & 1. æquales sint numeri.) erit æquatio inter $\frac{85}{36}$. Aʒ. & 340. Diuisis ergo 340 per $\frac{85}{36}$. fiet 1 Aʒ. 144. cuius radix 12. erit vnus numerorum, nimirum summa pecuniæ minor, pro qua posuimus 1A, cuius quadratum 1 Aʒ. Quia vero quadratum maioris summæ fuit 340 — 1Aʒ. Si pretium 1Aʒ. nimirum 144. dematur ex 340. reliquum fiet quadratum maioris summæ 196. cuius radix est 14. alter numerorum, nimirum maior summa, quam posuimus 1℞ Itaque primus habet 14. aur. & secundus 12. Quadrati enim horum numerorum 196. 144. faciunt 340. & ex 14. in 12. fit numerus 168. hoc est, $\frac{6}{7}$. maioris quadrati 196.

LX. 60 *Tres socij habent pecunias. Primus dicit secundo, si mihi dares $\frac{1}{2}$ tuæ pecuniæ, haberem 100. aur. Secundus vero dicit tertio, si mihi dares $\frac{1}{3}$. tuæ pecuniæ, haberem 100. aur. Tertius denique dicit primo, si mihi dares $\frac{1}{4}$. tuæ pecuniæ haberem 100. aur. Quæritur, quantum quisque eorum habeat.*

PONATVR primi pecunia 1℞. aur. secundi 1 A, aur. & tertij 1B, aur. Primus ergo cum $\frac{1}{2}$. secundi habebit 1℞ + $\frac{1}{2}$. A qui numerus æqualis est 100. aur. Dempta ergo 1℞. vtrinq;, erit æquatio inter $\frac{1}{2}$ A. & 100. aur. — 1℞. ideoque & inter dupla, nimirum inter 1A, & 200. aur. — 2℞. Atque ita pro secundo, loco 1A, pono 200. aur. — 2℞. qui secundus cum $\frac{1}{3}$. tertij, habebit 200. aur. — 2℞ + $\frac{1}{3}$ B, qui numerus etiam æqualis est 100. aur. Additis ergo 2℞. vtrobique, erit æqualitas inter 200. aur. + $\frac{1}{3}$B, & 100. aur. + 2℞. Et ablatis 100. vtrobique, inter 100. aur. + $\frac{1}{3}$B, & 2℞. Et rursum ablatis 100. vtrinque, inter $\frac{1}{3}$B. & 2℞ — 100. ideoque & inter tripla, nimirum inter 1B, & 6℞ — 300. aur. Atque ita pro tertio, loco 1B, pono 6℞ — 300. aur. Hic tertius cum $\frac{1}{4}$. primi, id est, cum $\frac{1}{4}$℞. habebit 6$\frac{1}{4}$℞ — 300. numerum etiam æqualem 100. aur. Additis igitur 300. vtrobique, erit æquatio inter 6$\frac{1}{4}$℞. & 400. Diuisis ergo 400. per 6$\frac{1}{4}$. fiet 1℞ 64. atque tot aureos habet primus. Secundus autem, qui inuentus est habere 200 — 2℞. habet aur. 72 Tertius denique, qui deprehensus est habere aur. 6℞ — 300. habet 84. aur. Ita enim tam primus 64. cum $\frac{1}{2}$. secundi 72. id est, cum 36. quam secundus 72. cum $\frac{1}{3}$. tertij 84. id est, cum 28. quam tertius 84. cum $\frac{1}{4}$. primi 64. id est, cum 16 habebit 100. aur.

LXI. 61 *Tres habent pecuniam. Primus dicit reliquis, si adhuc haberetis 100. aur. esset summa vestrorum aur. dupla meæ summæ. Secundus dicit reliquis, si adhuc haberetis 100. aur. esset summa vestrorum aur. meæ summæ tripla. Tertius reliquis dicit, si adhuc haberetis 100. aur. summa vestrorum aur. esset summæ meæ quadrupla. Quæritur, quantum quisque habeat.*

PONATVR primi pecunia 1℞, & aliorum duorum simul 1A Hi duo cum 100. aur. habebunt summam duplam pecuniæ primi Ergo æquatio erit inter 2℞ & 1A + 100. Et ablatis 100. vtrobique, inter 2℞ — 100. & 1 A. ac proinde secundus, ac tertius, qui ponuntur habere 1A, habebunt 2℞ — 100. Et si addatur summa primi, quæ est 1℞, erit summa omnium trium 3℞ — 100.

Ponatur deinde summa secundi 1B. habebuntque propterea primus ac tertius 3℞ — 100 — 1B, quandoquidem omnes tres habent 3℞ — 100. Et quia summa primi ac tertij, vna cum 100. aur. tripla est summæ secundi, erit æquatio inter 3℞ — 1B. (Nam si addantur 100. ad 3℞ — 100 — 1B, fit summa 3℞ — 1B) & 3B. Addita igitur 1B, vtrinque, erit æqualitas inter 3℞ & 4B. atque idcirco & inter subquadrupla, hoc est, inter $\frac{3}{4}$℞ & 1B. ac proinde secundus, qui habet 1B habebit $\frac{3}{4}$℞.

Denique pro summa tertij ponatur 1C. habebuntque propterea reliqui duo 3℞ — 100 — 1C, quandoquidem omnes tres habent 3℞ — 100. aur. Et quoniam summa primi ac secundi, vna cum 100. aur. quadrupla est summæ tertij, erit æquatio inter 3℞ — 1C. (Nam si addantur 100. ad 3℞ — 100 — 1C. fit summa 3℞ — 1C.) & 4C. Additaque 1C, vtrinque, erit æquatio inter 3℞ & 5C. ideoque & inter subquintupla, hoc est, inter $\frac{3}{5}$℞. & 1C. ac proinde tertius habebit $\frac{3}{5}$℞.

Itaque cum primus habeat 1℞. secundus $\frac{3}{4}$℞ & tertius $\frac{3}{5}$℞. habebunt omnes tres simul 1$\frac{27}{20}$℞. siue $\frac{47}{20}$℞. Habebant aūt omnes tres simul etiam 3℞ — 100. Est igitur æquatio inter $\frac{47}{20}$℞. siue 2$\frac{7}{20}$℞. & 3℞ — 100. Additisq; 100. vtrinq; inter 2$\frac{7}{20}$℞ + 100. & 3℞. Ablatisq; 2$\frac{7}{20}$℞. vtrobique, inter 100. & $\frac{13}{20}$℞. Diuisis igitur 100 per $\frac{13}{20}$. fiet 1℞ 153$\frac{11}{13}$. aur. pecunia primi. Secundus autem habens $\frac{3}{4}$℞. habebit 115$\frac{5}{13}$. Et tertius habens $\frac{3}{5}$. ℞. habebit 92$\frac{4}{13}$. Nam secundus ac tertius vna cum 100. habebunt 307$\frac{9}{13}$. qui numerus duplus est numeri 153$\frac{11}{13}$. quem habet primus. Item primus ac tertius vna cum 100. habebunt 346$\frac{2}{13}$. qui numerus triplus est numeri 115$\frac{5}{13}$. quem habet secundus. Secundus denique ac primus, vna cum 100. habebunt 369$\frac{3}{13}$. aur. qui numerus quadruplus est numeri 92$\frac{4}{13}$. quem habet tertius.

LXII. 62 *Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, si adhuc haberem 100. aur. fieret mea summa æqualis duabus summis vestris. Secundus reliquis dicit, si haberem adhuc 100. aur. summa mea esset vestræ summæ dupla. Tertius denique ait ad reliquos, si adhuc haberem 100. aur. summa mea fieret summæ vestræ tripla. Quæritur, quantum quisque habeat.*

PONATVR primi summa 1℞ Ergo cū 100. habebit 1℞ + 100 ac tanta erit summa secundi & tertij,

omnesque

omnesque tres habebunt 2℞ + 100. Ponatur summa secundi 1A. Ergo cum 100. habebit 1A + 100. qui numerus duplus est summæ primi ac tertij, quæ est 2℞ + 100 — 1A, (quia cum omnes tres habeant 2℞ + 100. si tollatur 1A, summa videlicet secundi, remanebit summa primi ac tertij 2℞ + 100 − 1A.) Ac proinde æquatio erit inter 1A + 100. & 4℞ + 200 — 2A. Additisque 2A, vtrobique inter 3A + 100. & 4℞ + 200. Et ablatis 100. vtrinque, inter 3A, & 4℞ + 100. Si ergo omnia diuidantur per 3. erit æquatio inter 1A, & $\frac{4}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$. Ac proinde cum secundus positus sit habere 1A, erit eius summa $\frac{4}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$. Ponatur deniq; summa tertij 1B. Ergo cum 100. habebit 1B + 100. qui numerus triplus est summæ primi ac secundi, quæ est $\frac{7}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$. conflata ex 1℞ summa primi, & $\frac{4}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$. summa secundi. Igitur æquatio erit inter 1B + 100. & $\frac{21}{3}$℞ + $\frac{300}{3}$. hoc est, inter 1B + 100. & 7℞ + 100. Ablatisque 100. vtrobique, inter 1B, & 7℞. Ac proinde tertij summa, quæ posita fuit 1B, erit 7℞.

Itaque cum primus habeat 1℞. secundus $\frac{4}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$. & tertius 7℞. habebant omnes tres 9$\frac{1}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$. Habebant autem omnes tres etiam 2℞ + 100. Est igitur æquatio inter 9$\frac{1}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$. & a 2℞ + 100. Ablatisque 2℞ vtrobique, inter 7$\frac{1}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$. & 100. Ablatisque rursum $\frac{100}{3}$. hoc est, 33$\frac{1}{3}$. vtrobique, inter 7$\frac{1}{3}$℞. & 66$\frac{2}{3}$. Diuisis igitur 66$\frac{2}{3}$. per 7$\frac{1}{3}$. fiet 1℞ 9$\frac{1}{11}$. summa primi. Secundus autẽ habens 1$\frac{1}{3}$℞ + 33$\frac{1}{3}$. habebit 45$\frac{5}{11}$. Tertius deniq; habens 7℞. habebit 63$\frac{7}{11}$. Ita namque primus cum 100. faciet 109$\frac{1}{11}$. summam æqualem summę secundi ac tertij Secundus vero cum 100. faciet summam 145$\frac{5}{11}$. duplam summæ primi ac tertij. Tertius denique cum 100. faciet 163$\frac{7}{11}$. summam triplam summæ primi ac secundi.

63 *Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, si de vestra summa remoueretis 100. aur. haberẽ summam æqualem reliquæ vestræ summæ. Secundus reliquis dicit, si de vestra summa remoueretis 100. aur. esset mea summa reliquæ vestræ dupla. Tertius deniq; dicit reliquis, si de vestra summa remoueretis 100. aur. mea summa esset reliquæ vestræ summæ tripla. Quæritur vniuscuiusq; summa.* LXIII.

PONATVR primi pecunia 1℞. Ergo reliqui duo simul habebunt 1℞ + 100. vt amotis 100. habeant reliquam summam æqualem summæ primi. Omnesque tres simul habebunt 2℞ + 100.

Ponatur pecunia secundi 1A. quæ dupla est pecuniæ primi ac tertij, si remoueant 100. aur. Habent autem primus ac tertius 2℞ + 100 − 1A. (cum enim omnes tres habeant 2℞ + 100. si dematur 1A, summa secundi, reliqua fiet summa primi ac tertij 2℞ + 100 − 1A) & amotis 100 habebunt 2℞ — 1A. cuius numeri dupla est 1A, summa secundi. Ergo æquatio erit inter 4℞ — 2A. & 1A. Et additis 2A, vtrinque, inter 4℞, & 3A. Et omnibus diuisis per 3. inter $\frac{4}{3}$℞. & 1A. Ac proinde summa secundi, quem posuimus habere 1A, erit $\frac{4}{3}$℞.

Ponatur denique summa tertij 1B. quæ tripla est summæ primi ac secundi, si remoueant 100. aur. Habent autem primus & secundus $\frac{7}{3}$℞, & amotis 100. habebunt $\frac{7}{3}$℞ — 100. cuius numeri triplum $\frac{21}{3}$℞ — 300. æquale erit summæ tertij 1B. Ergo tertius habet 7℞ — 300.

Itaque cum primus habeat 1℞. secundus $\frac{4}{3}$℞. & tertius 7℞ — 300. habebunt omnes tres simul 9$\frac{1}{3}$℞ — 300. Habebant autem omnes tres quoque simul 2℞ + 100 Æquatio ergo est inter 9$\frac{1}{3}$℞ — 300. & 2℞ + 100. Additisque 300. vtrinque inter 9$\frac{1}{3}$℞. & 2℞ + 400. Ablatisque 2℞. vtrobique, inter 7$\frac{1}{3}$℞ & 400. Diuisis ergo 400. per 7$\frac{1}{3}$. fiet 1℞. 54$\frac{6}{11}$. pecunia primi. Secundus vero habens $\frac{4}{3}$℞ habebit 72$\frac{8}{11}$. Et tertius habens 7℞ — 300. habebit 81$\frac{9}{11}$. quod probatur. Nam si ex 154$\frac{6}{11}$. summa secundi ac tertij reijciantur 100. remanebit summa 54$\frac{6}{11}$. æqualis summæ primi. Et si ex 136$\frac{4}{11}$. summa primi, ac tertij, abijciantur 100. reliqua erit summa 36$\frac{4}{11}$. subdupla summæ secundi 72$\frac{8}{11}$. Si denique ex 127$\frac{3}{11}$. summa primi ac secundi remoueantur 100 remanebit summa 27$\frac{3}{11}$ subtripla summæ tertij 81$\frac{9}{11}$.

64 *Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, si de mea summa remouerem 100. aur. summa vestra esset reliquæ meæ summæ quadrupla. Secundus dicit reliquis, si de mea summa abijcerem 100. aur. vestra summa esset reliquæ meæ summæ tripla. Denique tertius reliquis dicit, si de mea summa auferem 100. aur. esset vestra summa reliquæ meæ summæ dupla. Quæritur vniuscuiusque summa.* LXIIII.

PONATVR pecunia primi 1℞ + 100. Ergo secundus ac tertius habebunt 4℞. vt hæc summa quadrupla sit summæ primi, si prius abiecerit 100. aur. omnesque tres habebunt 5℞ + 100.

Ponatur deinde pecunia secundi 1A + 100. vt abiectis 100. reliqua summa 1A, sit subtripla summæ primi ac tertij: quæ est 5℞ + 100 — 1A + 100. ita vt æquatio sit inter 3A. & 5℞ + 100 — 1A + 100. Et addita 1A + 100. vtrinq;, inter 4A + 100. & 5℞ + 100. Ablatisq; 100. vtrobiq;, inter 4A, & 5℞. Diuisisq; his duob. numeris per 4. erit æquatio inter 1A, & $\frac{5}{4}$℞. Cum ergo secũdus positus sit habere 1A + 100. habebit $\frac{5}{4}$℞ + 100.

Ponatur denique summa tertij 1B + 100. vt abiectis 100. reliqua summa sit subdupla summæ primi ac secundi: quę est 2$\frac{1}{4}$℞ + 200. ita vt æquatio sit inter 2B. & 2$\frac{1}{4}$℞ + 200 Diuisis ergo omnibus per 2. erit 1B, æqualis $\frac{9}{8}$℞ + 100. Cum ergo tertius positus sit habere 1B + 100. habebit $\frac{9}{8}$℞ + 200.

Itaque cum primus habeat 1℞ + 100. Secundus $\frac{5}{4}$℞ + 100. & tertius $\frac{9}{8}$℞ + 200 habebunt omnes tres simul 3$\frac{3}{8}$℞ + 400. Habebant autem omnes tres etiam simul 5℞ + 100. Æquatio igitur est inter 3$\frac{3}{8}$℞ + 400. & 5℞ + 100. Ablatisque 100. vtrobique, inter 3$\frac{3}{8}$. ℞ + 300. & 5℞ Et rursum ablatis 3$\frac{3}{8}$ ℞ vtrinque, inter 300 & 1$\frac{5}{8}$℞. Diuisis igitur 300. per 1$\frac{5}{8}$. fiet 1℞ 184$\frac{8}{13}$. Primus ergo qui positus est habere 1℞ + 100. habebit 284$\frac{8}{13}$. aur. Secundus vero habens $\frac{5}{4}$℞ + 100. habebit 330$\frac{10}{13}$ aur. Tertius denique habens $\frac{9}{8}$℞ + 200 habebit 407$\frac{9}{13}$. aur. quod probatur. Nam si primus remoueat 100. de sua summa, erit reliquus numerus 184$\frac{8}{13}$ subquadruplus summæ secundi ac tertij, quæ est 738$\frac{6}{13}$. Et si secundus de summa abijciat 100. erit reliquus numerus 230$\frac{10}{13}$. subtriplus summæ primi ac tertij. quæ est 692$\frac{4}{13}$. Denique si tertius de sua summa remoueat 100 erit reliquus numerus 307$\frac{9}{13}$. subduplus summæ primi ac secundi, quæ est 615$\frac{5}{13}$.

LXV. 65 *Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, si vobis darem 100. aur. faceretis summam meæ reliquæ summæ quintuplam. Secundus dicit reliquis, si vobis darem 100. aur. fieret vestra summa reliquæ meæ summæ sextupla. Tertius denique reliquis dicit, si vobis darem 100. aur. faceretis summam reliquæ meæ summæ septuplam. Quæritur vniuscuiusque summa.*

PONATVR pecunia primi 1℞ + 100. Ergo reliqui duo habebunt 5℞ — 100. vt si primus eis det 100. habeant 5℞. numerum videlicet quintuplum reliqui numeri primi. Omnesque tres simul habebunt 6℞.

Ponatur secundi pecunia 1A + 100. vt postquam alijs duobus dederit 100. reliqua 1A, sit subsescupla summæ aliorum cum illis 100. aur. quos à secundo acceperunt. Habent autem primus ac tertius 6℞ — 1A + 100. ac propterea cum 100. aur. secundi habebunt 6℞ + 100 — 1A + 100. qui numerus sescuplus est 1A, hoc est æqualis 6A. Additis ergo 1A + 100. vtrobique erit æqnatio inter 6℞ + 100 & 7A + 100. Ablatisque 100. vtrobique, inter 6℞. & 7A. Diuisisq; duobus hisce numeris per 7. erunt $\frac{6}{7}$℞. æquales 1A Ergo secundus, quem posuimus habere 1A + 100. habebit $\frac{6}{7}$℞ + 100.

Ponatur denique pecunia tertij 1B + 100. vt postquam alijs duobus dederit 100. aur. reliqua 1B, sit subseptupla summæ primi, ac secundi vnà cum 100. aur. quos à tertio acceperunt. Habent autem primus ac secundus $\frac{13}{7}$℞ + 200. ideoque cum 100. aur. tertij habebunt $\frac{13}{7}$℞ + 300. qui numerus septuplus est 1B, hoc est, æqualis. 7B. Diuisisque $\frac{13}{7}$℞ + 300. & 7B, per 7. erit æquatio inter $\frac{13}{49}$℞ + $\frac{300}{7}$. & 1B. Ergo tertius, quem posuimus habere 1B + 100. habebit $\frac{13}{49}$℞ + $\frac{1000}{7}$.

Itaque cum primus habeat 1℞ + 100. Secundus $\frac{6}{7}$℞ + 100. & tertius $\frac{13}{49}$℞ + $\frac{1000}{7}$. habebunt omnes tres simul $2\frac{6}{49}$℞ + $\frac{2400}{7}$. Habebant autem & omnes tres simul 6℞. Est igitur æqualitas inter $2\frac{6}{49}$℞ + $\frac{2400}{7}$. & 6℞ Ablatisque $2\frac{6}{49}$℞. vtrinque inter $\frac{2400}{7}$. & $3\frac{43}{49}$℞ Diuisis igitur $\frac{2400}{7}$. per $3\frac{43}{49}$. fiet 1℞. $88\frac{8}{19}$. Primus ergo, cuius dedimus 1℞ + 100. habebit $188\frac{8}{19}$. Secundus autem, qui inuentus est habere $\frac{6}{7}$℞ + 100. habebit $175\frac{15}{19}$. Tertius deniq; habens $\frac{13}{49}$℞ + $\frac{1000}{7}$. habebit $166\frac{6}{19}$. quod probatur. Nam si primus det 100. aur. alijs duobus habebunt alij duo $442\frac{2}{19}$. qui numerus quintuplus est reliquæ summæ primi $88\frac{8}{19}$. Et si secundus alijs duobus det 100. aur. habebunt alij duo $454\frac{14}{19}$. qui numerus sextuplus est summæ reliquæ secundi $75\frac{15}{19}$. Denique si tertius alijs duobus det 100. aur. habebunt alij duo $464\frac{4}{19}$. qui numerus septuplus est reliquæ summæ tertij $66\frac{6}{19}$.

LXVI. 66 *Tres pecuniam habent. Primus reliquis dicit, si vos daretis mihi 100. aur. fieret mea summa vestræ summæ reliquæ æqualis. Secundus reliquis dicit, si daretis mihi 100. aur. fieret mea summa vestræ summæ reliquæ dupla. Tertius denique dicit reliquis, si mihi daretis 100. aur. fieret mea summa reliquæ vestræ summæ tripla. Quæritur vniuscuiusque summa.*

PONATVR pecunia primi 1℞. qui si acceperit 100 aur. ab alijs duobus habebit 1℞ + 100. ac tantundem habebunt tunc alij duo, atque idcirco antequam dederunt 100. aur. habuerunt 1℞ + 200. Omnesq; tres habebunt 2℞ + 200.

Ponatur pecunia secundi 1A qui si acceperit 100. aur. ab alijs duobus, habebit 1A + 100. qui numerus duplus est summæ reliquæ primi, ac tertij. quæ antequam dederint 100. aur. alijs duobus, est 2℞ + 200 — 1A. & postquam dederint 100. aur. alijs duobus, habebunt 2℞ + 100 — 1A. Huius ergo duplum 4℞ + 200 — 2A, æquale erit 1A + 100. Et additis 2A, vtrobique, æquatio erit inter 4℞ + 200. & 3A. + 100. Et ablatis 100. vtrinque, inter 4℞ + 100. & 3A. Diuisisque duobus hisce numeris per 3. erit æquatio inter $\frac{4}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$. & 1A. Secundus ergo habet $\frac{4}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$. quoniam posuimus eum habere 1A.

Ponatur denique pecunia tertij 1B, qui si acceperit 100. aur. ab alijs duobus, habebit 1B + 100. qui numerus triplus est summæ reliquæ primi ac secundi, quæ antequam dederint 100. aur. alijs duobus, est $\frac{7}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$. & postquam dederint 100. aur. alijs duobus, habebunt $\frac{7}{3}$℞ — $\frac{200}{3}$. Huius ergo triplum 7℞ — 200. æquale est 1B + 100. Et additis 200. vtrinque, æqualitas erit inter 7℞. & 1B + 300. Ablatisque 300. vtrobique, inter 7℞ — 300. & 1B. Tertius igitur, quem posuimus habere 1B. habebit 7℞ — 300.

Itaque cum primus habeat 1℞. Secundus $\frac{4}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$ & tertius 7℞ — 300. habebunt omnes tres simul $9\frac{1}{3}$℞ — $\frac{800}{3}$. Habebant autem & omnes simul 2℞ + 200. Est ergo æqualitas inter $9\frac{1}{3}$℞ — $\frac{800}{3}$. & 2℞ + 200. Ablatisque 2℞ vtrobique, inter $7\frac{1}{3}$℞ — $\frac{800}{3}$. & 200. Additisque $\frac{800}{3}$. vtrinque, inter $7\frac{1}{3}$℞. & $\frac{1400}{3}$. Diuisis igitur $\frac{1400}{3}$. per $7\frac{1}{3}$ fiet 1℞. $63\frac{7}{11}$. pecunia primi. Secundus vero, qui inuentus est habere $\frac{4}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$. habebit $118\frac{2}{11}$. Tertius denique, quem inuenimus habere 7℞ — 300. habebit $145\frac{5}{11}$. quod probatur. Nam primus cum 100. habebit summam $163\frac{7}{11}$. æqualem summæ reliquorum, si prius dederint 100. aur. Secundus vero cum 100 faciet summam $218\frac{2}{11}$. duplam reliquorum summæ, postquam 100. aur. dederint. Tertius denique cum 100. faciet summam $245\frac{5}{11}$. triplam summæ reliquorum, postquam dederint 100. aur.

LXVII. 67 *Tres habent pecuniam. Dicit primus reliquis, Si mihi daretis $\frac{1}{2}$ vestræ summæ, haberem 100. aur. Secundus vero dicit reliquis, si mihi daretis $\frac{1}{3}$. vestræ summæ, haberem 100. aur Tertius denique reliquis dicit, si mihi daretis $\frac{1}{4}$. vestræ summæ, haberem 100. aur. Quæritur pecunia vniuscuiusque.*

PONATVR pecunia primi 100 — 1℞. Ergo reliqui duo habebunt 2℞. Ita enim si dent $\frac{1}{2}$. nimirum 1℞. primo, habebit primus 100. aur Omnesque tres simul habebunt 100 + 1℞.

Ponatur secundi pecunia 1A. habebuntque primus ac tertius 100 + 1℞ — A, qui si secundo dent $\frac{1}{3}$. nimirum $\frac{100}{3}$ + $\frac{1}{3}$℞ — $\frac{1}{3}$A habebit secundus 1A + $\frac{100}{3}$ + $\frac{1}{3}$℞ — $\frac{1}{3}$A, hoc est, $\frac{2}{3}$A + $\frac{100}{3}$ + $\frac{1}{3}$℞. qui numerus

numerus æqualis est 100.aur. Si ergo auferantur $\frac{100}{3}$. vtrobique, erit æquatio inter $\frac{2}{3}$ A + $\frac{1}{3}$ ℞. & $\frac{200}{3}$. Ablatisq; $\frac{1}{3}$ ℞ vtrinque, inter $\frac{2}{3}$ A, & $\frac{200}{3}$ — $\frac{1}{3}$ ℞. Diuisisque duobus hisce numeris per $\frac{2}{3}$. erit æqualitas inter 1 A, & 100 — $\frac{1}{2}$ ℞. Secundus ergo habebit 100 — $\frac{1}{2}$ ℞.

Ponatur pecunia tertij 1 B. Et quia primus ac secundus habent 200 — $\frac{3}{2}$ ℞, si tertio dent $\frac{1}{4}$. nimirum 50. — $\frac{3}{8}$ ℞. habebit tertius 1B + 50 — $\frac{3}{8}$ ℞ qui numerus æqualis est 100. aur. Ablatisque 50. vtrinque, erit æqualitas inter 1 B — $\frac{3}{8}$ ℞. & 50. Additisque $\frac{3}{8}$ ℞ vtrobique, inter 1B, & 50 + $\frac{3}{8}$ ℞. Tertius igitur habebit 50 + $\frac{3}{8}$ ℞.

Itaq; cũ primus habeat 100 — 1 ℞. Secũdus 100 — $\frac{1}{2}$ ℞. & tertius 50 + $\frac{3}{8}$ ℞. habebũt omnes tres simul 250 — $\frac{9}{8}$ ℞. Habebant aũt omnes tres simul ẽt 100 + 1 ℞. Est igitur æquatio inter 250 — $\frac{9}{8}$ ℞. & 100 + 1 ℞. Additisque $\frac{9}{8}$ ℞, vtrobiq;, inter 250 & 100 + 2 $\frac{1}{8}$ ℞. Ablatisq; 100. vtrinq;, inter 150. & 2 $\frac{1}{8}$ ℞. Diuisis igitur 150. per 2 $\frac{1}{8}$. fiet 1 ℞. 70 $\frac{10}{17}$. Primus igitur habens 100 — 1 ℞, habebit 29 $\frac{7}{17}$. Secundus autem habens 100 — $\frac{1}{2}$ ℞ habebit 64 $\frac{12}{17}$. Tertius denique habens 50 + $\frac{3}{8}$ ℞. habebit 76 $\frac{8}{17}$. Nam tam primus cum $\frac{1}{2}$. summæ reliquorum duorum, quam secundus cum $\frac{1}{3}$ summæ aliorum duorum, & quam tertius cum $\frac{1}{4}$. summæ aliorum duorũ habet 100. aur.

68 *Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, si vobis darem $\frac{1}{2}$. meæ summæ, haberetis 100. aur. Secundus vero reliquis dicit, si vobis darem $\frac{1}{3}$. meæ summa, haberetis 100. aur. Tertius denique reliquis dicit, si vobis darem $\frac{1}{4}$. mea pecunia, haberetis 100. aur.* LXVIII.

VEL

*Secundus, ac tertius dicunt primo, si nobis dares $\frac{1}{2}$. tuæ pecuniæ, haberemus 100. aur. At primus, ac tertius dicunt secundo, si nobis dares $\frac{1}{3}$. tua pecunia, haberemus 100. aur. Deniq; primus, ac secundus dicunt tertio, si nobis dares $\frac{1}{4}$. tuæ pecuniæ, haberemus 100. aur. Quæritur vniuscuiusque summa.*

PONATVR pecunia primi 1 ℞ Ergo reliqui duo habebunt 100 — $\frac{1}{2}$ ℞. vt accipientes $\frac{1}{2}$. primi, nimirum $\frac{1}{2}$ ℞. habeant 100. Omnesque tres habebunt $\frac{1}{2}$ ℞ + 100.

Ponatur pecunia secundi 1 A, eritque summa primi ac tertij $\frac{1}{2}$ ℞ + 100 — 1 A. Et si acceperint $\frac{1}{3}$. secundi, nimirum $\frac{1}{3}$ A, habebunt $\frac{1}{2}$ ℞ + 100 — 1 A + $\frac{1}{3}$ A, qui numerus æqualis est 100. Additis ergo 1 A, vtrobique, erit æquatio inter $\frac{1}{2}$ ℞ + 100 + $\frac{1}{3}$ A & 100 + 1 A. Ablatisque 100. vtrinque, inter $\frac{1}{2}$ ℞ + $\frac{1}{3}$ A. & 1 A. Et rursum ablata $\frac{1}{3}$ A, vtrobique, inter $\frac{1}{2}$ ℞, & $\frac{2}{3}$ A. Diuisoque vtroque numero per $\frac{2}{3}$. inter $\frac{3}{4}$ ℞. & 1 A. Habet ergo secundus $\frac{3}{4}$ ℞.

Ponatur pecunia tertij 1 B. Et quoniam primus & secundus habent $\frac{7}{4}$ ℞. Si acceperint $\frac{1}{4}$. tertij. habebunt $\frac{7}{4}$ ℞ + $\frac{1}{4}$ B. summam æqualem 100. aur Ablatisque $\frac{7}{4}$ ℞ vtrobique, erit æquatio inter $\frac{1}{4}$ B & 100 — $\frac{7}{4}$ ℞. Diuiso ergo vtroque numero per $\frac{1}{4}$. erit 1 B, æqualis 400 — 7 ℞. Tertius ergo habet 400 — 7 ℞.

Itaque cum primus habeat 1 ℞. secundus $\frac{3}{4}$ ℞, & tertius 400 — 7 ℞ habebunt omnes tres 400 — $\frac{21}{4}$ ℞. Habebant autem & omnes simul $\frac{1}{2}$ ℞ + 100. Si igitur vtrinque addantur $\frac{21}{4}$ ℞. erit æqualitas inter 400. & $\frac{23}{4}$ ℞ + 100. Ablatisque 100. vtrobique, inter $\frac{23}{4}$ ℞. & 300. Diuisis igitur 300. per $\frac{23}{4}$. fiet 1 ℞ 52 $\frac{4}{23}$. pecunia primi. Secundi pecunia, qui inuentus est habere $\frac{3}{4}$ ℞. erit 39 $\frac{3}{23}$. aur. Tertius denique habens 400 — 7 ℞. habebit 34 $\frac{18}{23}$. aur. quod probatur. quia tam secundus ac tertius cum $\frac{1}{2}$. primi, quam primus ac tertius cum $\frac{1}{3}$. secundi, & quam primus & secundus cum $\frac{1}{4}$. tertij habent 100. aur.

69 *Tres mercatores Societatem ineunt per 12. menses. Primus imponit 100. aur. Secundus 200. aur. & tertius 300. aur. Post menses autem duos imponit primus aliquot libras piperis, cuius 3. libræ valent 1. aur. Et post menses quatuor secundus imponit massam argẽti, cuius 1. marca valet 7. aur. Transactis 12. mensibus, recipit primus ex lucro 50. aur. secundus 110. aur. & tertius 90. aur. ita vt totum lucrum fuerit 250. aur. Quæritur, quot libras piperis primus imposuerit, & quot marcas argenti secundus.* LXIX.

PONE primum imposuisse 1 ℞. librarum piperis: Et secundum 1 A, marcarum argenti. Cum ergo tres libræ piperis valeant 1. aur. valebit 1 ℞ lib. aur. $\frac{1}{3}$ ℞. Et cum 1. marca argenti valeat 7. aur. valebit 1 A marcarum aur. 7 A, vt hic vides.

| Lib. | aur. | Lib. | aur. |
|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 1 ℞? | $\frac{1}{3}$ ℞ |
| Marca | aur. | Marc. | aur. |
| 1 | 7 | 1 A? | 7 A |

Et quia pecunia cuiusque multiplicanda est in tempus, si 100. aur primi ducantur in 12 mens. fiet numerus 1200. Et ex 200. aur. secundi in 12. mens. fiet numerus 2400. & ex 300. aur. tertij in 12. mens. fiet numerus 3600. Rursus ex $\frac{1}{3}$ ℞ primi in 10. mens. quibus in Societate stetit, (nam post duos menses imposuit $\frac{1}{3}$ ℞ aur. hoc est, 1. lib. piperis) fit numerus $\frac{10}{3}$ ℞. aur. Et ex 7. A, in 8. mens. quibus in commertio steterunt. nam post 4. mens. imposuit 1 A, marc. quæ valet 7 A) fit numerus 56 A marc. Igitur numerus primi est 1200 + $\frac{10}{3}$ ℞ Secundi 2400 + 56 A marc. & tertij 3600. qui tres numeri faciunt 7200 + $\frac{10}{3}$ ℞ + 56 A. Vnde sic stabit exemplum ad regulam. Trium ter repetitam.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7200 + $\frac{10}{3}$ ℞ + 56 A | 250 | 1200 + $\frac{10}{3}$ ℞? | 50 |
| | | 2400 + 56 A? | 110 |
| | | 3600? | 90 |

hoc est, si 7200 + $\frac{10}{3}$ ℞ + 56 A, lucrantur 250. aur. quid lucrabuntur aur. 1200 + $\frac{10}{3}$ ℞. & quid aur. 2400 +

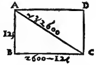
# ÆNIGMATA VARIA AD FIGVRAS *Geometricas pertinentia.*

## CAPVT XXXII.

IN extremo hoc cap. reducentur ad vſum omnia fere illa, quæ de numeris irrationalibus præcepta ſunt: quippe cum ænigmata proponenda ſint varia de figuris Geometricis, in quibus plerumq; latera, diametri, atque areæ per numeros ſurdos explicari ſolent. Horum ænigmatum primum ſit hoc.

1 *Eſt rectangulum quoddam altera parte longius A B C D, cuius area continet palmos 120. diameter vero palm. √ʒ 2600. Quæruntur latera.* I.

a QVONIAM quadrata laterum A B, B C, æqualia ſunt quadrato diametri AC. quod eſt 2600. ſi quadratum lateris AB, ponatur 1℞. erit quadratum lateris BC, 2600 — 1℞. Ergo latera ipſa erunt √ʒ 1℞. & √ʒ (2600 — 1℞) quæ inter ſe multiplicata producent aream B D, nimirum palm. 120. vt cap. 1. lib. 3. Geom. pract. diximus, atque idcirco quadrata laterum 1℞, & 2600 — 1℞ inter ſe multiplicata producent quadratum areæ, nimirum 14400. ex coroll. Lemmatis ænig. 26. cap. 30. Cum ergo ex 1℞. in 2600 — 1℞ fiat 2600 ℞ — 1ʒ. erit æquatio inter 14400. & 2600 ℞ — 1ʒ. Additoque 1ʒ. vtrinque, inter 1ʒ + 14400. & 2600 ℞. Ablatiſque 14400. vtrobique, inter 1ʒ. & 2600 ℞ — 14400. Iam ſic. Semiſſis numeri radicum eſt 1300. à cuius quadrato 1690000. ſubtractis 14400. remanent 1675600. Ad huius numeri radicem quadratam √ʒ 1675600. ſi addatur prædicta ſemiſſis 1300. fiet 1℞. 1300 + √ʒ 1675600. Et ſi eadem radix ex prędicta ſemiſſe detrahatur, reliqua fiet minor radix 1300 — √ʒ 1675600 (quia hæc æquatio duplicem habet radicem, propter ſignum — quo numerus abſolutus afficitur.) Ergo minoris lateris AB, quadratum erit 1300 — √ʒ 1675600. maioris autem lateris BC, quadratũ erit 1300 + √ʒ 1675600. *a 47. pri.*




quod etiam relinquitur, ſi quadratum 1300 — √ʒ 1675600. lateris AB, detrahatur ex 2600. quadrato diametri AC, vt in hac formula apparet. Vides ergo duo quadrata 1300 — √ʒ 1675600. & 1300 + √ʒ 1675600. ſimul facere 2600. quadratum diametri.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2600 | + | √ʒ | 0 |
| 1300 | — | √ʒ | 1675600 |
| 1300 | + | √ʒ | 1675600 |

Et ſi eorum latera √ʒ (1300 — √ʒ 1675600.) & √ʒ (1300 + √ʒ 1675600) inter ſe multiplicentur, produci aream rectãguli √ʒ 14400. hoc eſt, 120 palm. quę multiplicatio fiet, ſi quadratũ poſterioris particulæ 1675600 dematur ex 1690000 quadrato prioris particulæ, & reliquo numero ſignum √ʒ, præfigatur. vt ex ijs conſtat, quæ cap. 23. & 24. ſcripſimus, atque in hac formula apparet.

√ʒ (1300 — √ʒ 1675600)
√ʒ (1300 + √ʒ 1675600)
√ʒ 14400

ALITER. Poſito quadrato minoris lateris A B, 1℞. & idcirco quadrato maioris lateris 2600 — 1℞. erunt ipſa latera √ʒ 1℞, & √ʒ (2600 — 1℞) quæ inter ſe multiplicata facient aream 120. palm. Faciunt autem √ʒ (2600 ℞ — 1ʒ) vt hic vides. quæ multiplicatio fiet, ſi ipſa quadrata 2600 — 1℞. & 1℞. inter ſe multiplicentur, & producto numero ſignum √ʒ. præfigatur. Eſt igitur æquatio inter 120. & √ʒ (2600 ℞ — 1ʒ) atque ideo & inter eorum quadrata 14400. & 2600 ℞ — 1ʒ. vt ſupra, &c.

√ʒ (2600 — 1℞)
1℞
√ʒ (2600 ℞ — 1ʒ)

ALITER. Ponatur minus latus AB. 1℞. ideoque eius quadratum 1ʒ. Erit igitur quadratum maioris lateris BC, 2600 — 1ʒ. & ipſum latus BC, √ʒ (2600 — 1ʒ.) Ducatur AB. 1℞. in BC, √ʒ (2600 — 1ʒ.) quod fiet, vt cap. 26. dictum eſt, ſi 1℞. reducatur ad quadratum 1ʒ, præponaturque ſignum √ʒ. Nam ſi √ʒ 1ʒ. ducatur in √ʒ (2600 — 1ʒ) quod fiet, ſi eorum quadrata 1ʒ. & 2600 — 1ʒ. inter ſe multiplicentur, vt cap. 26. dictum eſt, producetur numerus √ʒ (2600 ʒ — 1ʒʒ) pro area rectanguli 120. Ergo æquatio erit inter √ʒ (2600 ʒ — 1ʒʒ) & 120. ac proinde & inter eorum quadrata 2600 ʒ — 1ʒʒ. & 14400. Et addito 1ʒʒ. vtrobique, inter 2600 ʒ. & 1ʒʒ + 14400. Ablatiſque 14400. vtrinque, inter 2600 ʒ — 14400. & 1ʒʒ. Iam ſic radicem Zenſizenſicã eruemus. Semiſſis numeri Zenſorum eſt 1300. à cuius quadrato 1690000. demptis 14400 remanent 1675600. Ad huius numeri radicem quadratam √ʒ 1675600. ſi addatur prædicta ſemiſſis 1300. fiet 1ʒ. 1300 + √ʒ 1675600. Et ſi eadem radix ex prædicta ſemiſſe dematur, relinquetur minus quadratum 1300 — √ʒ 1675600. Ergo maioris lateris BC, quadratum erit 1300 + √ʒ 1675600. & minoris lateris AB, quadratũ erit 1300 — √ʒ 1675600. & radix maior erit √ʒ (1300 + √ʒ 1675600) & minor, √ʒ (1300 — √ʒ 1675600) vt ſupra, &c.

√ʒ (2600 — 1ʒ)
1ʒ
√ʒ (2600 ʒ — 1ʒʒ)

a 47. primi — ALITER, [a] Quoniam quadrata laterum AB, BC, faciunt 2600. & ex vno latere in aliud fit area 120. inueniendi erunt per ænigma 26. cap. 30. duo numeri, qui inter se multiplicati faciant 120. & eorum quadrati faciant 2600. quod ita fiet. Ponatur minor numerus quadratus 1ʒ & maior 2600—1ʒ. Et quoniam per Lemma
b 19. septi. — ænigmatis 26. cap. 30. numerus 120. quem litera quadratorum 1ʒ. & 2600—1ʒ producunt, medio loco proportionalis est inter ipsa quadrata; [b] erit numerus 2600ʒ—1ʒʒ. factus ex 1ʒ in 2600—1ʒ. æqualis quadrato numeri 120. hoc est, numero 14400. Est ergo æquatio inter 2600ʒ—1ʒʒ. & 14400. Additoque 1ʒʒ. vtrobique, inter 2600ʒ. & 1ʒʒ+14400. Et ablatis 14400. vtrinque, inter 2600ʒ—14400. & 1ʒʒ. vt supra, &c.

II. 2 *Campus altera parte longior habet latera in proportione septupla: & eorum quadrata simul sumpta ad eorum summam proportionem habent centuplam. Quæruntur latera, area, & diameter.*

PONATVR minus latus 1℞, & maius 7℞, quorum summa 8℞. & quadrata 1ʒ. 49ʒ. summam faciunt 50ʒ. centuplam summæ 8℞. Igitur æquatio est inter 50ʒ. & 800℞. Diuisis ergo 800. per 50. fiet 1℞. 16 minus latus. Maius erit 112. in proportione septupla. Ergo area erit 1792. producta ex vno latere in aliud. Diameter vero erit √ʒ 12800. Hoc est, quadrata laterum 256. & 12544. facient summam 12800. centuplam summæ laterum 16. & 112 quæ est 128. at quadratum diametri erit 12800. summa duorum quadratorum laterum, ac proinde diameter √ʒ 12800.

III. 3 *Est rectangulum 4500. palmorũ, & longitudo tripla est latitudinis. Quærũtur latera, & diameter.*

PONATVR latitudo 1℞. & longitudo 3℞. Hæc latera inter se multiplicata producunt aream 3ʒ. æqualẽ 4500. Diuisis ergo 4500 per 3. fiet 1ʒ. 1500. & 1℞ √ʒ 1500. latitudo rectanguli: & eius triplum √ʒ 13500 erit eiusdem longitudo. Ex latitudine in longitudinem fit area √ʒ 20250000. hoc est, 4500. Diametri autem quadratum erit 15000. æquale duobus quadratis laterum, & ipsa diameter erit √ʒ 15000.

IIII. 4 *Est parallelepipedum, hoc est, columna quadrilatera palmorum 3375. Altitudo ad longitudinẽ basis, & hæc longitudo ad latitudinem basis proportionem habet sesquialteram, Quæruntur mensuræ.*

PONATVR altitudo 9℞ longitudo 6℞ & latitudo 4℞. in continua proportione sesquialtera. Latitudo in longitudinem facit basem 24ʒ. & hæc in altitudinem facit aream parallelepipedi 216ℭ. æqualem 3375. Diuisis igitur 3375. per 216. fiet 1ℭ 15 $\frac{135}{216}$. & 1℞. cubica 2½. Ergo 9℞. facient 22½. altitudinem: Et 6℞ facient 15. longitudinem basis: Et 4℞ facient 10. latitudinem basis. quæ mensuræ inuicem multiplicatæ faciunt 3375.

V. 5 *Est parallelepipedum basem habens quadratam, cuius latus subdecuplum est altitudinis parallelepipedi, cuius area continet 6780. palmos. Quæritur basis, & altitudo.*

PONATVR latus basis 1℞ ideoque altitudo parallelepipedi 10℞. Ex 1℞. in se fit 1ʒ. nimirum basis quadrata, quæ ducta in altitudinem, id est, in 10℞. facit 10ℭ. aream scilicet parallelepipedi æqualem 6780. Diuisis igitur 6780. per 10. fiet 1ℭ. 678. & 1℞ √ℭ 678. latus basis quod in se ductum facit √ℭ 459684. aream basis. Altitudo vero ad latus decuplam habens proportionem erit √ℭ 678000 quæ ducta in aream basis, id est, in √ℭ 459684. facit √ℭ 311665752000. aream totius parallelepipedi, nimirum 6780.

VI. 6 *Est superficies rectangula habens longitudinem quadruplam latitudinis, & aream 576. Quæruntur latera.*

PONATVR minus 1℞. & maius 4℞. Hæc inter se multiplicata producunt 4ʒ aream rectanguli æqualem 576. Diuisis ergo 576 per 4. fiet 1ʒ. 144. & 1℞ 12. minus latus. Maius ergo erit 48.

VII. 7 *Est columna quadrangula rectangula, cuius basis latera proportionem habent sesquitertiam, & altitudo ad latus maius basis proportionem habet duplam superbipartientem tertias: soliditas denique columnæ continet palm. 93312. Quæruntur dimensiones singulæ.*

PONATVR latus minus basis 3℞, & maius 4℞. altitudo vero 10⅔℞. vt ad maius latus 4℞, habeat proportionem duplam superbipartientem tertias, & maius latus ad minus sesquitertiam. Hi tres numeri inter se multiplicati producunt 128ℭ. soliditatem videlicet columnæ æqualem 93312. Diuisis igitur 93312. per 128. fiet 1ℭ. 729 & 1℞. 9. Ergo latus minus basis, quod posuimus 3℞. erit 27. & maius 4℞. erit 36 altitudo vero 10⅔℞. erit 96. Atque tres hæ dimensiones inter se multiplicatæ faciunt aream 93312.

VIII. 8 *Sunt duæ turres inæquales supra duas bases quadratas erectæ. Latera basium proportionem habent sesquitertiam, qualem etiam habent & altitudines & soliditates: ipsæque altitudines permutatim sunt laterum basium duplæ. Soliditates denique ambarum turrium simul complectuntur palm. 21000. Quæruntur dimensiones singulæ.*

PONATVR latus minoris basis 3℞, & maioris 4℞, vt hoc ad illud proportionem habeat sesquitertiam sine fractione. Eritque minor basis 9ʒ & maior 16ʒ. Et quia altitudines laterum basium sunt permutatim duplæ. hoc est, altitudo turris maioris basis dupla est lateris basis minoris, & altitudo turris minoris
c 15. quin. — basis dupla est lateris maioris basis; erit illa 6℞, & hæc 8℞, habebuntque proportionem sesquitertiam, [c] eandem nimirum, quam latera basium habent, eritque turris minoris basis altior, quam turris maioris basis,

Quoniam

Quoniam verò, vt in sequenti Lemmate demonstrabimus, duo numeri multiplicantes per crucem duos numeros, qui habeant duplicatam proportionem priorum numerorum, producunt duos numeros in eadem cum illis proportione: [a] habentque bases duplicatam proportionem laterum basium, ideoque & altitudinem: fit vt maior altitudo 8℞. ducta in minorem basem 9ℨ. producat 72ℭ. turrim minoris basis, & minor altitudo 6℞. ducta in maiorem basem 16ℨ, producat 96ℭ. turrim maioris basis; quę per prędictum Lemma sequens habebunt eandem proportionem sesquitertiam, quam ipsæ altitudines, vel latera basium habent: eritque propterea turris maioris basis, & minoris altitudinis maior, ac turris minoris basis, & maioris altitudinis minor. Atque ambæ turres simul conficiunt 168.ℭ. summam æqualem 21000. Diuisis ergo 21000. per 168. fiet 1.ℭ. 125.&1℞.5. Ideoque latus maioris turris. quod positum est 4℞ erit 20.palm. Et latus minoris turris positum 3℞. erit 15.palm. Et reliquæ dimensiones erunt, vt in hac formula positæ sunt. Vbi vides, & latera basium & altitudines, soliditatesque turrium habere proportionem sesquitertiam, & bases ipsas proportionem supersepti partientem nonas, duplicatam scilicet proportionis sesquitertiæ. Soliditates deniq; ambarum turriũ conficere palm. 21000. vt ænigma proponit. [a 20. sexti.]

8℞ X 16ℨ    96ℭ
6℞ X 9ℨ    72ℭ

| | |
|---|---|
| *Latus basis turris minoris.* | 15 |
| *Latus basis turris maioris.* | 20 |
| *Basis minoris turris* | 225 |
| *Basis maioris turris.* | 400 |
| *Altitudo minoris turris.* | 40 |
| *Altitudo maioris turris.* | 30 |
| *Soliditas minoris turris.* | 9000 |
| *Soliditas maioris turris.* | 12000 |

## L E M M A.

*SI duo numeri in duos, qui habeant proportionem duplicatam illorum, per crucem multiplicentur, habebunt producti eandem, quam ipsi numeri, proportionem.*

*SINT duo numeri quicunque 8. & 6 proportionem sesquitertiam habentes: & alij duo 16. & 9. habentes proportionem duplicatam proportionis sesquitertiæ, nimirum superseptipartientem nonas, vt hic apparet 16.12.9. Fiatque 72. ex 8. in 9. & 96 ex 6. in 16. Dico esse 96. ad 72. vt 8. ad 6. Cum enim 16. & 9. habeant proportionem duplicatam proportionis 8. ad 6. cadet inter illos medius proportionalis 12. in proportione 8. ad 6. ac proinde cum sit, vt primus 8. ad secundum 6. ita tertius 16. ad quartum 12. [b] fiet idem numerus ex primo 8. in quartum 12. qui ex secundo 6. in tertium 16. nimirum 96. Item cum sit, vt primus 8. ad secundum 6. ita tertius 12. ad quartum 9. [c] fiet idem numerus 72. ex primo 8. in quartum 9 qui ex secundo 6. in tertium 12. Quo circa cum 96. fiat ex 12. in 8. & 72. ex 12. in 6. [d] erit eadem proportio 96. ad 72. quæ 8. ad 6.* [b 19. septi.] [c 19. septi.] [d 17. septi.]

8 X 16    96
   12
6 X 9    72

*HINC fit, minorem altitudinem ducendam esse in maiorem basem, & maiorem altitudinem in minorem basem, vt soliditates procreatæ eandem habeant proportionem, quam altitudines; ac propterea maiorem turrem habere minorem altitudinem: minorem vero turrem altitudinem maiorem. Propter hanc causam dictum est in ænigmate, altitudines esse permutatim duplas laterum basium.*

9 *Est triangulum rectangulum, cuius basis (voco basem, latus recto angulo oppositum) continet palm. 52. Latera autem proportionem habent duplam superbipartientem quintas. Quæruntur duo latera.* IX.

PONATVR minus 5℞, & maius 12℞, vt sine fractione proportionem habeant duplam superbipartientem quintas: Quadrata laterum sunt 25ℨ, & 144ℨ, quæ simul faciunt summam 169ℨ, [e] æqualem quadrato basis, numero scilicet 2704. Diuisis igitur 2704. per 169. fiet 1ℨ, 16. & 1℞. 4. Minus ergo latus 5℞, erit 20. palm. & maius 12℞, erit 48. palm. quod probatur. Nam duo quadrata laterum 400. & 2304. faciunt 2704. quadratum basis. [e 47. primi]

10 *Est altera parte longius, cuius area 500. palm. & duo latera simul faciunt 100. palm. Quæruntur latera.* X.

PONATVR vnum 1℞, & alterum 100—1℞. Hæc multiplicata inter se faciunt 100℞—1ℨ. aream rectanguli æqualem 500. Addito ergo 1ℨ. vtrinque, erit æquatio inter 100℞, & 1ℨ+500. Ablatisque 500. vtrobique, inter 100℞—500. & 1ℨ. Ita autem radix Zensica eruetur. Semissis numeri radicum est 50. à cuius quadrato 2500. demptis 500. remanet numerus 2000. ad cuius radicem √ℨ 2000 si addatur prædicta semissis 50. fiet maior radix 50+√ℨ 2000. Et si eadem radix √ℨ 2000. ex prędicta semisse dematur, reliqua fiet minor radix, 50—√ℨ 2000. Est igitur maius latus 50+√ℨ 2000. minus autem 50—√ℨ 2000. quod etiam habebitur, si maius detrahatur ex 100. summa laterum, vt hic vides. quod probatur, quia duo latera 50+√ℨ 2000. & 50—√ℨ 2000. faciunt 100. & inter se multiplicata producunt aream 500. quæ multiplicatio fiet, vt cap. 23. traditum est, si 2000. quadratum posterioris particulæ subducatur ex 2500 quadrato particulæ prioris, vt apposita formula indicat.

100 + √ℨ 0
50 + √ℨ 2000
———————
50 — √ℨ 2000.

50 + √ℨ 2000
50 — √ℨ 2000
———————
500

XI. 11 *Est rectangulum, cuius diameter √ʒ 180. & maius latus ad minus proportionem habet triplam. Quæruntur latera, & area.*

PONATVR minus latus 1ϱ, & maius 3ϱ, quorum quadrata 1ʒ, & 9ʒ, faciunt summam 10ʒ, [a] æqualem quadrato diametri, hoc est, numero 180. Diuisis ergo 180. per 10. fiet 1ʒ 18. & 1ϱ √ʒ 18. latus minus. Maius ergo erit √ʒ 162. illius triplum. Area autem erit √ʒ 2916. id est, 54.

[a] 47. primi

XII. 12 *Est triangulum rectangulum, cuius vnum latus est √ʒ 18 + 3. Alterum autem latus, & basis simul faciunt √ʒ 162 + 9. Quæruntur singula latera.*

√ʒ 18 + 3<br>√ʒ 18 + 3<br>+ √ʒ 162 + 9<br>+ 18 + √ʒ 162<br>27 + √ʒ 648

PONATVR alterum latus incognitum 1ϱ, eritque propterea basis √ʒ 162 + 9 − 1ϱ. Quadrata laterum sunt 1ʒ, & 27 + √ʒ 648. [b] quæ simul æqualia sunt quadrato basis, nimirum numero 243 − 18ϱ + 1ʒ + √ʒ 52488 − √ʒ 648ʒ vt duæ propositæ formulæ

[b] 47. primi

√ʒ 162 + 9 − 1ϱ<br>√ʒ 162 + 9 − 1ϱ<br>− √ʒ 162ʒ − 9ϱ + 1ʒ<br>+ √ʒ 13122 + 81 − 9ϱ<br>+ 162 + √ʒ 13122 − √ʒ 162ʒ<br>+ 243 − 18ϱ + 1ʒ + √ʒ 52488 − √ʒ 648ʒ

multiplicationis quadratæ indicant. Si ergo vtrinque auferatur √ʒ 648. erit æquatio inter 1ʒ + 27. & 243 − 18
ϱ + 1ʒ + √ʒ 41472 − √ʒ 648ʒ. Nam si auferatur √ʒ 648. a √ʒ 52488 (quæ commensurabiles sunt, habentes
proportionem noncuplam, propterea quod, si √ʒ 52488. diuidatur per √ʒ 648. Quotiens fit √ʒ 81. id est, 9.)
reliqua fiet √ʒ 41472. Ablatoque 1ʒ. vtrinque, inter 27. & 243 − 18ϱ + √ʒ 41472 − √ʒ 648ʒ. Ablatisque rursum 27. vtrobique, inter 0. & 216 − 18ϱ + √ʒ 41472 − √ʒ 648ʒ. Et additis vtrobique 18ϱ & √ʒ 648ʒ. inter 18ϱ + √ʒ 648 hoc est, inter √ʒ 648ʒ + 18ϱ. & 216 + √ʒ 41472 Diuiso ergo hoc numero per illum, (abiectis signis Cossicis ϱ, & ʒ, ex diuisore, quia totum hoc aggregatum √ʒ 648ʒ + 18ϱ. est numerus radicum, quod in creatione numeri quadrati basis, numerus √ʒ 648ʒ. factus sit ex 1ϱ. in √ʒ 162. bis; ac propterea numerus √ʒ 648ʒ. censeri debeat pro numero radicum. Consule ea, quæ prope finem c. 26. scripsimus. Abijciuntur autem signa Cossica ϱ. & ʒ. ex diuisore. quemadmodum si æquatio sit inter 20 & 5ϱ. vt diuidantur 20. per 5 abijcitur signum ϱ. propterea quod 5ϱ. est numerus radicum; sicuti √ʒ 648ʒ + 18ϱ) proueniet æstimatio 1ϱ, nimirum alterius lateris trianguli, quod positum fuit 1ϱ.

VT autem hæc diuisio fiat, multiplicandus est tam diuisor √ʒ 648 + 18. quam numerus diuidendus per √ʒ 648 − 18. vt cap. 23. docuimus. Ita enim fiet nouus diuisor 324. & nouus diuidendus √ʒ 3359232 + 1296. quæ multiplicationes hic cernuntur.

√ʒ 648 + 18<br>√ʒ 648 − 18<br>324

216 + √ʒ 41472<br>√ʒ 648 − 18<br>− 3888 − √ʒ 13436928<br>+ √ʒ 30233088 + √ʒ 26873856<br>√ʒ 3359232 + 1296

IN priori multiplicatione aufertur quadratum 324. posterioris particulæ 18. ex 648. quadrato prioris particulæ, vt cap. 23. docuimus. In posteriori vero detraximus √ʒ 13436928. ex √ʒ 30233088. (quia commensurabiles sunt, habetque posterior numerus ad priorem proportionem sesquialteram, factusq; est residuus numerus √ʒ 3359232. Item ex √ʒ 26873856. id est, ex 5184. dempsimus 3888. factusque est totus productus √ʒ 3359232 + 1296.

Jam vero si diuidatur √ʒ 3359232. per 324. hoc est, per √ʒ 104976. fiet Quotiens √ʒ 32. Et diuisis 1296
per 324. fit Quotiens 4. Primum ergo 1ϱ. est √ʒ 32 + 4. atque tantum est alterum latus trianguli quæsitum,
quod posuimus esse 1ϱ. Basis vero angulo recto opposita, quam statuimus √ʒ 162 + 9 − 1ϱ. erit √ʒ 50 + 5
qui numerus relinquitur si radix inuenta √ʒ 32 + 4. detrahatur ex √ʒ 162 + 9. nimirum ex summa lateris quæsiti, ac basis. quod etiam patet, quia quadrata laterum simul sumpta faciunt 75 + √ʒ 5000. quadratum basis inuentæ √ʒ 50 + 5. Sunt enim duo illa quadrata 27 + √ʒ 648. & 48 + √ʒ 2048.

ALIVD exemplum facilius. Sit vnum latus 4. & summa alterius lateris cum base sit 8. Ponatur alterum
latus incognitum 1ϱ. ac proinde basis 8 − 1ϱ. Quadrata duorum laterum 16 & 1ʒ. [c] sunt simul sumpta æqualia quadrato basis, numero videlicet 64 − 16ϱ + 1ʒ. Ablato ergo 1ʒ. vtrinque, erit æquatio inter 16 & 64 − 16
ϱ. Additisque 16ϱ. vtrobique, inter 16 + 16ϱ. & 64. Ablatisque 16 vtrinque, inter 16ϱ. & 48. Diuisis ergo
48. per 16 fiet 1ϱ. 3. pro altero latere. Ac proinde basis 8 − 1ϱ. erit 5. quod probatur, cum quadrata laterum
16. & 9. æqualia sint quadrato 25. basis. Area vero trianguli erit 6. semissis nimirum numeri 12. producti ex vno
latere in aliud.

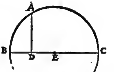
[c] 47. primi

13 Est

*Est circulus, cuius diameter 120. & ex quodam puncto circumferentiæ demissa perpendicularis ad diametrum est √ȝ(2925—√ȝ 405000.) Quæruntur partes diametri.*

PONATVR minor pars BD, 1.2℞. ideoque maior CD, 120——12℞. Et quia, ex scholio propos. 13. lib 6. Eucl. AD. est media proportionalis inter BD, CD; [a] erit rectangulum sub BD, CD, æquale quadrato ex AD. Fit autem ex BD, 12℞, in CD. 120—12℞. numerus 1202℞—1ȝ. Hic ergo æqualis est quadrato rectę AD nimirũ numero 2925—√ȝ405000. Addito ergo 1ȝ. vtrobiq;, erit æquatio inter 1202℞, & 1ȝ+2925—√ȝ405000. Ablatisq; 2925—√ȝ405000. vtrinq;, inter 1ȝ, & 1202℞—2925—√ȝ405000. Ex hoc ergo numero sic radicem quadratã eruemus. Semissis numeri radicum est 60. è cuius quadrato 3600. demptis 2925—√ȝ405000. remanet numerus 675+√ȝ405000. vt in hac formula vides. ad cuius radicem quadratam, quæ est √ȝ(675+√ȝ 405000) si addatur prædicta semissis 60. fit maior radix 60+√ȝ(675+√ȝ 405000) atque tanta est portio CD. Et si eadem √ȝ(675+√ȝ405000) detrahatur ex eadem semisse 60. remanebit minor radix 60——√ȝ(675+√ȝ405000) pro minore portione BD. quæ etiam habebitur, si ex tota diametro 120. detrahes portionem CD, nimirum 60+√ȝ(675+√ȝ405000) vt hic vides.

[a] 17. sexti.



| | | | |
|---|---|---|---|
| 3600 | + | √ȝ | 0 |
| 2925 | — | √ȝ | 405000 |
| 675 | + | √ȝ | 405000 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 120 | + | √ȝ | 0 |
| 60 | + | √ȝ | (675 + √ȝ 405000) |
| 60 | — | √ȝ | (675 + √ȝ 405000) |

IAM vero vt æstimationem vtriusque portionis 60+√ȝ(675+√ȝ405000) & 60—√ȝ(675+√ȝ405000) inuenias, eruenda est radix ex hoc Binomio 675+√ȝ405000. vt ad finem cap. 28. docuimus. hoc videlicet modo. Diuidatur maior particula 675. in duas partes per Lemma cap. 28. quæ inter se multiplicatæ producant quartam partem quadrati minoris particulæ √ȝ 405000. quod ita fiet. Semissis numeri diuidendi 675. est 675/2. ex cuius quadrato 455625/4. detracta quarta parte quadrati minoris particulæ, quæ est 405000/4. remanet numerus 50625/4. cuius radix quadrata 225/2. addita semissi prędictę 675/2. facit 900/2. hoc est, 450 maiorem partem: Et eadem radix 225/2. dempta ex eadem semisse 675/2. relinquit 450/2. hoc est, 225. minorem partem. Atque hæ duæ partes 450. 225. inter se multiplicatæ producunt 101250. quartam partem quadrati 405000. minoris particulæ √ȝ 405000. Radices autem partium 225. & 450. copulatæ per signum +, hoc modo. √ȝ225+√ȝ450. hoc est, 15+√ȝ450. dabunt radicem Binomij 675+√ȝ405000. ad quam radicem si addatur numerus 60. semissis nimirum numeri radicum, fiet maior radix 75+√ȝ450. pro maiore portione CD. Et si ex eadem semisse 60. dematur eadẽ radix, remanebit minor portio BD, 45—√ȝ450. vt prior hæc formula monstrat. quę etiam habebitur, si maior portio 75+√ȝ450. subtrahatur ex tota diametro 120. vt secunda hæc formula indicat. Vides ergo, quam laboriosa fuerit extractio radicis ex hoc numero Cossico, 1202℞——2925——√ȝ405000. quæ difficultas orta est ex numero irrationali composito (——2925——√ȝ405000.) Quare proponemus aliud exemplum facilius in materia Sinuum:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 60 | + | √ȝ | 0 |
| 15 | + | √ȝ | 450 |
| 45 | — | √ȝ | 450 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 120 | + | √ȝ | 0 |
| 75 | + | √ȝ | 450 |
| 45 | — | √ȝ | 450 |

SIT igitur in eadem figura diameter BC, 2000. vt sinus totus sit 1000 Et AD, sit sinus grad 20. nimirum 342. Quæruntur sinus versi arcuum AB, AC, & sinus complementi DE. Pro BD, ponatur 12℞, eritque propterea CD, 2000——12℞. Et quoniam AD. est media proportionalis inter BD, CD, ex scholio propos. 13. lib. 6. Eucl. [b] erit numerus 20002℞——1ȝ factus ex BD, in CD, æqualis quadrato ex AD, nimirum numero 116964. Additoque 1ȝ. vtrinque, erit æquatio inter 20002℞ & 1ȝ+116964. Ablatisque 116964. vtrobique, inter 1ȝ. & 20002℞——116964.

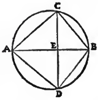
[b] 17. sexti.

IAM sic. Semissis numeri radicum est 1000. è cuius quadrato 1000000. demptis 116964. remanet numerus 883036. ad cuius radicem quadratam √ȝ 883036. si prædicta semissis 1000. addatur fiet maior radix 1000+√ȝ883036. pro maiori portione CD. Et si eadem radix ex eadem semisse 1000. dematur, reliqua fiet minor radix 1000——√ȝ883036. pro minori parte BD. quæ etiam habebitur, si maior portio ex tota diametro 2000. subtrahatur, vt in hac formula vides. Itaque si omnia hæc in numeris absolutis desiderentur, cum numeri 883036. maior radix sit 940. & minor 939. erit CD, 1940. maior quam vera, & 1939. minor quam vera. Item BD, erit 60. minor quam vera, & 61. maior, quam vera. Quod si auferatur semidiameter CE, 1000. ex 1940. relinquetur sinus complementi 940. maior, quam verus, & 939. minor, quam verus, &c.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2000 | + | √ȝ | 0 |
| 1000 | + | √ȝ | 883036 |
| 1000 | — | √ȝ | 883036 |

INVENTIS porro segmentis BD, CD. si ducantur rectæ AB, AC, inuenientur ipsæ chordæ. ex propos. 47. lib. 1. Eucl. cum triangula fiant rectangula ABD, ACD, &c. In priori exemplo reperietur chorda AB, √ȝ(5400——√ȝ6480000) & chorda AC, √ȝ(9000+√ȝ6480000) &c.

XIIII. 14 *Est circulus, cuius diameter diuiditur per lineam perpendicularem ad diametrum extrema ac media ratione, & vna è duabus chordis minoribus est 150 — √ʒ 4500. Quæstio est, quanta sit diameter, & quantæ eius portiones, & reliquæ lineæ.*




PONATVR EB, minor pars diametri AB, 1℞. Et quia AB, secta est in E, extrema ac media ratione, estque maius segmentum AE, erit AE, media proportionalis inter AB, & EB: [a] Est autem & BC, media proportionalis inter easdem AB, EB. Igitur AE, BC, æquales sunt. Ponitur autem BC. 150 — √ʒ 4500. Igitur & AE, est 150 — √ʒ 4500. [b] Cum ergo CE, sit media proportionalis inter AE, EB; [c] erit numerus 150℞ — √ʒ 4500ʒ. factus ex AE, in EB, æqualis quadrato ex CE; ideoque recta CE, erit √ʒ (150℞ — √ʒ 4500ʒ.) Est autem eadem CE, √ʒ (27000 — √ʒ 405000000 — 1ʒ) propterea quod 1ʒ, quadratum rectæ EB, demptum ex 27000 — √ʒ 405000000 quadrato rectæ BC, [d] reliquum facit 27000 — √ʒ 405000000 — 1ʒ. quadratum rectæ CE. Igitur æqualia sunt duo quadrata 150℞ — √ʒ 4500ʒ. & 27000 — √ʒ 405000000 — 1ʒ. quippe cum vtrumque quadrato rectæ CE, ostensum sit æquale. Addito ergo 1ʒ. vtrinque, erit æquatio inter 1ʒ + 150℞ — √ʒ 4500ʒ. & 27000 — √ʒ 405000000. Et ablatis 150℞ — √ʒ 4500ʒ. vt: obique, inter 1ʒ. & 27000 — √ʒ 405000000 — 150℞ — √ʒ 4500ʒ. Ex hoc numero Cossico ita eliciemus pretium 1℞. Totus numerus est instar numeri Cossici diminuti, cuius portio 27000 — √ʒ 405000000. pro numero absoluto habetur, & altera portio — 150℞ — √ʒ 4500ʒ. pro numero radicum. Nam √ʒ 4500ʒ. est etiam numerus radicum, vt in ænigmate 12. diximus, & ad finem cap 26 docuimus. Itaque dimidium numeri radicum erit — 75 — √ʒ 1125. ad cuius quadratum 6750 — √ʒ 25312500. si addantur 27000 — √ʒ 405000000. fit numerus 33750 — √ʒ 632812500. à cuius radice quadrata auferenda est semissis numeri radicum, quæ fuit — 75 — √ʒ 1125. vt habeatur valor 1℞.

ITA autem ex Residuo hoc 33750 — √ʒ 632812500. radicem quadratam eruemus. Secetur maius nomen 33750. in duas partes, quæ inter se multiplicatæ producant quartam partem quadrati nominis minoris, quæ quarta pars est 158203125. quod ita fiet, iuxta doctrinam Lemmatis cap. 28. Ex 284765625. quadrato semissis maioris nominis 33750. detrahatur dicta quarta pars 158203125. Et reliqui numeri 126562500. radix quadrata 11250. addatur, & detrahatur ex 16875. semisse numeri 33750. Nam numeri producti 28125. & 5625. erunt partes quæsitæ, quæ inter se multiplicatæ faciunt 158203125. Atque hæ partes copulatæ per signum — dabunt radicem propositi Residui, præposito tamen signo √ʒ. vtrique parti, hoc modo √ʒ 28125 — √ʒ 5625. vt ad finem cap. 28. tradidimus: hoc est, √ʒ 28125 — 75. Ab hac radice detrahendum est dimidium numeri radicum 75 — √ʒ 1125. propter signum — quo numerus radicum afficiebatur. Fietque numerus reliquus √ʒ 40500 — 150. pro pretio 1℞, hoc est, pro linea EB. Cum ergo AE, ipsi CB, æqualis, sit 150 — √ʒ 4500. erit tota diameter √ʒ 18000. quia √ʒ 40500. & √ʒ 4500. commensurabiles sunt, habentes proportionem triplam, & minore ex maiore subducta, relinquitur √ʒ 18000. At CE, erit (√ʒ 162000000 — 3600) numerus videlicet factus ex AE, in EB. Denique AC, erit √ʒ (√ʒ 405000000 — 9000) cum eius quadratum æquale sit duobus quadratis rectarum AE, CE. Et quia AC, æqualis est AD, & CE, ipsi ED, cognitæ erunt omnes lineæ huius figuræ. Atque ita vides duo quadrata rectarum AC, BC, nimirum √ʒ 405000000 — 9000. & 27000 —
[e] 31. tertij. √ʒ 405000000. facere 18000. quadratum diametri AB, vt vult propos. 47. lib. 1. Eucl. [e] cum angulus ACB, in semicirculo sit rectus.

ALITER. Quoniam maius segmentum AE, æquale ipsi CB, est 150 — √ʒ 4500. si ponatur EB, 1℞. erit tota diameter AB, 150 — √ʒ 4500 + 1℞. Atque ita quadrato maioris segmenti AE, 27000 — √ʒ 405000000. æqualis erit numerus 150℞ — √ʒ 4500ʒ + 1ʒ. factus ex EB, id est, ex 1℞. in totam AB, id est, in 150 — √ʒ 4500 + 1℞ Et transpositis particulis huius æquationis, vt supra reperietur iterum æquatio inter 1ʒ. & 27000 — √ʒ 405000000 — 150℞ + √ʒ 4500ʒ, &c.

ALITER. Ponatur tota diameter AB, 1℞, eritque minus segmentum EB, 1℞ — 150 — √ʒ 4500.
[f] 17. sexti. Atque [f] ita numerus 1ʒ — 150℞ — √ʒ 4500ʒ. factus ex 1℞, id est, ex AB, in 1℞ — 150 — √ʒ 4500. id est, in EB, æqualis erit quadrato 27000 — √ʒ 405000000. rectæ AE. Et additis vtrobique 150℞ — √ʒ 4500ʒ æquatio erit inter 1ʒ & 27000 — √ʒ 405000000 + 150℞ — √ʒ 4500ʒ. Ex hoc ergo numero Cossico ita radicem extrahemus. Totus numerus intelligatur compositus ex duabus particulis, quarũ prior 27000 — √ʒ 405000000. est instar numeri absoluti, & posterior + 150℞ — √ʒ 4500ʒ. instar numeri radicum. Dimidium numeri radicum est 75 — √ʒ 1125. ad cuius quadratum 6750 — √ʒ 25312500. si addantur 27000 — √ʒ 405000000. fit numerus 33750 — √ʒ 632812500. ad cuius radicem quadratam √ʒ 28125 — 75. (quæ inuenietur, vt supra) si addatur semissis numeri radicum 75 — √ʒ 1125. fiet 1℞ √ʒ 18000. pro diametro AB, quantam videlicet supra inuenimus, &c.

XV. 15 *Est quadratum, cuius latus est 7. Quæritur diameter.*

[g] schol. 47. primi. QVADRATVM lateris est 49. [g] cuius duplum est quadratum diametri. Igitur quadratum diametri erit 98. & ipsa diameter √ʒ 98.

Marginal notes: [a] coroll. 8. sexti. [b] coroll. 8. sexti. [c] 17. sexti [d] 47. prim.

16 *Est quadratum, cuius diameter est √ʒ 98. Quæritur latus.* XVI.

[a] QVONIAM quadratum diametri duplum est quadrati lateris: estque quadratum diametri 98. erit quadratum lateris 49. & latus ipsum √ʒ 49. hoc est, 7. [a] schol. 47. primi.

17 *Quadratum, cuius diameter & latus faciunt summam 6. Quæruntur diameter ac latus.* XVII.

PONATVR latus 1℞. ac proinde diameter 6 — 1℞. [b] Et quia quadratum diametri duplum est quadrati lateris: Estque quadratum lateris 1ʒ. & quadratum diametri 36 — 12℞ + 1ʒ. erit æquatio inter 2ʒ, & 36 — 12℞ + 1ʒ. Ablatoque 1ʒ. vtrinque, inter 1ʒ. & 36. — 12℞. [b] schol. 47. primi.

Iam sic. Semissis numeri radicum est 6. ad cuius quadratum 36. si addantur 36. fit numerus 72. à cuius radice √ʒ 72. si prædicta semissis 6. dematur, reliqua fiet æstimatio 1℞. √ʒ 72 — 6. atque tantum erit latus. quod demptum ex 6. reliquam faciet diametrum 12 — √ʒ 72. vt in hac formula vides.

| | | | |
|---|---|---|---|
| √ʒ | 0 | + | 6 |
| √ʒ | 72 | — | 6 |
| 12 | — | √ʒ | 72 |

quod probatur. quia quadratum diametri 216 — √ʒ 41472. duplum est quadrati lateris 108 — √ʒ 10368. Et diameter ac latus faciunt summam 6.

18 *Est quadratum, cuius latus ductum in diametrum facit 10. Quæruntur latus ac diameter.* XVIII.

PONATVR latus 1℞. ideoque diameter 10/1℞. Nam ex 1℞ in 10/1℞ fiunt 10. qui numerus 10/1℞ est Quotiens, si 10. per 1℞. diuidantur. Ita enim Quotiens ductus in diuisorem 1℞. producit numerum diuisum 10. Et [c] quia quadratum diametri duplum est quadrati lateris: estque quadratum lateris 1ʒ. & quadratum diametri 100/1ʒ. erit æqualitas inter 2ʒ. & 100/1ʒ. quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 2ʒʒ. & 100. Diuisis ergo 100. per 2. fiet 1ʒʒ. 50. & 1℞ √ʒʒ 50. pro latere. Quia vero diameter posita fuit 10/1℞. hoc est, 10 diuisa per 1℞ si diuidantur 10. per √ʒʒ 50. nimirum per pretium 1℞. fiet Quotiens √ʒʒ 200. pro diametro. quod probatur. Nam ex latere √ʒʒ 50. in diametrum √ʒʒ 200. fit numerus √ʒʒ 10000. id est, 10. Et √ʒʒ 40000 quadratum diametri duplum est quadrati lateris √ʒʒ 2500. [c] schol. 47. primi.

19 *Est quadratum, cuius diameter superat latus numero 3. Quæruntur latus, ac diameter.* XIX.

PONATVR latus 1℞. ideoque diameter 1℞ + 3. [d] Et quia quadratum diametri duplum est quadrati lateris: estque quadratum lateris 1ʒ. & quadratum diametri 1ʒ + 6℞ + 9. erit æquatio inter 2ʒ. & 1ʒ + 6℞ + 9. Ablatoque 1ʒ. vtrinque, inter 1ʒ. & 6℞ + 9. Semissis numeri radicum est 3. ad cuius quadratum 9. additis 9. fit numerus 18. ad cuius radicem √ʒ 18. si addatur prædicta semissis 3. fiet 1℞. √ʒ 18 + 3. pro latere. Diameter autem erit √ʒ 18 + 6. quod probatur. quia quadratum diametri 54 + √ʒ 2592. duplum est quadrati lateris 27 + √ʒ 648. Et diameter latus superat numero 3. [d] schol. 47. primi.

20 *Est quadratum, cuius latus ductum in differentiam inter diametrum & latus facit 15. Quæruntur diameter ac latus.* XX.

PONATVR latus 1℞. ac propterea differentia inter diametrum ac latus 15/1℞. quæ habetur ex diuisione 15. per 1℞. vt nimirum Quotiens ductus in diuisorem 1℞. producat numerum diuisum 15. Quia ergo diameter excedit latus hac differentia, erit diameter 1℞ + 15/1℞. [e] Quoniam autem quadratum diametri duplum est quadrati lateris: estque quadratum lateris 1ʒ. & quadratum diametri (1ʒʒ + 30ʒ + 225)/1ʒ. erit æquatio inter 2ʒ & (1ʒʒ + 30ʒ + 225)/1ʒ quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 2ʒʒ. & 1ʒʒ + 30ʒ + 225. Ablato ergo 1ʒʒ vtrinque, erit æquatio inter 1ʒʒ. & 30ʒ + 225. Ex hoc numero radicem Zensizensicam sic eruemus. Semissis numeri Zensorum est 15. ad cuius quadratum 225. additis 225. fit numerus 450. ad cuius radicem quadratam √ʒ 450. si addatur prædicta semissis 15. fiet 1ʒ. √ʒ 450 + 15. & 1℞ √ʒ (√ʒ 450 + 15) vt ad finem cap. 12. traditum est, atque tantum est latus: cuius quadrati √ʒ 450 + 15. duplum dabit quadratum diametri √ʒ 1800 + 30. ac proinde diameter erit √ʒ (√ʒ 1800 + 30) quod probatur. Nam si latus ex diametro subtrahatur, remanebit differentia √ʒ (√ʒ 1800 + 30) — √ʒ (√ʒ 450 + 15) quæ ducta in latus √ʒ (ʒʒ 450 + 15) producit numerum 15. Consule caput 24. vbi hæc multiplicatio expresse habetur. [e] schol. 47. primi.

21 *Est rectangulum cuius area est 30. & proportio laterum sesquialtera. Quæruntur latera, & diameter.* XXI.

PONATVR minus latus 2℞. ideoque maius 3℞. sesquialterum ad illud. Ex multiplicatione laterum inter se, fit numerus 6ʒ. area rectanguli, æqualis areæ datæ 30. Diuisis igitur 30. per 6. fiet 1ʒ 5. & 1℞ √ʒ 5. Et quia minus latus posuimus esse 2℞ erit minus latus √ʒ 20 numerus videlicet duplus radicis, numeri scilicet √ʒ 5. Cum ergo maius latus positum sit 3℞. erit maius latus √ʒ 45. numerus scilicet triplus vnius radicis, quæ fuit √ʒ 5. [f] Quia vero quadrata laterum 20. & 45. simul æqualia sunt quadrato diametri, erit quadratum diametri 65. & ipsa diameter √ʒ 65 quod probatur. quia ex latere √ʒ 20. in latus √ʒ 45. fit numerus √ʒ 900. hoc est 30, quantam videlicet posuimus aream rectanguli. [f] schol. 47. primi.

XXII. 22 *Est rectangulum, cuius area 80. & differentia laterum 2. Quæruntur latera, ac diameter.*

PONATVR minus latus 1℞. ideoque maius 1℞ + 2. Hæc latera inter se multiplicata faciunt aream 1ʒ + 2℞. æqualem areæ datæ 80. Ablatis igitur 2℞. vtrobique, erit æqualitas inter 1ʒ. & 80 — 2℞. Semissis numeri radicum est 1. ad cuius quadratum 1. additis 80. fit numerus 81. à cuius radice 9 si prædicta semissis 1. dematur, reliqua fiet æstimatio 1℞. 8. pro minore latere: Maius ergo erit 10. excedens illud binario. Ex latere 8. in latus 10. fit area proposita 80. Duo vero quadrati laterum 64. & 100. æqualia sunt quadrato diametri, ac propterea quadratum diametri erit 164. ipsaque diameter √ʒ 164.

XXIII. 23 *Est rectangulum, cuius area 80. & summa duorum laterum 20. Quæruntur latera, & diameter.*

PONATVR vnum latus 1℞. ideoque alterum 20 — 1℞. Hæc inter se multiplicata faciunt aream 20℞ — 1ʒ. æqualem areæ datæ 80. Addito ergo 1ʒ vtrobique, erit æquatio inter 1ʒ + 80. & 20℞. Ablatisque 80. vtrinque, inter 1ʒ & 20℞ — 80. Semissis numeri radicum est 10. à cuius quadrato 100. demptis 80. remanet numerus 20. ad cuius radicem √ʒ 20. addita prædicta semisse 10. fiet 1℞. √ʒ 20 + 10. maior pro vno latere. Atque eadem radix √ʒ 20. dempta ex prædicta semisse 10. reliquam faciet minorem radicem 10 — √ʒ 20 quæ etiam habebitur, si latus inuentum √ʒ 20 + 10. detrahatur ex 20. summa laterum, vt hic vides. Latera inuenta 10 + √ʒ 20. & 10 — √ʒ 20. inter se multiplicata producunt aream 80. propositam. quæ multiplicatio facile fiet, si (per doctrinam cap. 23. 20. quadratum particulæ posterioris detrahatur ex 100. quadrato particulæ maioris, vt in secunda hac formula vides. Iam quadrata laterum 120 + √ʒ 8000. & 120 — √ʒ 8000. [a] æqualia sunt quadrato diametri: ideoque quadratum diametri erit 240 & ipsa diameter √ʒ 240.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| √ʒ | 0 | + | 20 |
| √ʒ | 20 | + | 10 |
| — √ʒ | 20 | + | 10 |

[a] 47 primi

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 10 | + | √ʒ | 20 |
| 10 | — | √ʒ | 20 |
|   | 80 |   |   |

XXIIII. 24 *Est rectangulum, cuius diameter 30. & summa laterum 42. Quæruntur latera, & area.*

PONATVR vnum latus 1℞. ac proinde alterum 42 — 1℞. Horum quadrata 1ʒ. & 1764 — 84℞ + 1ʒ. [b] æqualia sunt quadrato diametri: atque idcirco æquatio erit inter 2ʒ + 1764 — 84℞. & 900. Et additis 84℞. vtrobique, inter 84℞ + 900. & 2ʒ + 1764. Ablatisque 900. vtrinque, inter 84℞. & 2ʒ + 864. Et rursum ablatis 864. vtrinque, inter 2ʒ. & 84℞ — 864. Diuisisque omnibus per 2. inter 1ʒ. & 42℞ — 432. Semissis numeri radicum est 21. à cuius quadrato 441. demptis 432. remanet numerus 9. ad cuius radicem 3. addita prædicta semisse 21. fiet radix maior 24. pro latere maiore: Eademque radix 3. dempta ex prædicta semisse 21. relinquit minorem radicem 18. pro minore latere. quod etiam habebitur, si latus maius inuentum 24. subtrahatur ex 42. summa laterum. Iam ex 24. in 18. fit area 432. Vbi etiam vides quadrata laterum 576. & 324. efficere 900. quadratum diametri propositæ 30.

[b] 47. primi

XXV. 25 *Est rectangulum, cuius area cum diametro facit 15. & differentia laterum est √ʒ 5. Quæruntur latera, diameter, & area.*

PONATVR minus latus 1℞ — √ʒ 1$\frac{1}{4}$. (qui numerus √ʒ 1$\frac{1}{4}$. est semissis datæ differentiæ √ʒ 5.) & maius 1℞ + √ʒ 1$\frac{1}{4}$. Ita enim hoc excedet illud differentia √ʒ 5. cum minus à maiore subductum relinquat √ʒ 5. vt in hac formula vides. Nam √ʒ 1$\frac{1}{4}$. & √ʒ 1$\frac{1}{4}$. debent addi, propter diuersa signa + & —. quæ additio fit, si √ʒ 1$\frac{1}{4}$. duplicetur, & duplato numero √ʒ $\frac{10}{4}$. hoc est, √ʒ 5, superioris numeri signum + intelligatur præpositum, vt cap. 4. diximus. Ex latere 1℞ — √ʒ 1$\frac{1}{4}$. in latus 1℞ + √ʒ 1$\frac{1}{4}$. fit area 1ʒ — 1$\frac{1}{4}$. Et quia area cum diametro facit 15. Si ex hac summa detrahatur dicta area 1ʒ — 1$\frac{1}{4}$. remanebit diameter 16$\frac{1}{4}$ — 1ʒ, cuius quadratum erit 1ʒʒ + 264$\frac{1}{16}$ — 32$\frac{1}{2}$ʒ. quod serua.

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | ℞ | + | √ʒ | 1$\frac{1}{4}$ |
| 1 | ℞ | — | √ʒ | 1$\frac{1}{4}$ |
|   |   | √ʒ 5 |   |   |

Quia vero quadratum lateris minoris 1℞ — √ʒ 1$\frac{1}{4}$. est 1ʒ — √ʒ 5ʒ + 1$\frac{1}{4}$. Et quadratum lateris maioris 1℞ + √ʒ 1$\frac{1}{4}$. est 1ʒ + √ʒ 5ʒ + 1$\frac{1}{4}$. quæ duo quadrata conficiunt 2ʒ + 2$\frac{1}{2}$. [c] qui numerus æqualis erit quadrato diametri supra seruato, numero videlicet, 1ʒʒ + 264$\frac{1}{16}$ — 32$\frac{1}{2}$ʒ Additis ergo 32$\frac{1}{2}$ʒ. vtrinq; erit æqualitas inter 34$\frac{1}{2}$ʒ + 2$\frac{1}{2}$. & 1ʒʒ + 264$\frac{1}{16}$. Et ablatis 2$\frac{1}{2}$. vtrobique, inter 34$\frac{1}{2}$ʒ. & 1ʒʒ + 261$\frac{9}{16}$. Et rursum ablatis 261$\frac{9}{16}$. vtrinque, inter 34$\frac{1}{2}$ʒ — 261$\frac{9}{16}$. & 1ʒʒ. Iam sic. Semissis numeri Zensorum est 17$\frac{1}{4}$. à cuius quadrato 297$\frac{9}{16}$. demptis 261$\frac{9}{16}$. remanet numerus 36. cuius radix 6. dempta ex prædicta semisse 17$\frac{1}{4}$. relinquit minorem

[c] 47. primi

Zensum

Zensum $11\frac{1}{4}$. & minorem radicem √ℨ $11\frac{1}{4}$. Ergo minus latus positum 1ℛ — √ℨ $\frac{5}{4}$. erit √ℨ $11\frac{1}{4}$ — √ℨ $\frac{5}{4}$. Maius vero, quod posuimus 1ℛ + √ℨ $\frac{5}{4}$ erit √ℨ $11\frac{1}{4}$ + √ℨ $\frac{5}{4}$. quæ duo latera se mutuo excedunt numero √ℨ 5. vt in hac formula subtractionis videre licet, id est, √ℨ 5. Atque eadem duo latera inter se multiplicata faciunt 10. pro area, vt hic vides. Nam + √ℨ $\frac{225}{16}$. & — √ℨ $\frac{225}{16}$. se mutuo tollunt, & $\frac{45}{4}$ — $\frac{5}{4}$. faciunt $\frac{40}{4}$. hoc est, 10.

| | | | |
|---|---|---|---|
| √ℨ $11\frac{1}{4}$ | + | √ℨ | $\frac{5}{4}$ |
| √ℨ $11\frac{1}{4}$ | — | √ℨ | $\frac{5}{4}$ |
| 0 | + | √ℨ | $\frac{20}{4}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| √ℨ $\frac{45}{4}$ | — | √ℨ | $\frac{5}{4}$ |
| √ℨ $\frac{45}{4}$ | + | √ℨ | $\frac{5}{4}$ |
| | + √ℨ $\frac{225}{16}$ | — | $\frac{5}{4}$ |
| $\frac{45}{4}$ | — √ℨ $\frac{225}{16}$ | | |
| $\frac{40}{4}$ id est, 10 | | | |

DEINDE quadrata laterum sunt $\frac{50}{4}$ — √ℨ $\frac{900}{4}$. & $\frac{50}{4}$ + √ℨ $\frac{900}{4}$. quæ summam faciunt 25. [a] æqualem quadrato diametri (quia — √ℨ $\frac{900}{4}$. & + √ℨ $\frac{900}{4}$. se mutuo tollunt, & ex $\frac{50}{4}$ & $\frac{50}{4}$. fiunt $\frac{100}{4}$. id est, 25.) Quare √ℨ 25. nimirum 5. erit diameter, quæ cum area inuenta 10. facit summam 15. propositam. [a] 47.pri.

QVAMVIS autem numerus Cossicus $34\frac{1}{2}$ℨ — $261\frac{9}{16}$. habeat duplicem radicem, vt cap. 12. ostendimus: tamen cum maiore radice, quæ est √ℨ $23\frac{1}{4}$. (quæq; reperitur, si radix 6. supra inuenta addatur ad prædictam semissem $17\frac{1}{4}$. Numerus enim conflatus $23\frac{1}{4}$. erit maior Zensus, & √ℨ $23\frac{1}{4}$. maior radix) hic nihil efficies. quia latera essent √ℨ $23\frac{1}{4}$ — √ℨ $\frac{5}{4}$. & √ℨ $23\frac{1}{4}$ + √ℨ $\frac{5}{4}$. quæ inter se multiplicata facient maiorem aream, quam 10. inuenieturque maior diameter, quam 5. Quare summa ex area, & diametro conflata maior erit summa proposita 15. Vides ergo hic mirum quid, non posse videlicet semper assumi vtramque radicem æquationis. quod quidem raro contingit. Itaque si examen institutum per alteram radicum non respondet ænigmati, assumenda est altera radix. Vt in proposito ænigmate, quia examen per radicem maiorem non succedit, propterea minor radix assumpta est.

ALIVD exemplum simile. Sit differentia laterum 2. & area cum diametro facit 58. Quæruntur rursum latera, diameter, & area.

PONATVR minus latus 1ℛ — 1. (Est autem 1. semissis differentiæ laterum) & maius 1ℛ + 1. Ita enim hoc excedet illud binario, cum minus à maiore sublatum relinquat 2. vt hic vides. Quadrata laterum sunt 1ℨ — 2ℛ + 1. & 1ℨ + 2ℛ + 1. quæ faciunt summam 2ℨ + 2. [b] æqualem quadrato diametri. Ex 1ℛ — 1. in 1ℛ + 1. fit area 1ℨ — 1. quæ cum diametro debet facere 58. Si ergo ex 58. dicta area detrahatur, reliqua fiet diameter 59 — 1ℨ. cuius quadratum est 1ℨℨ + 3481 — 118ℨ. Et quia paulo ante idem quadratum inuentum est 2ℨ + 2. erunt duo hæc quadrata inter se æqualia. Additis ergo 118ℨ vtrobique, erit æquatio inter 1ℨℨ + 3481. & 120ℨ + 2. Ablatisque 2 vtrinque, inter 1ℨℨ + 3479. & 120ℨ, & rursum ablatis 3479 vtrobique, inter 1ℨℨ, & 120ℨ — 3479. Semissis numeri Zensorum est 60. à cuius quadrato 3600. detractis 3479. remanet numerus 121. cuius radix 11. detracta à prædicta semisse 60. relinquit 49. minorem Zensum: ac proinde minor radix erit 7. Cum ergo minus latus positum sit 1ℛ — 1. & maius 1ℛ + 1. erit illud 6. & hoc 8. quorum differentia est 2. Ex 6 in 8 fit area 48. quæ cum diametro facere debet 58. Detractis igitur 48 ex 58 reliqua fiet diameter 10. quæ etiam reperietur, si laterum quadrata 36 & 64 in vnam summam 100 colligantur, [c] quę æqualis erit quadrato diametri, ideoque diameter erit √ℨ 100, id est, 10. [b] 47.pri. [c] 47.pri.

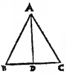
| | | | |
|---|---|---|---|
| 1ℛ | + | 1 | |
| 1ℛ | — | 1 | |
| 0 | + | 2 | |

HIC etiam cum maiore radice, quę est √ℨ 71. (quia superior radix 11. addita ad prędictam semissem 60 facit 71. maiorem Zensum, maior propterea radix erit √ℨ 71) nihil efficies. nam latera erunt √ℨ 71 — 1. & √ℨ 71 + 1, maiora quam 6 & 8. ideoque maiorem aream continebunt, quam 48. atque eorum quadrata maius quadratum diametri constituent, quam 100. ac proinde diameter maior erit quam 10. atque idcirco area cum diametro maiorem summam conficiet, quam 58. Vbi etiam vides, non posse semper assumi vtramque radicem ad problematis solutionem, vt paulo ante diximus.

26 *Est rectangulum, cuius vnum latus est 6. & quod fit ex altero latere in diametrum est 80. Quæruntur alterum latus, ac diameter, vna cum area.* XXVI.

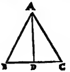
PONATVR alterum latus 1ℛ. Quadrata laterum 6. & 1ℛ, sunt 36 & 1ℨ, [d] quorum summa 1ℨ + 36. æqualis erit quadrato diametri. Et quia ex latere incognito in diametrum fit numerus 80. si 80 diuidantur per 1ℛ latus ignotum, fiet Quotiens $\frac{80}{1ℛ}$. ac tanta erit diameter: quippe cum ex Quotiente hoc $\frac{80}{1ℛ}$ in 1ℛ, diuisorem producatur numerus diuisus 80. ideoque quadratum diametri erit $\frac{6400}{1ℨ}$ æquale priori quadrato eiusdem diametri inuento 1ℨ + 36. Hęc æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 1ℨℨ + 36ℨ, & 6400. Ablatis ergo 36ℨ vtrobique, erit æquatio inter 1ℨℨ, & 6400 — 36ℨ. Semissis numeri Zensorum est 18, ad cuius quadratum 324. additis 6400. fit numerus 6724. à cuius radice 82. si prędicta semissis 18. tollatur, relinquetur pretium 1ℨ. 64. Ergo 1ℛ erit 8 latus quæsitum. Nam ex latere 6. in latus 8. fit area 48. Et quadrata laterum 36. & 64. faciunt quadratum diametri 100. ideoque diameter erit 10. Vbi vides, ex latere 8. inuento in diametrum 10 fieri 80. [d] 47.pri.

27 *Est triangulum æquilaterum ABC, cuius area 60. Quæruntur latus BC, ac perpendicularis AD.*




[e] QVONIAM AD, secat BC, bifariam, ponatur BD, 1ℛ, & quodlibet laterum 2ℛ, eritque quadratum BD, 1ℨ, & quadratum lateris AB, 4ℨ. [f] Cum ergo duo quadrata BD, AD, æqualia sunt quadrato AB, erit quadratum AD, 3ℨ, & ipsa AD, √ℨ 3ℨ. Ex BD, 1ℛ, in AD √ℨ 3ℨ. fit area trianguli ABC, vt cap. 2. [e] schol. 26. primi. [f] 47.pri.

lib.4. Geom.Pract.demonstrauimus,nimirum √ʒ 3ʒʒ, vt hic apparet: quia 1℞. quadranda est, & quadrato 1ʒ. preponendum signum √ʒ. atque ita √ʒ 3. ʒ. multiplicanda in √ʒ 1ʒ. vt ad finem cap.26.scripsimus. Et quia area posita est 60.erit æquatio inter 60. & √ʒʒ3ʒʒ. ideoq; & inter eorũ quadrata 3600. & 3ʒʒ. Diuisis ergo 3600. per 3. fiet 1ʒʒ. 1200. & √ʒʒ 1200 erit pretiũ 1℞, hoc est, lineę B D, ac proinde totum latus B C, erit √ʒʒ 19200. nimirum duplum √ʒʒ 1200. Vt enim dupletur √ʒʒ 1200. ducenda est per Zensizensum binarij, nimirum per 16. Quoniam autem area 60. producitur ex BD, √ʒʒ 1200. in A D, si 60. hoc est, radix √ʒʒ 12960000. diuidatur per √ʒʒ 1200. fiet Quotiens √ʒʒ 10800. pro perpendiculari AD. quod probatur. Nam ex √ʒʒ 1200. in √ʒʒ 10800. fit √ʒʒ 12960000. hoc est, 60. area proposita.




√ʒ 3 ʒ
1 2℞
√ʒ 3 ʒʒ

ALIVD exemplum. Sit area trianguli √ʒ 243. Positis iisdem, inuenietur æqualitas inter √ʒ 243 & √ʒ 3ʒʒ. ac proinde & inter eorum quadrata 243. & 3ʒʒ. Diuisis ergo 243. per 3. fiet 1ʒʒ. 81. cuius √ʒʒ, est 3. quantitas lineæ BD, ac proinde totum latus BC, erit 6. Quod si diuidatur area √ʒ 243 per B D, quę est 3. hoc est, per √ʒ 9. fiet Quotiens √ʒ 27. pro perpendiculari AD. quod probatur. quia ex B D, 3. id est, ex √ʒ 9. in AD, √ʒ 27. fit √ʒ 243. area proposita.

XXVIII. 28 *Est triangulum æquilaterum A B C, cuius perpendicularis A D, est 6. Quæruntur latus B C, & area.*

PONATVR BD, 1℞, inuenieturque A D, √ʒ 3ʒ. vt in pręcedenti ænigmate. Et quia eadem AD, posita est 6. erit æquatio inter 6. & √ʒ 3ʒ. Si ergo diuidantur 6. per √ʒ 3. numerum maioris characteris ʒ. fiet 1℞. √ʒ 12. pro recta BD. quia vt ad finem cap.26 diximus numerus √ʒ 3ʒ, est numerus radicum, & non Zensorum.

Vel sic. Quoniam æquatio est inter 6. & √ʒ 3ʒ, erit quoque æquatio inter eorum quadrata 36. & 3ʒ. Diuisis ergo 36 per 3. fiet 1ʒ. 12. & 1℞. √ʒ 12. pro linea BD. Atque idcirco totum latus B C, erit √ʒ 48. duplum videlicet √ʒ 12. Area autem erit √ʒ 432. numerus scilicet productus ex B D, √ʒ 12. in AD, 6. id est, in √ʒ 36.

ALIVD exemplum. Sit perpendicularis A D. 3.

Positis iisdem, reperietur æquatio inter 3. & √ʒ 3ʒ. Diuisis igitur 3. per √ʒ 3. qui est numerus radicum, vt dictum est, fiet 1℞, √ʒ 3. pro recta BD. totumque latus BC, erit √ʒ 12.

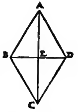
Vel sic, quia æquatio est inter 3. & √ʒ 3ʒ, erit quoque æquatio inter eorum quadrata 9. & 3ʒ. Diuisis ergo 9. per 3. fiet 1ʒ 3. & 1℞, √ʒ 3. pro recta BD, totumque latus BC, erit √ʒ 12. Area autem erit √ʒ 27. numerus videlicet productus ex BD, √ʒ 3. in AD, 3. id est, in √ʒ 9. quod verum esse, liquido constat, cum quadratum lateris, nimirum 12. ad quadratum perpendicularis, id est, ad 9. proportionem habeat sesquitertiam, vt vult Eucl. propos. 12. lib. 13.

XXIX. 29 *Est Rhombus ABCD, cuius area 60. & proportio diametrorum AC, BD, sesquiquarta. Quæruntur latus, & diametri.*

[a] schol. 34. primi. [b] schol. 26 primi.

PONATVR maior diameter AC, 5℞. ideoque minor BD, 4℞. [a] Quia igitur diametri in Rhombo se mutuo diuidunt bifariam, atque angulos etiam bifariam: [b] erit A E, diuidens in Isoscele A B D. angulum A, bifariam, ad B D, perpendicularis. Igitur cum area trianguli A B D, producatur ex A E, in B E, vt cap. 2. lib. 4. Geom. Pract. ostendimus; & area trianguli C B D, ex CE, hoc est, ex A E, in D E; producetur tota area Rhombi ex AE, in BD. Eodemque modo eadem area producetur ex BE, in AC. Fit autem ex BE, 2℞, in AC, 5℞. numerus 10ʒ. Igitur æquatio erit inter 60. & 10ʒ, quod vterque numerus sit area Rhombi. Diuisis ergo 60. per 10. fiet 1ʒ, 6 & 1℞. √ʒ 6. Igitur AC, posita 5℞. erit √ʒ 150. Et BD, posita 4℞. erit √ʒ 96. quod probatur, quia ex BE, √ʒ 24. (semisse diametri B D, √ʒ 96) in A C, √ʒ 150. fit area Rhombi √ʒ 3600 id est, 60. Atque ita cognita est vtraque diameter.

[c] 1. secun.




Deinde quia AE, E B, sunt √ʒ 37$\frac{1}{2}$. & √ʒ 24. & earum quadrata 37$\frac{1}{2}$. & 24. quæ simul faciunt 61$\frac{1}{2}$. summam [d] æqualem quadrato lateris A B; erit latus AB, √ʒ 61$\frac{1}{2}$.

[d] 47. pri.

XXX. 30 *Est Rhombus ABCD, cuius area 60. & diuisa maiore diametro A C, per minorem B D, Quotiens est 1$\frac{1}{4}$. Quæruntur diametri, & latus.*

QVONIAM ex BE, in AC, fit area Rhombi; fiet ex BD, in AC, duplum areæ, nimirum 120. Ponatur ergo minor diameter B D, 1℞, ideoque maior diameter A C, 1$\frac{1}{4}$ 2℞. vt diuisa per BD, faciat Quotientem 1$\frac{1}{4}$. Ex BD, 1℞, in AC, 1$\frac{1}{4}$ 2℞, fit numerus $\frac{5ʒ}{4}$. qui æqualis erit 120. Per multiplicationem ergo in crucem, erit æqualitas inter 5ʒ & 480. Diuisis igitur 480. per 5 fiet 1ʒ. 96 & 1℞, √ʒ 96. pro diametro B D, quę posita fuit 1℞. At vero AC, posita 1$\frac{1}{4}$ 2℞. erit √ʒ 150 quia √ʒ 96. multiplicata per $\frac{5}{4}$. id est, per √ʒ $\frac{25}{16}$. facit √ʒ 150. Vel etiam, si ad √ʒ 96. adiiciatur $\frac{1}{4}$. nimirum √ʒ 6. fit summa √ʒ 150. Atque ita inuentæ sunt diametri BD, Ac √ʒ

√ℨ 96. & √ℨ 150. quod probatur. quia ex √ℨ 24. semisse diametri BD, in √ℨ 150. diametrum AC, fit area Rhombi √ℨ 3600. hoc est, 60. Deinde quia AE, EB, sunt √ℨ $37\frac{1}{2}$. & √ℨ 24. [a] facient earum quadrata $37\frac{1}{2}$. [a] *47. primi* & 24. summam $61\frac{1}{2}$. æqualem quadrato lateris AB: propterea que latus AB, erit √ℨ $61\frac{1}{2}$.

## APPENDIX.

*HÆC sunt, studiose Lector, quæ de regula Algebræ, eiusque explicatione scribenda mihi visa sunt: qui plura requirit, ab alijs huius regulæ scriptoribus petat. Non grauabor tamen appendicis loco subiungere quatuor ænigmata Ptolemæi ex libro primo Epigrammatum græcorum desumpta, & quintum aliud Euclidis, ascriptis ipsis Epigrammatibus græcis, cum eorum interpretatione, non quidem de verbo ad verbum, sed vt res clarior fieret, expresso illorum sensu duntaxat. Ænigmata Ptolemæi sunt hæc.*

## 1. DE PALLADIS STATVA, QVOTNAM illa auri talenta appendat. I.

Πρῶτον.

Παλλὰς ἐγὼ τελέθω σφυρήλατος, αὐτὰρ ὁ χρυσὸς
Αἰζηῶν πέλεται δῶρον ἀοιδοπόλων,
Ἥμισυ μὲν χρυσοῖο Χαρίσιος, ὀγδοάτην δὲ
Θέσπις, καὶ δεκάτην μοῖραν ἔθηκε Σόλων.
Αὐτὰρ ἐεικοστὴν Θεμίσων, τὰ δὲ λοιπὰ τάλαντα
Ἐννέα. καὶ τέχνη, δῶρον Ἀριστοδίκου.

*PALLAS ego sum, malleo hunc in modum fabrefacta: sed aurum munus est iuuenum, qui in studio versantur Poetices. Dimidiam quidem auri partem contulit Charisius: Octauam vero Thespis: Decimam dehinc Solon: Et vigesimam Themison: Reliqua autem nouem talenta, & mercedem item, quæ artifici debebatur, contulit Aristodicus.*

*Quæritur de toto pondere statuæ, & quot quisque talenta contulerit.*

PONATVR pondus statuæ 1℞ talentorum auri. Ergo Charisius contulit $\frac{1}{2}$ ℞. tal. Thespis $\frac{1}{8}$ ℞. Solon $\frac{1}{10}$ ℞. Themison $\frac{1}{20}$ ℞ & Aristodicus 9. talenta, quæ omnes partes conficiunt $\frac{31}{40}$ ℞ + 9. summam æqualem 1℞. Ablatis igitur $\frac{31}{40}$ ℞ vtrinque, æqualitas erit inter 9. & $\frac{9}{40}$ ℞. Diuisis igitur 9 per $\frac{9}{40}$ fiet 1℞ 40 Atque tot talentorum fuit statua. Charisius ergo contulit 20. talenta, nimirum semissem totius ponderis. Thespis 5. talenta, octauam scilicet partem. Solon 4. talenta, nimirum partem decimam. Themison denique 2. talenta, partem videlicet vigesimam, quæ omnes partes cum 9. talentis, quæ contulit Aristodicus, conficiunt 40. talenta.

## 2. DE AVGEÆ ARMENTIS, QVOTNAM boues fuerint. II.

Δεύτερον.

Αὐγείην ἐρέεινε μέγα σθένος Ἀλκείδαο.
Πληθὺν βουκολίων διζήμενος, ὃς δ' ἀπάμειπτο,
Ἀμφὶ μὲν Ἀλφειοῖο ῥοὰς φίλος ἥμισυ τῶνδε,
Μοίρῃ δ' ὀγδοάτῃ ὄχθον Κρόνου ἀμφινέμονται.
Δωδεκάτη δ' ἀπάνευθε Ταραξίπποιο παρ' ἧρον,
Ἀμφὶ δ' ἄρ Ἤλιδα δῖαν ἐεικοστὴ νεμέθονται.
Αὐτὰρ ἐν Ἀρκαδίῃ τριηκοστὴν προλέλοιπα,
Λοιπὰς δ' αὖ λεύσσεις ἀγέλας τόδε πεντήκοντα.

*AVGEAM interrogauit generosus Hercules de multitudine armentorum, cui ille respondit. Media horum pars, amice, circa fluuium Alpheum pascitur: octaua autem circa Saturni collem: cæterum duodecima procul hinc iuxta loca Taraxippi extrema: At vigesima eorum pars circa Elidem pascitur: trigesimam vero in Arcadia ego reliqui: Reliqua autem quinquaginta numero armenta videas ipse.*

*Quæstio est de numero boum, & quotnam in singulis locis fuerint.*

PONATVR numerus boum 1℞. Ergo iuxta fluuium Alpheum fuerunt $\frac{1}{2}$ ℞ boum: Et circa collem Saturni $\frac{1}{8}$ ℞ At iuxta Taraxippi extrema $\frac{1}{12}$ ℞. Circa vero Elidem montē $\frac{1}{20}$ ℞. Et in Arcadia $\frac{1}{30}$ ℞: & apud Augeam 50. boues. quæ omnes partes conficiunt $\frac{19}{24}$ ℞ + 50. summā æqualem 1℞. Ablatis igitur $\frac{19}{24}$ ℞ vtrobiq;, æqualitas erit inter 50. & $\frac{5}{24}$ ℞. Diuisis ergo 50 per $\frac{5}{24}$. fiet 1℞. 240. pro numero omnium boum, quorum

quorum ſemiſſis 120. fuit circa fluuium Alpheum: & 30. boues, nimirum $\frac{1}{8}$. circa collem Saturni: Et $\frac{1}{12}$. nimirum 20. iuxta Taraxippi extrema: At iuxta Elidem montem 12. nimirum $\frac{1}{20}$. in Arcadia denique boues 8. pars videlicet $\frac{1}{30}$. Atque omnes hi boues cum 50. qui prope Augeam fuerunt, faciunt 240.

---

III. 3. LEONIS ÆNEI CANALES.

Τρίτον.

Χάλκεός εἰμι λέων, κρουνοὶ δέ μοι ὄμματα δοιὰ
Καὶ σόμα σιὼ δὲ θέναρ δεξιτεροῖο ποδός.
Πλήθει δὲ κρητῆρα δύ' ἤμασι δεξιὸν ὄμμα,
Καὶ λαιὸν τρισσοῖς, καὶ πισύροισι θέναρ.
Ἄρκιον ἓξ ὥραις πλῆσαι σόμα· σὺν δ' ἅμα πάντα,
Καὶ σόμα, καὶ γλῆναι, καὶ θέναρ, εἰπὲ πόσον:

*ÆNEVS ego ſum Leo: canales vero mihi ſunt oculi duo: & os cum palma dextri pedis. Implent autem craterem eundem, dexter quidem oculus duobus diebus: ſiniſter vero tribus: Et palma quatuor diebus: Porro ſex horis os implere eum poteſt. Hæc igitur ſimul omnia & os, & oculi, & palma, dic quanto tempore eundem craterem impleant?*

PONATVR pro tempore 1℞. horarum. atque dicatur.

| Hor. | Crater. | Hor. | Crater. |
|---|---|---|---|
| 48 | 1 | 1℞? | $\frac{1}{48}$ ℞ |
| 72 | | | $\frac{1}{72}$ ℞ |
| 96 | | | $\frac{1}{96}$ ℞ |
| 6 | | | $\frac{1}{6}$ ℞ |

Si 48. horis impletur 1. Crater, in 1℞ horarum implebitur $\frac{1}{48}$ ℞. Crateris: & ſic de reliquis, vt in regula Trium quater adhibita vides. Atque omnes hæ partes faciunt $\frac{61}{288}$ ℞. vnius Crateris, æquales 1. Crateri. Si igitur 1. diuidatur per $\frac{61}{288}$ fiet 1℞. $\frac{288}{61}$. hoc eſt, Horæ $4\frac{44}{61}$. quibus Crater implebitur. quod probatur. vt hic vides.

| Hor. | Crater. | Hor. | Crater. |
|---|---|---|---|
| 48 | 1 | $4\frac{44}{61}$? | $\frac{6}{61}$ |
| 72 | | | $\frac{4}{61}$ |
| 96 | | | $\frac{3}{61}$ |
| 6 | | | $\frac{48}{61}$ |

Nam ſi oculus dexter 48. horis implet 1. Craterem, horis $4\frac{44}{61}$. implebunt $\frac{6}{61}$. Crateris vnius, &c. atque omnes iſtæ partes Crateris conficiunt vnum craterem.

---

IV. 4. DE STATVIS ZETHI, AMPHIONIS, ac matris ipſorum Antiopes.

Τέταρτον.

Ἄμφω μὲν ἡμεῖς εἴκοσι μνᾶς ἕλκομεν,
Ζῆθός τε χ' ὠ ξύναιμος, ἣν δέ μου λάβῃς
Τρίτον, τὸ τέτρατόν τε τοῦδ' Ἀμφίονος
Ἓξ πάντ' ἀνευρὼν, μητρὸς εὑρήσεις σταθμόν.

*AMBO quidem nos viginti minas appendimus, Zethus pariter, & meus conſanguineus. At ſi de meis minis tertiam partem: minarum vero Amphionis quartam ſumpſeris, ſex in ſumma inuentis, matris pondus reperies. Quæſtio eſt, quot minas tum Zethus, tum Amphion eius conſanguineus appenderit.*

PONE pro Zetho 1℞ minarum: ideoque pro Amphione minas 20 − 1℞. faciesque tertiam partem Zethi $\frac{1}{3}$ ℞, & quartam partem Amphionis 5 − $\frac{1}{4}$ ℞, quæ ſummam faciunt 5 + $\frac{1}{12}$ ℞, æqualem 6. Ablatis igitur 5. vtrobique, erit æquatio inter $\frac{1}{12}$ ℞. & 1. Diuiſa ergo 1. per $\frac{1}{12}$. fiet 1℞. 12. atque tot minarum fuit ſtatua Zethi. Amphionis vero 8. & Antiopes 6. quæ minæ omnes faciunt 26.

---

V. 5. EVCLIDIS GEOMETRICVM.

Εὐκλείδου Γεωμετρικόν.

Ἡμίονος καὶ ὄνος φορέουσαι οἶνον ἔβαινον,
Αὐτὰρ ὄνος στενάχεσκεν ἐπ' ἄχθεϊ φόρτου ἑοῖο.
Τὴν δὲ βαρυστενάχουσαν ἰδοῦσ' ἐρέεινεν ὁμοίη.

μῆτερ

Μῆτερ τί κλαίουσ' ὀλοφύρεαι ἠΰτε κούρη:
Εἰ μέτρον ἓν μοι δοίης: διπλάσιον σέθεν ἦρα.
Εἰ δὲ ἓν ἀντιλάβοις, πάντως ἰσότητα φυλάξεις.
Εἰπὲ τὸ μέτρον ἄριστε Γεωμετρίης ἐπίστορ.

IBANT *Mulus, & Asina vinum portantes: Asina autem ex dolore ponderis sui ingemiscebat. Qua re visa, Mulus grauiter ingemiscentem Asinam sic interrogauit. Mater cur ita lamentaris, cur puellæ instar lacrimas fundis? Mensuram mihi vnam si dederis, duplo, quam tu, plus sustulero: sin vero tu à me vnam acceperis, idem plane, quod ego, pondus feres. Mensuram itaque peritissime Geometer dicas volo.*

Alia versio.

*Mulæ, Asinæque duos imponit seruulus vtres*
*Impletos vino, segnemque vt vidit Asellam*
*Pondere defessam vestigia figere tarda*
*Mula rogat: Quid chara parens cunctare, gemisque?*
*Vnam ex vtre tuo mensuram si mihi reddas.*
*Duplum oneris tunc ipsa feram: Sed si tibi tradam*
*Vnam mensuram, fient aqualia vtrique*
*Pondera. Mensuras dic docte Geometer istas.*

Alia Versio.

*Mulus portabat vinum comitatus Asella,*
*Hac oneris queritur pondera vasta sui.*
*Ille graues matris gemitus miratur, & inquit,*
*Cur adeo lachrymis lumina mæsta fluunt?*
*Mollities teneras, mater, decet illa puellas,*
*Quas premit insuetus, debilitatque labor.*
*Vnam mensuram, si nostros fundis in vtres,*
*Ipse tui vini pondera dupla feram:*
*Sin vnam contra nostro de fasce leuabis*
*Partem, tunc æquum pondus vterque feret.*
*Dic mihi mensuras, ô docte Geometer istas,*
*Non aliter Phœbi nomine dignus eris.*

PONE pro mensuris muli $1℞$. ac proinde pro mensuris asinæ $\frac{1}{2}℞ + 1\frac{1}{2}$. Ita enim si mulo dederit vnam mensuram, habebit mulus $1℞ + 1$. quod pondus duplum erit reliquo ponderi asinæ, nimirum $\frac{1}{2}℞ + \frac{1}{2}$. At si mulus asinæ det 1. mensuram, erit reliquum pondus muli $1℞ - 1$. æquale ponderi asinæ, quod tunc erit $\frac{1}{2}℞ + 2\frac{1}{2}$. Addatur 1. vtrobique, fietque æquatio inter $1℞$. & $\frac{1}{2}℞ + 3\frac{1}{2}$. Ablataque $\frac{1}{2}℞$. vtrinque, erit æqualitas inter $\frac{1}{2}℞$. & $3\frac{1}{2}$. Diuisis igitur $3\frac{1}{2}$. per $\frac{1}{2}$. fiet $1℞\ \frac{14}{2}$. hoc est, 7. pro mensuris muli. Asina ergo habens $\frac{1}{2}℞ + 1\frac{1}{2}$. portabit mensuras $3\frac{1}{2}$. & $1\frac{1}{2}$. nimirum 5. quod probatur. Nam si mulo det asina 1. mensuram, habebit mulus 8 mensuras, quæ duplæ sunt quatuor mensurarum, quæ asinæ supersunt. At si mulus det asinæ mensuram 1. portabit vterque 6. mensuras.

INDEX

# INDEX
# CAPITVM QVÆ IN ALGEBRA CONTINENTVR.



FINIS.